ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.687 № 687, (2010) с. 7–10

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.687 No 687, (2010) 7–10

ПРО РІСТ ЦІЛИХ У ПЛОЩИНІ ФУНКЦІЙ ЗІ СПЕЦІАЛЬНИМ РОЗПОДІЛОМ НУЛІВ

О.В. Веселовська

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 2 листопада 2010 р.)

Вивчено вплив розподілу нулів цілої у площині функції на регулярність її росту.

Ключові слова: ціла функція, порядок, рід функції, неванліннівська характеристика.

2000 MSC: 30D20

УДК: 517.547.28

Нехай f — ціла у площині функція,

$$T(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+\left|f(re^{i\theta})\right|d\theta, \ln^+|f|=\max(\ln|f|,0),$$

— її характеристика Неванлінни [1, с. 27]. Величини

$$\rho(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln T(r,f)}{\ln r},$$

$$\lambda(f)=\underline{\lim}_{r\to\infty}\frac{\ln T(r,f)}{\ln r}$$

називаються порядком і нижнім порядком функції f відповідно (див., наприклад, [1, с. 61]).

Через $q(f)$ позначатимемо рід цілої функції f(див. [1, с. 80]). При нескінченному порядку $\rho(f)$ вважатимемо $q(f)$ також нескінченним.

У теорії цілих функцій особливе місце займає питання про зв'язок між ростом таких функцій і розподілом їх нулів. Це питання розглядали багато авторів, зокрема, А. Едрей, У. Фукс, Т. Кобаяші, А.А. Гольдберг.

У 1959 р. А.Едрей і У.Фукс [2] показали, що у цілої в площині функції з від'ємними нулями і скінченним порядком $\rho>1$ нижній порядок і порядок належать відрізку $[q;q+1]$. Цей результат узагальнив Т. Кобаяші [3] на випадок цілих функцій, нулі яких розташовані в деякому куті. А.А. Гольдберг [1, с. 338] отримав загальніші результати для мероморфних у площині функцій з (p,η) — розділеними нулями та полюсами.

У статті вивчають аналогічні питання для цілих у площині функцій, нулі яких лежать у деякій області. Отримані теореми узагальнюють аналогічні результати з [1, с. 338, 2, 3, 4]. Для їх доведення нам потрібні такі відомості.

Коефіцієнтами Фур'є цілої функції f називаються

$$c_k(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln\left|f(re^{i\theta})\right|e^{-ik\theta}d\theta,$$

де $k\in Z$.

Нехай $n(r,0,f)$ позначає число нулів функції f у крузі $\{z:|z|\le r\}$. Якщо f — ціла функція така, що $f(0)=1$, $\{a_\nu\}$ — послідовність її нулів, а

$$\ln f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(f)z^k=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k z^k$$

— розклад у ряд Тейлора в околі точки $z=0$, то для коефіцієнтів Фур'є $c_k(r,f)$ справедливі такі формули [5]:

$$c_0(r,f)=\sum_{|a_\nu|\le r}\ln\frac{r}{|a_\nu|}=N(r,0,f),$$

де $N(r,0,f)=\int\limits_0^r\frac{n(t,0,f)}{t}dt;$

$$c_k(r,f)=\frac{1}{2}\alpha_k r^k+\frac{1}{2k}\sum_{|a_\nu|\le r}\left[\left(\frac{r}{a_\nu}\right)^k-\left(\frac{\overline{a_\nu}}{r}\right)^k\right],\quad k\ge 1;$$

$$c_k(r,f)=\overline{c_{-k}(r,f)},\quad k\le -1.$$

Теорема 1. *Нехай $f(z)$ – ціла функція така, що $f(0)=1$. Якщо її нулі лежать в області $\{z:Rez>0\}$ і $Ref'(0)\ge 0$, то*

$$\underline{\lim}_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{r}>0.$$

□ *Доведення.* Запишемо для функції f її перший коефіцієнт Фур'є

$$c_1(r,f)=\frac{1}{2}\alpha_1 r+\frac{1}{2}\sum_{|a_\nu|\le r}\left(\frac{r}{a_\nu}-\frac{\overline{a_\nu}}{r}\right),$$

де $\alpha_1 = \frac{d}{dz} \ln f(z)\,|_{z=0} = f'(0)$. Відокремивши дійсну частину, матимемо

$$Rec_1(r,f) = \frac{1}{2}Ar + \frac{1}{2}\sum_{|a_\nu|\le r}\left(\frac{r}{|a_\nu|} - \frac{|a_\nu|}{r}\right)\cos\beta_\nu,$$

де $A = Ref'(0)$, $\beta_\nu = \arg a_\nu$.

З очевидної рівності $|\ln x| = \ln^+ x + \ln^+ \frac{1}{x}$, яка справедлива для $x \ge 0$, випливає, що

$$Rec_1(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\cos\theta d\theta \le 2T(r,f)\,.$$

Тому

$$4T(r,f) \ge Ar + \sum_{|a_\nu|\le r}\left(\frac{r}{|a_\nu|} - \frac{|a_\nu|}{r}\right)\cos\beta_\nu. \qquad (1)$$

Оскільки $A \ge 0$ і для всіх ν виконується умова $\cos\beta_\nu > 0$, то

$$4T(r,f) \ge \left(\frac{r}{|a_1|} - \frac{|a_1|}{r}\right)\cos\beta_1,$$

звідки отримуємо

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{r} > 0.$$

■

Зауваження 1. У теоремі 1 область, в якій лежать нулі функції f, розширити не можна. Побудована ціла функція f роду 1 така, що $f(0) = 1$ і $Ref'(0) = 0$, з нулями на уявній осі і для якої $\varliminf\limits_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{r} = 0$.

Теорема 2. *Нехай $f(z)$ — ціла функція, для якої $f(0) = 1$ і $Ref'(0) < 0$. Якщо її нулі задовольняють умову*

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{n(t,0,f)}{t^2}dt = \infty$$

і лежать на множині $\left\{z = re^{i\theta} : \cos\theta \ge \varphi(r)\right\}$, де функція φ така, що

1) $0 < \varphi(r) \le 1$, φ — незростаюча;

2) $\varphi(r)\int_0^r \frac{n(t,0,f)}{t^2}dt \to \infty$ при $r \to \infty$,

то

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{r} = \infty.$$

□ *Доведення.* З нерівності (1) та умови 1) випливає, що

$$4T(r,f) \ge Ar + \varphi(r)\sum_{|a_\nu|\le r}\left(\frac{r}{|a_\nu|} - \frac{|a_\nu|}{r}\right).$$

Переходячи від суми до інтеграла Стільтьєса та беручи його частинами, отримаємо

$$\sum_{|a_\nu|\le r}\left(\frac{r}{|a_\nu|} - \frac{|a_\nu|}{r}\right) = r\int\limits_0^r \frac{dn(t,0,f)}{t} - \frac{1}{r}\int\limits_0^r t dn(t,0,f) =$$

$$= r\int\limits_0^r \frac{n(t,0,f)}{t^2}dt + \frac{1}{r}\int\limits_0^r n(t,0,f)\,dt.$$

Тоді

$$4T(r,f) \ge Ar + r\varphi(r)\int\limits_0^r \frac{n(t,0,f)}{t^2}dt.$$

Звідси, використовуючи умову 2), знаходимо

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{r} = \infty,$$

що завершує доведення теореми. ■

Зауваження 2. У теоремі 2 область, у якій лежать нулі функції f, розширити не можна. Побудована ціла функція g роду 1 така, що $g(0) = 1$, $Reg'(0) < 0$, з нулями, розташованими на кривій $\{z = re^{i\theta} : \cos\theta = \varphi(r)\}$, де функція φ задовольняє умову 1) і не задовольняє умову 2) теореми 2, і справедлива рівність $\varliminf\limits_{r\to\infty}\frac{T(r,g)}{r} = 0$.

Наслідок 1. Якщо функція f задовольняє умови теорем 1 чи 2, то $\lambda(f) \ge 1$.

У випадку цілих функцій скінченного роду мають місце такі теореми.

Теорема 3. *Нехай $f(z)$ — ціла функція скінченного роду $q = q(f) \ge 1$ така, що $f(0) = 1$ і $Re\frac{d^q}{dz^q}\ln f(z)\,|_{z=0} \ge 0$. Якщо її нулі лежать в області $\{z : Rez^q > 0\}$, то*

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{r^q} > 0.$$

□ *Доведення.* Запишемо для функції f її q-й коефіцієнт Фур'є

$$c_q(r,f) = \frac{1}{2}\alpha_q r^q + \frac{1}{2q}\sum_{|a_\nu|\le r}\left[\left(\frac{r}{a_\nu}\right)^q - \left(\frac{\overline{a}_\nu}{r}\right)^q\right],$$

де $\alpha_q = \frac{1}{q!}\frac{d^q}{dz^q}\ln f(z)\,|_{z=0}$. Знайдемо дійсну частину $c_q(r,f)$. Матимемо

$$Rec_q(r,f) = \frac{1}{2}A_q r^q + \frac{1}{2q}\sum_{|a_\nu|\le r}\left(\frac{r^q}{|a_\nu|^q} - \frac{|a_\nu|^q}{r^q}\right)\cos q\beta_\nu,$$

де $A_q = \frac{1}{q!}Re\frac{d^q}{dz^q}\ln f(z)\,|_{z=0}$, $\beta_\nu = \arg a_\nu$.

З першої основної теореми Неванлінни випливає, що для всіх k

$$|c_k(r,f)| \leq 2T(r,f).$$

Тому

$$4T\left(r,f\right) \geq A_q r^q + \frac{1}{q}\sum_{|a_\nu|\leq r}\left(\frac{r^q}{|a_\nu|^q} - \frac{|a_\nu|^q}{r^q}\right)\cos q\beta_\nu. \tag{2}$$

Оскільки $A_q \geq 0$ і для всіх ν справедлива нерівність $\cos q\beta_\nu > 0$, то

$$4T\left(r,f\right) \geq \frac{1}{q}\left(\frac{r^q}{|a_1|^q} - \frac{|a_1|^q}{r^q}\right)\cos q\beta_1,$$

звідки отримуємо

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{r^q} > 0.$$

■

Теорема 4. *Нехай $f\left(z\right)$ — ціла функція скінченного роду $q = q\left(f\right) \geq 1$, $f\left(0\right) = 1$ і $Re\dfrac{d^q}{dz^q}\ln f(z)\left.\right|_{z=0} < 0$. Якщо нулі функції f лежать на множині $\left\{z = re^{i\theta} : \cos q\theta \geq \varphi\left(r\right)\right\}$, причому:*

1) *$\varphi(r) \equiv 0$, коли $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{n(t,0,f)}{t^{q+1}}dt < \infty$;*
2) *$0 < \varphi(r) \leq 1$, φ — незростаюча, $\displaystyle\varliminf_{r\to\infty}\varphi(r)\int\limits_0^r \frac{n(t,0,f)}{t^{q+1}}dt = \infty$,*

коли $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{n(t,0,f)}{t^{q+1}}dt = \infty$, то

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{r^q} > 0.$$

□ *Доведення.* Розглянемо спочатку випадок, коли нулі $\{a_\nu\}$ функції f задовольняють умову

$$\sum_\nu \frac{1}{|a_\nu|^q} < \infty. \tag{3}$$

Тоді на підставі теореми Адамара [1, с. 80]

$$f\left(z\right) = e^{P(z)}\prod_\nu E(\frac{z}{a_\nu},p),$$

де $\displaystyle\prod_\nu E(\frac{z}{a_\nu},p)$ — канонічний добуток Вейєрштрасса, рід p якого завдяки (3) щонайбільше $q-1$, а $P\left(z\right)$ — многочлен степеня q, оскільки рід функції f дорівнює q.

Відомо [1, с. 79], що для характеристики Неванлінни канонічного добутку Вейєрштрасса $g\left(z\right)$ роду p виконується рівність $T\left(r,g\right) = o\left(r^{p+1}\right)$, $r \to \infty$. Використовуючи попередню рівність і відомі співвідношення між характеристиками Неванлінни [1, с. 45], отримаємо

$$T\left(r,f\right) = T\left(r, e^{P(z)}\right) + o\left(r^q\right),\ r\to\infty.$$

Оскільки $T\left(r,e^{P(z)}\right) \sim \dfrac{|a_q|}{\pi}r^q$, $r\to\infty$, де a_q — коефіцієнт при найстаршому степені многочлена $P\left(z\right)$, q — степінь цього многочлена, то

$$T\left(r,f\right) = \frac{|a_q|}{\pi}r^q + o\left(r^q\right),\ r\to\infty,$$

звідки

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{r^q} = \frac{|a_q|}{\pi} > 0.$$

Розглянемо тепер випадок, коли

$$\sum_\nu \frac{1}{|a_\nu|^q} = \infty.$$

З нерівності (2) та умови 2) випливає, що

$$4T\left(r,f\right) \geq A_q r^q + \frac{1}{q}\varphi(r)\sum_{|a_\nu|\leq r}\left(\frac{r^q}{|a_\nu|^q} - \frac{|a_\nu|^q}{r^q}\right).$$

Перетворимо останню суму так:

$$\sum_{|a_\nu|\leq r}\left(\frac{r^q}{|a_\nu|^q} - \frac{|a_\nu|^q}{r^q}\right) =$$

$$= r^q\int\limits_0^r \frac{dn\left(t,0,f\right)}{t^q} - \frac{1}{r^q}\int\limits_0^r t^q dn\left(t,0,f\right) =$$

$$= qr^q\int\limits_0^r \frac{n\left(t,0,f\right)}{t^{q+1}}dt + \frac{q}{r^q}\int\limits_0^r t^{q-1}n\left(t,0,f\right)dt.$$

Тоді

$$4T(r,f) \geq A_q r^q + r^q\varphi(r)\int\limits_0^r \frac{n(t,0,f)}{t^{q+1}}dt.$$

Оскільки ряд $\displaystyle\sum_\nu \frac{1}{|a_\nu|^q}$ — розбіжний, то розбіжний також інтеграл $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{n(t,0,f)}{t^{q+1}}dt$. Тому, використовуючи умову 2), маємо

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{r^q} = \infty,$$

що завершує доведення теореми. ■

Наслідок 2. Якщо функція f задовольняє умови теорем 3 чи 4, то $q \leq \lambda(f) \leq \rho(f) \leq +1$.

Література

[1] Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.

[2] A. Edrei, W.H.I. Fuchs. On the growth of meromorphic functions with several deficient values // Trans. Amer. Math. Soc., 93, 1959, 292–328.

[3] Kobayashi T. On the lower order of an entire function // Kodai Math. Semin. Repts., 27, 1976, 484-495.

[4] Веселовська О.В. Про нижній порядок цілої функції // Вісник Львів. у-ту. Сер.мех.-мат., 1982. – Вип. 20. – С. 17–21.

[5] Nevanlinna F. Bemerkungen zur Theorie der ganzen Funktionen endlicher Ordnung // Soc. Sci. Fenn. Comment. Phys. – Math., 2, 1923, 1–7.

[6] О РОСТЕ ЦЕЛЫХ В ПЛОСКОСТИ ФУНКЦИЙ СО СПЕЦИАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ НУЛЕЙ

О.В. Веселовска

Национальный университет “Львивська политехника”,
ул. С. Бандеры, 12, г. Львов, 79013, Украина

Изучается влияние распределения нулей целой в плоскости функции на регулярность ее роста.

Ключевые слова: целая функция, порядок, род функции, неванлинновская характеристика.

2000 MSC: 35G30

УДК: 511.2, 517.946

ON THE GROWTH OF ENTIRE FUNCTIONS IN THE PLANE WITH THE SPECIAL DISTRIBUTION OF ZEROS

O.V. Veselovska

National University “Lvivska Politechnika”
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

The present paper is devoted to investigation of influence of zeros distribution of an entire function in the plane on the regularity of its growth.

Keywords: entire function, order, genus of function, Nevanlinna characteristic.

2000 MSC: 30D20

УДК: 517.547.28