ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.687 № 687, (2010) с. 24–28

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.687 No 687, (2010) 24–28

ПРО РЕЗОЛЬВЕНТНУ ПОРІВНЯНІСТЬ ДВОХ ДИСИПАТИВНИХ ЗБУРЕНЬ СИМЕТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА

О.Я. Мильо, О.Г. Сторож, О.Б. Шувар

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, 79001, Львів, Україна

(Отримано 28 грудня 2009 р.)

Пам'яті нашого вчителя – Владислава Елійовича Лянце.

У статті значення висхідного об'єкта виконує замкнений лінійний оператор L_0, що діє у гільбертовому просторі H. Розглядаються два збурення оператора L_0, які змінюють його область визначення. У термінах абстрактних крайових операторів, встановлено умови, які гарантують максимальну дисипативність збурених операторів, а також умови, достатні для того, щоб різниця резольвент збурених операторів була компактним оператором.

Ключові слова: гільбертів простір, оператор, дисипативний, компактний, резольвента

2000 MSC: 2000: Primary 47B25. Secondary 47A10

УДК: 513.88

Вступ

У цій статті під H розуміємо фіксований комплексний гільбертів простір зі скалярним добутком $(.|.)$, під $D(T)$, $R(T)$, $\ker T$ – відповідно область визначення, область значень та многовид нулів (лінійного) оператора T, а під $\mathcal{C}(H)$ – клас замкнених щільно визначених лінійних операторів $T : H \to H$. Нагадаємо (див., наприклад, [1, с. 152]), що оператор $T \in \mathcal{C}(H)$ називається дисипативним (акумулятивним), якщо для будь-якого $y \in D(T)$ $\operatorname{Im}(Ty|y) \geq 0$ (≤ 0) і максимально дисипативним (максимально акумулятивним), якщо, крім того, він не має в H нетривіальних дисипативних (акумулятивних) розширень.

Відомо (див., наприклад, [2, с. 345]), що $T \in \mathcal{C}(H)$ є максимально дисипативним тоді і тільки тоді, коли T є генератором стискуючої півгрупи класу (C_0), тому природно постає задача про встановлення умов максимальної дисипативності того чи іншого оператора (див. [1] та цитовану там літературу).

Ця стаття є продовженням праць авторів [3,4]. У ній (крім зазначених вище) використовуються такі позначення: $\mathcal{B}(X,Y)$ (де X, Y – гільбертові простори) – сукупність лінійних неперервних операторів $A : X \to Y$ таких, що $D(A) = X$; $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X,X)$; $A \downarrow E$ – звуження оператора A на множину E; $\mathbf{1}_X$ – тотожне перетворення простору X, $(.|.)_X$ та $\|.\|_X$ – символи скалярного добутку та породженої ним норми у гільбертовому просторі X, $\mathcal{B}_\infty(X)$ – ідеал компактних операторів з $\mathcal{B}(X)$; T^* – оператор, спряжений з оператором T, $\rho(T)$ – резольвентна множина оператора T, $D[T]$(де $T \in \mathcal{C}(H)$) – многовид $D(T)$, трактований як гільбертів простір зі скалярним добутком $(y|z)_T = (y|z) + (Ty|Tz)$. Якщо $A_i : X \to Y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ – лінійні оператори, то запис $A = A_1 \oplus \oplus \ldots \oplus A_n$ означає, що $(\forall x \in X)$ $Ax = (A_1x, \ldots, A_nx)$.

I. Попередні відомості та постановка задачі

Уточнюючи наведене в анотації, зазначимо, що значення висхідного об'єкта у цій статті виконує симетричний оператор $L_0 \in \mathcal{C}(H)$ з індексом дефекту (m_+, m_-). Крім того, вважаємо, що $L \overset{\text{def}}{=} L_0^*$, $(G^+, G^-, \delta_+, \delta_-)$ – фіксований антисиметричний простір граничних значень оператора L_0, причому δ_+ та δ_- мають нульові L-межі.

Нагадаємо (див. [5, с. 241]), що L-межею оператора $N \in \mathcal{B}(D[L], X)$, де X – банахів простір, називають число

$$\inf\{b \in (0, +\infty) : (\exists a \in (0, +\infty))(\forall y \in D(L))$$

$$\| Ny \|_X \leq a\|y\|_H + b\|Ly\|_H\}.$$

Далі, якщо G – гільбертів простір, а $\delta \in \mathcal{B}(D[L], G)$, то кажуть, що (G, δ) – крайова пара для (L, L_0), якщо

$$R(\delta) = G, \ker \delta = D(L_0)$$

(деталі – див. [6, с. 156]).

Нарешті, фраза "$(G^+, G^-, \delta_+, \delta_-)$ – антисиметричний простір граничних значень оператора L_0" означає, що $\dim G^\pm = m_\pm$, $(G^+ \oplus G^-, \delta_+ \oplus \delta_-)$ – крайова пара для (L, L_0) і

$$\forall y, z \in D(L) \quad (Ly|z) - (y|Lz) =$$

$$= i[(\delta_+ y|\delta_+ z)_{G_+} - (\delta_- y|\delta_- z)_{G_-}].$$

Існування такого об'єкта встановлено в [7].

Нехай, наприклад, $m_+ \leq m_-$, тобто $\dim G^+ \leq \leq \dim G^-$. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що $G^+ \subset G^-$ й тому мають місце представлення

$$G_- = G_0 \oplus G^+, \ \ \delta_- = \delta_0 \oplus \delta_1,$$

де $\delta_0 \in \mathcal{B}(D[L], G_0)$, $\delta_1 \in \mathcal{B}(D[L], G^+)$. Далі, нехай $\Phi \in \mathcal{B}(H, G^+)$, $K \in \mathcal{B}(G^+)$ – стиск, а

$\mathcal{K} = (\mathbf{1}_{G_+} + KK^*)^{-1}$. Визначимо оператор S за допомогою співвідношень

$$D(S) = \{y \in D(L) : \delta_0 y = 0, \delta_1 y - K\delta_+ y = \Phi y\}, \quad (1)$$

$$\forall y \in D(S) \quad Sy = Ly + i\Phi^*\mathcal{K}(\delta_1 y + K\delta_+ y), \quad (2)$$

які можна переписати у вигляді

$$D(S) = \{y \in D(L) : A_{11}\delta_- y + A_{12}\delta_+ y = C\Phi y\},$$

$$\forall y \in D(S) \quad Sy = Ly + \Phi^*(A_{21}\delta_- y + A_{22}\delta_+ y),$$

при

$$A_{11} = \mathbf{1}_{G^-} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{G_0} & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{G^+} \end{pmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ -K \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{G^+} \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & i\mathcal{K} \end{pmatrix}, \quad A_{22} = i\mathcal{K}K.$$

Оскільки

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{G_0} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{G^+} & -K \\ 0 & i\mathcal{K} & i\mathcal{K}K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathbf{1}_{G_0} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_{G^+} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1}_{G^+} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{G_0} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{G^+} & -i\mathcal{K} \\ 0 & -K^* & -iK^*\mathcal{K} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\mathbf{1}_{G^+} \\ 0 & -i\mathbf{1}_{G^+} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\mathbf{1}_{G_0} & 0 & 0 \\ 0 & KK^* - \mathbf{1}_{G^+} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{K}(KK^* - \mathbf{1}_{G^+})\mathcal{K} \end{pmatrix} \leq 0,$$

то з наслідку 6 праці [4] випливає, що, принаймні, у випадку, коли $A = (A_{ij})_{i,j=1}^2$ оборотний в $\mathcal{B}(G^- \oplus G^+)$, тобто коли $K^{-1} \in \mathcal{B}(G^+)$, оператор (1)-(2) є максимально дисипативним. Нижче доведено, що він є максимально дисипативним при будь-якому стиску $K \in \mathcal{B}(G^+)$. Крім того встановлено зв'язок між резольвентами двох операторів вигляду (1)–(2), зокрема знайдено умову, яка гарантує, що ці оператори є резольвентно порівнянними, тобто, що різниця їхніх резольвент – компактний оператор. Зауважимо, що критерій резольвентної порівняності двох максимально дисипативних розширень симетричного оператора (щоправда, з однаковими дефектними числами) встановлено в [8] (див. також [1, с. 170]).

Для спрощення викладень вважаємо, що $G_0 = \{0\}$, а, отже, $G^+ = G^- \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}$. Це припущення не спричиняє істотної втрати загальності, оскільки наведені нижче міркування можна поширити на ситуацію, коли $L = L_0^* \downarrow \ker \delta_0$.

Отже, співвідношення (1)–(2) набувають вигляду

$$D(S) = \{y \in D(L) : \delta_- y - K\delta_+ y = \Phi y\}, \quad (3)$$

$$\forall y \in D(S) \quad Sy = Ly + i\Phi^*\mathcal{K}(\delta_- y + K\delta_+ y). \quad (4)$$

Введемо також у розгляд оператори T, $\tilde{S}$, $\tilde{T}$, які визначимо так:

$$D(T) = \{z \in D(L) : \delta_+ z - K^*\delta_- z = -2K^*\mathcal{K}\Phi z\}, \quad (5)$$

$$\forall z \in D(T) \quad Tz = Lz + i\Phi^*(\delta_- z + \mathcal{K}\Phi z), \quad (6)$$

$$D(\tilde{S}) = D(L), \quad \forall y \in D(\tilde{S})$$

$$\tilde{S}y = Ly + i\Phi^*\mathcal{K}(2K\delta_+ y + \Phi y), \quad (7)$$

$$D(\tilde{T}) = D(L), \quad \forall z \in D(\tilde{T})$$

$$\tilde{T}y = Lz + i\Phi^*(\delta_- z + \mathcal{K}\Phi z). \quad (8)$$

II. Максимальна дисипативність оператора S

Лема 1. *Для будь-яких $y,\ z \in D(L)$*

$$(\tilde{S}y|z) - (y|\tilde{T}z) = i[(\delta_+ y|\delta_+ z - K^*\delta_- z + 2K^*\mathcal{K}\Phi z)_{\mathcal{H}} -$$

$$-(\delta_- y - K\delta_+ y - \Phi y|\delta_- z)_{\mathcal{H}}]. \quad (9)$$

□ *Доведення.* Нехай $y, z \in D(L)$. Тоді

$$(\tilde{S}y|z) - (y|\tilde{T}z) = i[(\delta_+ y|\delta_+ z)_{\mathcal{H}} - (\delta_- y|\delta_- z)_{\mathcal{H}}] +$$

$$+i[(2\mathcal{K}Ky|\Phi z)_{\mathcal{H}} + (\mathcal{K}\Phi y|\Phi z)_{\mathcal{H}} + i(\Phi y|\delta_- z)_{\mathcal{H}} - (\Phi y|\mathcal{K}\Phi z)_{\mathcal{H}}] =$$

$$= i[(\delta_+ y|\delta_- z - K^*\delta_- z)_{\mathcal{H}} - (\delta_- y - K\delta_+ y|\delta_- z)_{\mathcal{H}} +$$

$$+(\delta_+ y|2K^*\mathcal{K}\Phi z)_{\mathcal{H}} + (\Phi y|\delta_- z)_{\mathcal{H}}],$$

тобто справджується (9).

Визначимо оператори S_0, T_0 за допомогою співвідношень

$$D(S_0) = \{y \in D(S) : \delta_+ y = 0\}, \quad S_0 \subset S, \quad (10)$$

$$D(T_0) = \{z \in D(T) : \delta_- z = 0\}, \quad T_0 \subset T. \quad (11)$$

З результатів, викладених в [4], випливає, що S, T, $\tilde{S}$, $\tilde{T}$, S_0, T_0 є замкненими і щільно визначеними. Крім того зрозуміло, що $S_0 \subset S \subset \tilde{S}$, $T_0 \subset T \subset \tilde{T}$.■

Лема 2. *а) $(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \delta_+ \oplus (\delta_- - K\delta_+ - \Phi))$ – крайова пара для $(\tilde{S}, S_0)$,*

б) $(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \delta_- \oplus (\delta_+ - K^*\delta_- + 2K^*\mathcal{K}\Phi))$ – крайова пара для $(\tilde{T}, T_0)$,

в) $S_0^* = \tilde{T}$, $T_0^* = S$,

г) $S^* = T$.

□ *Доведення.* Оскільки $(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \delta_+ \oplus \oplus(\delta_- - K\delta_+))$ – крайова пара для (L, L_0), то за лемою 3.2.1 і теоремою 3.2.1 праці [9] (див. також [4]) маємо: $\delta_+, \delta_- \in \mathcal{B}(D[\tilde{S}], \mathcal{H})$,

$$R(\delta_+ \oplus (\delta_- - K\delta_+ - \Phi)) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}. \quad (12)$$

Крім того, з означення оператора S_0 випливає, що $\ker(\delta_+ \oplus (\delta_- - K\delta_+ - \Phi)) = D(S_0)$, а, отже, й правильність твердження а). Твердження б) доводимо аналогічно.

Далі, беручи до уваги (9), бачимо, що $\tilde{T} \subset S_0^*$, $\tilde{S} \subset T_0^*$. Крім цього, як легко бачити, $D(S_0^*) \subset D(L)$, $D(T_0^*) \subset D(L)$(деталі – див. [4,6]). Отже, твердження в) доведено.

Правильність твердження г) випливає з (9) та (12).■

Теорема 1. *Якщо* $\| K \| \leq 1$, *то оператор* S, *визначений згідно з (3)–(4), є максимально дисипативним.*

$\square$ *Доведення.* Враховуючи результати праць [10, 11] та леми 2, бачимо: досить довести, що оператор S є дисипативним, а оператор T – акумулятивним. Переконаємось у цьому.

а) $\forall y \in D(S)$

$$2Im(Sy|y) = 2Im(Ly|y) +$$
$$+2Im(i\mathcal{K}(\delta_- y - K\delta_+ y)|\Phi y)_{\mathcal{H}} =$$
$$= (\delta_+ y|\delta_+ y)_{\mathcal{H}} - (\delta_- y|\delta_- y)_{\mathcal{H}} + 2Re(\mathcal{K}(\delta_- y - K\delta_+ y)|\Phi y)_{\mathcal{H}} =$$
$$= (\delta_+ y|\delta_+ y)_{\mathcal{H}} - (\delta_- y|\delta_- y)_{\mathcal{H}} +$$
$$+(\mathcal{K}(\delta_- y - K\delta_+ y)|\delta_- y - K\delta_+ y)_{\mathcal{H}} +$$
$$+(\delta_- y - K\delta_+ y|\mathcal{K}(\delta_- y - K\delta_+ y))_{\mathcal{H}} =$$
$$= (\delta_+ y|\delta_+ y)_{\mathcal{H}} - (\delta_- y|\delta_- y)_{\mathcal{H}} + 2(\mathcal{K}\delta_- y|\delta_- y)_{\mathcal{H}} -$$
$$-2(\mathcal{K}K\delta_+ y|K\delta_+ y)_{\mathcal{H}} - (\mathcal{K}\delta_- y|K\delta_+ y)_{\mathcal{H}} + (\mathcal{K}K\delta_+ y|\delta_- y)_{\mathcal{H}} +$$
$$+(\delta_- y|\mathcal{K}K\delta_+ y)_{\mathcal{H}} - (K\delta_+ y|\mathcal{K}\delta_- y)_{\mathcal{H}} =$$
$$= ((\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - 2K^*\mathcal{K}K)\delta_+ y|\delta_+ y)_{\mathcal{H}} + ((2\mathcal{K} - \mathbf{1}_{\mathcal{H}})\delta_- y|\delta_- y)_{\mathcal{H}}.$$

Оскільки, як свідчить безпосередня перевірка,

$$K^*\mathcal{K} = (\mathbf{1}_{\mathcal{H}} + K^*K)^{-1}K^*,$$

то

$$\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - 2K^*\mathcal{K}K = \mathbf{1}_{\mathcal{H}} - 2(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} + K^*K)^{-1}K^*K =$$
$$= (\mathbf{1}_{\mathcal{H}} + K^*K)^{-1}(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - K^*K) =$$
$$= (\mathbf{1}_{\mathcal{H}} + K^*K)^{-1}(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - (K^*K)^2)(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} + K^*K)^{-1} \geq 0.$$

Крім того,

$$2\mathcal{K} - \mathbf{1}_{\mathcal{H}} = (\mathbf{1}_{\mathcal{H}} + K^*K)^{-1} - \mathbf{1}_{\mathcal{H}} =$$
$$= (\mathbf{1}_{\mathcal{H}} + K^*K)^{-1}(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - K^*K) =$$
$$= (\mathbf{1}_{\mathcal{H}} + K^*K)^{-1}(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - (K^*K)^2)(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} + K^*K)^{-1} \geq 0.$$

Тому S – дисипативний оператор.

б) $\forall z \in D(T)$

$$2Im(Tz|z) = (1/i)[(Lz|z) - (z|Lz)] +$$
$$+2Im(i(\delta_- z\mathcal{K}\Phi z)|\Phi z)_{\mathcal{H}} =$$
$$= (\delta_+ z|\delta_+ z)_{\mathcal{H}} - (\delta_- z|\delta_- z)_{\mathcal{H}} + (\delta_- z - \mathcal{K}\Phi z|\Phi z)_{\mathcal{H}} +$$
$$+(\Phi z|\delta_- z - \mathcal{K}\Phi z)_{\mathcal{H}} =$$
$$= (K^*\delta_- z - 2K^*\mathcal{K}\Phi z|K^*\delta_- z - 2K^*\mathcal{K}\Phi z)_{\mathcal{H}} - (\delta_- z|\delta_- z)_{\mathcal{H}} +$$
$$+(\delta_- z - \mathcal{K}\Phi z|\Phi z)_{\mathcal{H}} + (\Phi z|\delta_- z - \mathcal{K}\Phi z)_{\mathcal{H}} =$$
$$= (KK^*\delta_- z|\delta_- z)_{\mathcal{H}} - 2(KK^*\mathcal{K}\Phi\delta_- z|\delta_- z)_{\mathcal{H}} +$$
$$+4(\mathcal{K}KK^*\mathcal{K}\Phi\delta_- z|\Phi z)_{\mathcal{H}} - (\delta_- z|\delta_- z)_{\mathcal{H}} -$$
$$-(\mathcal{K}\Phi z|\Phi z)_{\mathcal{H}} + (\delta_- z|\Phi z)_{\mathcal{H}} + (\Phi z|\delta_- z)_{\mathcal{H}} =$$

$$= -\left(\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{\mathcal{H}} - KK^* & 2KK^*\mathcal{K} - \mathbf{1}_{\mathcal{H}} \\ 2KK^*\mathcal{K} - \mathbf{1}_{\mathcal{H}} & 2(\mathcal{K}2\mathcal{K}KK^*K) \end{pmatrix} \times \right.$$
$$\left. \times \begin{pmatrix} \delta_- z \\ \Phi z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \delta_- z \\ \Phi z \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} =$$
$$= -\left(\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{\mathcal{H}} - KK^* & \mathbf{1}_{\mathcal{H}} - 2\mathcal{K} \\ \mathbf{1}_{\mathcal{H}} - 2\mathcal{K} & 2(2\mathcal{K}^2 - \mathcal{K}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_- z \\ \Phi z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \delta_- z \\ \Phi z \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}.$$

Як показують прямі обчислення,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{\mathcal{H}} - KK^* & \mathbf{1}_{\mathcal{H}} - 2\mathcal{K} \\ \mathbf{1}_{\mathcal{H}} - 2\mathcal{K} & 2(2\mathcal{K}^2 - \mathcal{K}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & \mathcal{K} \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} \tilde{K} & -\tilde{K} \\ -\tilde{K} & 2\tilde{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & \mathcal{K} \end{pmatrix},$$

де $\tilde{K} = \mathbf{1}_{\mathcal{H}} - KK^*$. Оскільки оператор $\begin{pmatrix} \tilde{K} & -\tilde{K} \\ -\tilde{K} & 2\tilde{K} \end{pmatrix}$ є невід'ємним, то T – акумулятивний оператор. Теорему доведено. $\blacksquare$

III. Зв'язок між резольвентами розглядуваних операторів

Нехай $K_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, причому $\| K_i \| \leq 1$ $(i = 1, 2)$. Позначимо через S_i оператор, який визначається за допомогою співвідношень типу (3)–(4), якщо в них взяти $K = K_i$, $\mathcal{K} = \mathcal{K}_i \overset{\text{def}}{=} (\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - K_iK_i^*)_{-1}$. З метою спрощення записувань введемо позначення:

$$\Delta_1 = i\delta_+, \quad \Delta_2 = i(\delta_- - K_1\delta_+ - \Phi),$$
$$\tilde{\Delta_1} = \delta_-, \quad \tilde{\Delta_2} = \delta_+ - K_1^*\delta_- + 2K_1^*K_1\Phi.$$

Домовимось розуміти під $\tilde{S}_i$ та $\tilde{T}_i$ оператори, що визначаються співвідношенмми (7) та відповідно (8) при $K = K_i$, $\mathcal{K} = \mathcal{K}_i$. Очевидно, що

$$D(S_1) = \{y \in D(\tilde{S}_1) : \Delta_2 y = 0\}, S_1 \subset \tilde{S}_1$$
$$\forall y \in D(\tilde{S}_1),\ \forall z \in D(\tilde{T}_1)\ \ (\tilde{S}_1 y|z) - (y|\tilde{T}_1 z) =$$
$$= (\Delta_1 y|\tilde{\Delta_2} z)_{\mathcal{H}} - (\Delta_2 y|\tilde{\Delta_1} z)_{\mathcal{H}}. \tag{13}$$

(див. (9)). Нехай

$$S_\lambda \overset{\text{def}}{=} (S_1 - \lambda\mathbf{1}_H)^{-1}, N_\lambda \overset{\text{def}}{=} (\Delta_1 S_\lambda^*)^*, M(\lambda) = \Delta_1 N_\lambda. \tag{14}$$

Оскільки S_1 є максимально дисипативним, то ці оператори коректно визначені принаймні в ситуації, коли $\operatorname{Im}\lambda < 0$. Крім того, з результатів, викладених в [6, с. 199-202], випливає, що

$$R(N_\lambda) = \ker(S_1 - \lambda\mathbf{1}_H), \Delta_2 N_\lambda = \mathbf{1}_H, M(\lambda) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \tag{15}$$

Перш, ніж переходити до формулювання основного результату позначимо

$$K_0 \overset{\text{def}}{=} K_1 - K_2, F \overset{\text{def}}{=} 2(\mathcal{K}_2K_2 - \mathcal{K}_1K_1)\Delta_1 + i(\mathcal{K}_2 - \mathcal{K}_1)\Phi. \tag{16}$$

Як свідчать безпосередні обчислення,

$$\forall y \in D(\tilde{S}_2) = D(L) \quad \tilde{S}_2 y = \tilde{S}_1 y + \Phi^* F y, \tag{17}$$

$$D(S_2) = \{y \in D(\tilde{S}_2 :\ K_0\Delta_1 y + \Delta_2 y = 0\}, S_2 \subset \tilde{S}_2. \tag{18}$$

Теорема 1. *Нехай $Im\lambda < 0$ (а отже, $\lambda \in \rho(S_1) \cap \rho(S_2)$),*

$$Q_\lambda \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} K_0 M(\lambda) & K_0\Delta_1 S_\lambda \Phi^* \\ FN_\lambda & FS_\lambda \Phi^* \end{pmatrix}.$$

Якщо $(\mathbf{1}_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} + Q(\lambda))^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$, то для будь-якого $f \in H$

$$(S_2 - \lambda \mathbf{1}_H)^{-1} f = S_\lambda f - (N_\lambda, S_\lambda \Phi^*)(\mathbf{1}_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} + Q(\lambda))^{-1} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} K_0 \Delta_1 S_\lambda f \\ FS_\lambda f \end{pmatrix}. \qquad (19)$$

□ *Доведення.* Нехай $S_2 y - \lambda y = f$, а отже, (див. (17)–(18)) $S_1 y - \lambda y = f - \Phi^* F y$.

Приймемо

$$Fy = -b. \qquad (20)$$

З (15) випливає, що існує $a \in \mathcal{H}$ таке, що

$$y = S_\lambda f + N_\lambda a + S_\lambda \Phi^* b. \qquad (21)$$

Підставляючи (21) у (18), (20) та беручи до уваги (14), (15), отримуємо:

$$(\mathbf{1}_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} + Q(\lambda)) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} K_0 \Delta_1 S_\lambda f \\ FS_\lambda f \end{pmatrix}. \qquad (22)$$

Отже, (19) випливає безпосередньо з (20) та (22).■

Теорема 2. *Якщо $K_1 - K_2 \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$, а $Im\lambda < 0$, то $(\mathbf{1}_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} + Q(\lambda))^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$, а $(S_2 - \lambda \mathbf{1}_H)^{-1} - S_\lambda \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$.*

□ *Доведення.* Нехай $K_1 - K_2$, а отже, й $K_1 K_1^* - K_2 K_2^*$ – компактний оператор. Тоді

$$\begin{cases} K_1 - K_2 = \mathcal{K}_2(K_1 K_1^* - K_2 K_2^*)\mathcal{K}_1 \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H}), \\ \mathcal{K}_2 K_2 - \mathcal{K}_1 K_1 = \mathcal{K}_2(K_2 - K_1) + \\ +(\mathcal{K}_2 - \mathcal{K}_1) K_1 \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H}). \end{cases} \qquad (23)$$

Звідси і з того, що $\Delta_1 S_\lambda \in \mathcal{B}(H, \mathcal{H})$ (див. доведення леми 2), випливає, що

$$Q(\lambda) \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}); \quad K_0 \Delta_1 S_\lambda, \quad FS_\lambda \in \mathcal{B}_\infty(H, \mathcal{H}). \qquad (24)$$

Припустимо, що $(\mathbf{1}_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} + Q(\lambda)) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, тобто

$$\begin{cases} a + K_0 M(\lambda) a + K_0 \Delta_1 S_\lambda \Phi^* b = 0, \\ FN_\lambda a + b + FS_\lambda \Phi^* b = 0. \end{cases} \qquad (25)$$

Приймемо

$$y = N_\lambda a + S_\lambda \Phi^* b. \qquad (26)$$

З (25), (26) видно, що

$$\tilde{S}_2 y - \lambda y = \tilde{S}_1 y - \lambda y + \Phi^* F y = (\tilde{S}_1 - \lambda \mathbf{1}_H)(N_\lambda a + S_\lambda \Phi^* b) +$$

$$+ \Phi^* F (N_\lambda a + S_\lambda \Phi^* b) = \Phi^* b + \Phi^* F N_\lambda a + \Phi^* F S_\lambda \Phi^* b =$$

$$= \Phi^*(FN_\lambda a + b + FS_\lambda \Phi^* b) = 0,$$

$$K_0 \Delta_1 y + \Delta_2 y = K_0 M(\lambda) a + K_0 \Delta_1 S_\lambda \Phi^* b + a = 0$$

(див. також (14)-(15)). Отже, $y \in D(S_2)$, $S_2 y = \lambda y$. Оскільки $\lambda \in \rho(S_2)$, то $y = 0$, а отже, й $a = \Delta_2 y = 0$. Крім того, $\Phi^* b = 0$. Беручи до уваги другу з рівностей (25), бачимо, що $b = 0$, тобто $\ker(\mathbf{1}_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} + Q(\lambda)) = \{0\}$. Тому справедливість теореми випливає з (24).■

Висновки

У статті (в термінах абстрактних крайових операторів) встановлено умови, які гарантують, що різниця резольвент двох максимально дисипативних збурень симетричного оператора з довільним індексом дефекту є компактним оператором.

Література

[1] Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – К.: Наук. думка, 1984. – 283 с.

[2] Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.

[3] Mylyo O.Ya., Storozh O.G. Selfadjointness and maximal dissipativeness conditions for a class of finite-dimensional perturbations of a positively definite operator // Математ.студії. – 1997. – Т. 7, 1. – С. 97–102

[4] Сторож О.Г., Шувар О.Б. Умови максимальної дисипативності майже обмежених збурень гладких звужень операторів, спряжених з симетричними // Укр.мат.журн. – 2004. – 55, № 7. – С. 966–976.

[5] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.

[6] Лянце В.Э., Сторож О.Г. Методы теории неограниченных операторов. – К.: Наук. думка, 1983. – 212 с.

[7] Сторож О.Г. О расширениях симметрических операторов с неравными дефектными числами // Мат.заметки. – 1984. – 36, № 5. – С. 791–796.

[8] Брук В.М. О расширениях симметрических отношений // Мат. заметки. – 1977. – 22, № 6. – С. 825–834.

[9] Шувар О.Б. Диференціально-граничні оператори в просторах вектор-функцій: Дис. .. канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 2003. – 139 с.

[10] Филлипс Р.С. Диссипативные операторы и гиперболические системы дифференциальных уравнений в частных производных // Математика. – 1962. – 6, 4. – С. 11–70.

[11] Штраус А.В. О расширениях и характеристической функции симметрического оператора // Изв. АН СССР. Сер.мат. – 1968. – 32, 1. – С. 186–207.

О РЕЗОЛЬВЕНТНОЙ СРАВНИМОСТИ ДВУХ ДИССИПАТИВНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ СИММЕТРИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

О.Я. Мыльо, О.Г. Сторож, О.Б. Шувар

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, 79001, Львов Украина

Памяти нашего учителя – Владислава Элиевича Лянце.

В статье роль исходного объекта исполняет унитарный линейный оператор L_0, действующий в гильбертовом пространстве H. Рассматриваются два возмущения оператора L_0, изменяющие его область определения. В терминах абстрактных граничных операторов получены условия, гарантирующие максимальную диссипативность возмущенных операторов, а также условия, достаточные для того, чтобы разность резольвент возмущенных операторов была компактным оператором.

Ключевые слова: гильбертово пространство, оператор диссипативный, компактный, резольвента.

2000 MSC: Primary 47B25. Secondary 47A10

УДК: 513.88

ON RESOLVENT COMPARENESS OF TWO DISSIPATIVE PERTURBATIONS OF A SYMMETRIC OPERATOR

O.Ya. Myl'o, O.G. Storozh, O.B. Shuvar

Ivan Franko National University of Lviv
1 Universytetska Str., 79001, Lviv, Ukraine

The role of initial object in this paper playes a closed linear symmetric operator L_0 acting in a Hilbert space H. Two perturbations of L_0 chaining its domain are considered. In the terms of abstract boundary operators, the conditions guaranteeing the maximal dissipativity of the perturbed operators and the conditions guaranteeing that the difference of perturbed operators is a compact one are established.

Keywords: Hilbert space, operator, dissipative, compact, resolvent

2000 MSC: 2000: Primary 47B25. Secondary 47A10

УДК: 513.88