ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.687 № 687, (2010) с. 20–23

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.687 No 687, (2010) 20–23

ІНТЕГРАЛЬНІ ЗОБРАЖЕННЯ АНАЛІТИЧНИХ У КРУГОВОМУ КІЛЬЦІ ФУНКЦІЙ НА ОСНОВІ МЕТОДУ МОМЕНТІВ

М.М. Чип

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 27 січня 2010 р.)

Запроваджено узагальнені моментні зображення послідовностей комплексних чисел, номери членів яких є цілими числами. Встановлено інтегральні зображення твірних функцій послідовностей запроваджених моментів та інтегральні зображення розділених різниць твірних функцій.

Ключові слова: проблема моментів, твірні функції, інтегральні зображення.

2000 MSC: 30B40, 30E05, 30E20

УДК: 517.53

Вступ

Узагальнені моментні зображення послідовностей комплексних чисел розширюють клас послідовностей класичних моментів ([1]) та широко застосовуються для побудови інтегральних зображень твірних функцій послідовностей узагальнених моментів ([2]). Інтегральні зображення функцій ефективно продовжують їх за межі області аналітичності ([3]). Способи узагальнення класичних моментних зображень впливають на форми інтегральних зображень твірних функцій.

I. Зображення коефіцієнтів узагальненого степеневого ряду в інтегральному вигляді

Запровадимо узагальнені моментні зображення послідовностей комплексних чисел, номери членів яких є цілими числами, та встановимо деякі способи їх побудови.

Означення. Узагальненим моментним зображенням заданої послідовності $\{s_n\}_{-\infty}^{+\infty} \subset \mathbb{C}$ назвемо зображення її членів у вигляді

$$s_{k+l} = \int\limits_{\Gamma} a_k(\zeta) b_l(\zeta) d\mu(\zeta) \qquad (1)$$

на відшукуваній множині Γ з мірою $d\mu(\zeta)$ на ній та відшукуваними послідовностями $\{a_k(\zeta)\}_{-\infty}^{+\infty}$ і $\{b_l(\zeta)\}_{-\infty}^{+\infty}$ з простору $\mathbb{L}_2(\Gamma; d\mu(\zeta))$.

Функції відшукуваних послідовностей можна знайти таким способом. Нехай $\{a_k(\zeta)\}_{-\infty}^{+\infty}$ — ортогональна система функцій на множині Γ з мірою $d\mu(\zeta)$ на ній, причому $\int\limits_{\Gamma} a_k^2(\zeta) d\mu(\zeta) = h_k \neq 0$. Приймемо

$$b_l(\zeta) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{s_{\nu+l}}{h_\nu} a_\nu(\zeta), \qquad (2)$$

вважаючи ряд рівномірно збіжним на множині Γ для кожного $l = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$.

Підставляючи (2) в (1), почленно інтегруючи та застосовуючи умову ортогональності, одержуємо

$$\int\limits_{\Gamma} a_k(\zeta) b_l(\zeta) d\mu(\zeta) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{s_{\nu+l}}{h_\nu} \int\limits_{\Gamma} a_k(\zeta) a_\nu(\zeta) d\mu(\zeta) =$$

$$= \frac{s_{k+l}}{h_k} h_k = s_{k+l}.$$

Послідовності $\{a_k(\zeta)\}_{-\infty}^{+\infty}$ та $\{b_l(\zeta)\}_{-\infty}^{+\infty}$ є відшукуваними.

Виразимо функції відшукуваних послідовностей у вигляді лінійних форм функцій ортогональної системи на множині Γ з мірою $d\mu(\zeta)$ та встановимо співвідношення між коефіцієнтами лінійних форм і узагальненими запровадженими моментами.

1) Нехай $\{c_\nu(\zeta)\}_0^{+\infty}$ — ортогональна система функцій на множині Γ з мірою $d\mu(\zeta)$, причому $\int\limits_{\Gamma} c_\nu^2(\zeta) d\mu(\zeta) = \gamma_\nu \neq 0$. Приймемо

$$a_k(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{|k|} p_{\nu k} c_\nu(\zeta), \qquad b_l(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{|l|} q_{\nu l} c_\nu(\zeta). \qquad (3)$$

Підставляючи обидві форми в (1), почленно інтегруючи та застосовуючи умову ортогональності, одержуємо співвідношення

$$\sum_{\nu=0}^{m} p_{\nu k} q_{\nu l} \gamma_\nu = s_{k+l}, \qquad m = \min(|k|; |l|). \qquad (4)$$

2) Нехай $\{c_\nu(\zeta)\}_{-\infty}^{+\infty}$ — ортогональна система функцій на множині Γ з мірою $d\mu(\zeta)$, причому $\int\limits_\Gamma c_\nu^2(\zeta)d\mu(\zeta) = \gamma_\nu \neq 0$. Приймемо

$$a_k(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{k} p_{\nu k} c_\nu(\zeta), \qquad b_l(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{l} q_{\nu l} c_\nu(\zeta). \quad (5)$$

Підставляючи обидві форми в (1), почленно інтегруючи та застосовуючи умову ортогональності, одержуємо співвідношення

$$a)\ k > 0,\ l > 0, \quad \sum_{\nu=0}^{m_1} p_{\nu k} q_{\nu l}\gamma_\nu = s_{k+l}, \quad m_1 = \min(k;l);$$

$$b)\ k < 0,\ l < 0, \quad \sum_{\nu=0}^{m_2} p_{\nu k} q_{\nu l}\gamma_\nu = s_{k+l}, \quad m_2 = \max(k;l);$$

$$c)\ kl \leq 0, \quad p_{0k}q_{0l}\gamma_0 = s_{k+l}. \quad (6)$$

3) Нехай $\{c_\nu(\zeta)\}_{-\infty}^{+\infty}$ — ортогональна система функцій на множині Γ з мірою $d\mu(\zeta)$, причому $\int\limits_\Gamma c_\nu^2(\zeta)d\mu(\zeta) = \gamma_\nu \neq 0$. Приймемо

$$a_k(\zeta) = \sum_{\nu=-|k|}^{|k|} p_{\nu k} c_\nu(\zeta), \quad b_l(\zeta) = \sum_{\nu=-|l|}^{|l|} q_{\nu l} c_\nu(\zeta). \quad (7)$$

Підставляючи обидві форми в (1), почленно інтегруючи та застосовуючи умову ортогональності, одержуємо співвідношення

$$\sum_{\nu=-m}^{m} p_{\nu k} q_{\nu l}\gamma_\nu = s_{k+l}, \quad m = \min(|k|;|l|). \quad (8)$$

Знайдені співвідношення є системами алгебраїчних рівнянь для знаходження коефіцієнтів лінійних форм, у вигляді яких виражаються функції відшукуваних послідовностей.

II. Зображення суми узагальненого степеневого ряду в інтегральному вигляді

Встановимо інтегральні зображення твірних функцій послідовностей запроваджених узагальнених моментів та встановимо інтегральні зображення розділених різниць твірних функцій послідовностей запроваджених узагальнених моментів.

Теорема. *Нехай твірні функції послідовності* $\{s_n\}_{-\infty}^{+\infty}$ *задано у вигляді*

$$h_m(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} s_{m+\nu} z^\nu, \qquad \rho_m < |z| < r_m, \quad (9)$$

$m = 0, \pm1, \pm2, ...,$ $\rho_m > 0$, $r_m > 0$*; послідовність* $\{s_n\}_{-\infty}^{+\infty}$ *можна зобразити принаймні одним способом у вигляді (1). Приймемо*

$$A_m(z,\zeta) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{m+k}(\zeta) z^k, \qquad |z| < d_m; \quad (10)$$

$$B_m(w,\zeta) = \sum_{l=0}^{+\infty} b_{m+l}(\zeta) w^l, \qquad |w| < q_m; \quad (11)$$

$$C_m(z,\zeta) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{m-k}(\zeta)}{z^k}, \qquad |z| > c_m; \quad (12)$$

$$D_m(w,\zeta) = \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{b_{m-l}(\zeta)}{w^l}, \qquad |w| > p_m; \quad (13)$$

$0 < c_m < d_m$, $0 < p_m < q_m$*; ряди вважатимемо рівномірно збіжними на* Γ.

Тоді будуть істинними інтегральні зображення

$$h_m(z) = \int\limits_\Gamma [A_0(z;\zeta) + C_0(z;\zeta)] b_m(\zeta) d\mu(\zeta), \quad (14)$$

$$\frac{zh_m(z) - wh_m(w)}{z-w} =$$

$$= \int\limits_\Gamma [A_m(z;\zeta)B_0(w;\zeta) - C_m(z;\zeta)D_0(w;\zeta)] d\mu(\zeta), \quad (15)$$

у спільних відповідних кругових кільцях збіжності.

□ *Доведення.* На основі (1) маємо

$$s_{m+\nu} = \int\limits_\Gamma a_\nu(\zeta) b_m(\zeta) d\mu(\zeta).$$

Підставивши цей вираз в (9) та враховуючи, що

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu(\zeta) z^\nu = A_0(z;\zeta) + C_0(z;\zeta),$$

одержуємо інтегральне зображення (14).

Приймемо

$$f_m(z) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} s_{m+\nu} z^\nu, \qquad |z| < r_m. \quad (16)$$

Провівши елементарні перетворення, одержимо

$$\frac{zf_m(z) - wf_m(w)}{z-w} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} s_{k+l+m} z^k w^l. \quad (17)$$

На основі (1) маємо

$$s_{k+l+m} = \int\limits_\Gamma a_{k+m}(\zeta) b_l(\zeta) d\mu(\zeta).$$

Підставляючи цей вираз в (17), враховуючи (10) та (11), встановлюємо

$$\frac{zf_m(z) - wf_m(w)}{z-w} = \int\limits_\Gamma A_m(z;\zeta) B_0(w;\zeta) d\mu(\zeta). \quad (18)$$

Приймемо

$$g_m(z) = \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{s_{m-\nu}}{z^\nu}, \qquad |z| > \rho_m. \quad (19)$$

Провівши елементарні перетворення, одержимо

$$\frac{zg_m(z) - wg_m(w)}{w - z} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=1}^{+\infty} \frac{s_{m-k-l}}{z^k w^l}. \qquad (20)$$

На основі (1) маємо

$$s_{m-k-l} = \int_\Gamma a_{m-k}(\zeta) b_{-l}(\zeta) d\mu(\zeta).$$

Підставляючи цей вираз в (20), враховуючи (12) та (13), встановлюємо

$$\frac{zg_m(z) - wg_m(w)}{w - z} = \int_\Gamma C_m(z;\zeta) D_0(w;\zeta) d\mu(\zeta). \quad (21)$$

Віднімаючи (21) від (18), враховуючи співвідношення

$$f_m(\tau) + g_m(\tau) = h_m(\tau), \qquad (22)$$

одержуємо інтегральне зображення (15). Теорема доведена. ■

Зауваження 1. На основі (1) маємо

$$s_{m+\nu} = \int_\Gamma a_m(\zeta) b_\nu(\zeta) d\mu(\zeta).$$

Підставивши цей вираз в (9) та враховуючи, що

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} b_\nu(\zeta) z^\nu = B_0(z;\zeta) + D_0(z;\zeta),$$

одержуємо інтегральне зображення

$$h_m(z) = \int_\Gamma [B_0(z;\zeta) + D_0(z;\zeta)] a_m(\zeta) d\mu(\zeta), \qquad (23)$$

Зауваження 2. На основі (1) маємо

$$s_{k+l+m} = \int_\Gamma a_k(\zeta) b_{l+m}(\zeta) d\mu(\zeta).$$

Підставляючи цей вираз в (17), враховуючи (10) та (11), встановлюємо

$$\frac{zf_m(z) - wf_m(w)}{z - w} = \int_\Gamma A_0(z;\zeta) B_m(w;\zeta) d\mu(\zeta). \quad (24)$$

Віднімаючи (21) від (24), враховуючи (22), одержуємо

$$\frac{zh_m(z) - wh_m(w)}{z - w} =$$

$$= \int_\Gamma [A_0(z;\zeta) B_m(w;\zeta) - C_m(z;\zeta) D_0(w;\zeta)] d\mu(\zeta), \quad (25)$$

На основі (1) маємо

$$s_{m-k-l} = \int_\Gamma a_{-k}(\zeta) b_{m-l}(\zeta) d\mu(\zeta).$$

Підставляючи цей вираз в (20), враховуючи (12) та (13), встановлюємо

$$\frac{zg_m(z) - wg_m(w)}{w - z} = \int_\Gamma C_0(z;\zeta) D_m(w;\zeta) d\mu(\zeta). \quad (26)$$

Віднімаючи (26) від (18), враховуючи (22), одержуємо

$$\frac{zh_m(z) - wh_m(w)}{z - w} =$$

$$= \int_\Gamma [A_m(z;\zeta) B_0(w;\zeta) - C_0(z;\zeta) D_m(w;\zeta)] d\mu(\zeta), \quad (27)$$

Віднімаючи (26) від (24), враховуючи (22), одержуємо

$$\frac{zh_m(z) - wh_m(w)}{z - w} =$$

$$= \int_\Gamma [A_0(z;\zeta) B_m(w;\zeta) - C_0(z;\zeta) D_m(w;\zeta)] d\mu(\zeta), \quad (28)$$

Зауваження 3. На основі (1) маємо

$$s_{k+l+m} = \int_\Gamma a_k(\zeta) b_l(\zeta) d\mu_m(\zeta),$$

$$s_{m-k-l} = \int_\Gamma a_{-k}(\zeta) b_{-l}(\zeta) d\mu_m(\zeta).$$

Підставляючи ці вирази в (17) та в (20), враховуючи (10) та (11) і (12) та (13) відповідно, встановлюємо

$$\frac{zf_m(z) - wf_m(w)}{z - w} = \int_\Gamma A_0(z;\zeta) B_0(w;\zeta) d\mu_m(\zeta), \quad (29)$$

$$\frac{zg_m(z) - wg_m(w)}{w - z} = \int_\Gamma C_0(z;\zeta) D_0(w;\zeta) d\mu_m(\zeta). \quad (30)$$

Віднімаючи (30) від (29), враховуючи (22), одержуємо

$$\frac{zh_m(z) - wh_m(w)}{z - w} =$$

$$= \int_\Gamma [A_0(z;\zeta) B_0(w;\zeta) - C_0(z;\zeta) D_0(w;\zeta)] d\mu_m(\zeta), \quad (31)$$

Якщо в інтегральних зображеннях розділених різниць можна здійснювати граничні переходи при $w \to z$, то можна встановити інтегральні зображення відповідних похідних функцій.

III. Висновки

Множина функціональних послідовностей, які справджують запроваджені узагальнені моментні зображення, формує множину інтегральних зображень розділених різниць твірних функцій. Встановлені інтегральні зображення дозволяють виражати спеціальні функції в інтегральних виглядах чи знаходити значення інтегралів від спеціальних функцій та продовжувати аналітичні в кругових кільцях функції на множини збіжності одержаних інтегралів.

Література

[1] Дзядик В.К. Про узагальнення проблеми моментів, ДАН УРСР, Серія А., 1981. – № 6. – С. 8–12.

[2] Чип М.М. Метод моментів зображення функції рядом та інтегралом // Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2003, **46**, № 4. – С. 65–72.

[3] Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1966. – 672 с.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГОВОМ КОЛЬЦЕ ФУНКЦИЙ НА ОСНОВАНИИ МЕТОДА МОМЕНТОВ

М.Н. Чып

Национальный университет "Львивськa политехника", ул. С. Бандеры, 12, г. Львов, 79013, Украина

Введены обобщенные моментные представления последовательности комплексных чисел, номера членов которых являются целыми числами. Установлены интегральные представления производящих функций последовательностей введенных моментов и интегральные представления разделенных разностей производящих функций.

Ключевые слова: проблема моментов, производящие функции, интегральные представления.

2000 MSC: 30B40, 30E05, 30E20

УДК: 517.53

INTEGRAL REPRESENTATIONS FOR ANALYTIC FUNCTIONS IN ANNULUS ON THE BASE OF THE MOMENTS METHOD

M.M. Chyp

National University "Lvivska Politechnika" 12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

Generalized moment representations for sequences of complex numbers having members with integer indices are difined. Integral represantations for generating functions for sequences of such moments and for devided differences of the generating functions are obtained.

Keywords: generating functions, integral representations.

2000 MSC: 30B40, 30E05, 30E20

УДК: 517.53