ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.687 № 687, (2010) c. 59–72

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.687 No 687, (2010) 59–72

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКУ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ З ІНТЕГРАЛЬНИМ ЗБУРЕННЯМ

М.О. Нечепуренко, Г.Р. Торган

Львівський національний університет імені Івана Франка
79000, м. Львів, вул. Університетська, 1

(Отримано 23 червня 2010 р.)

Досліджено асимптотичну поведінку узагальненого розв'язку мішаної задачі для нелінійної системи рівнянь з інтегральним збуренням у необмеженій за часом області.

Ключові слова: мішана задача, нелінійна система, інтегральне збурення, асимптотична поведінка.

2000 MSC: 35M33, 35B40, 58D25

УДК: 517.95

Вступ

Досліджено асимптотичну поведінку розв'язку мішаної задачі для нелінійної системи рівнянь з інтегральним збуренням в необмеженій за часом області.

Схожі задачі в обмежених областях без інтегрального збурення розглядаються в працях [2], [4], [12]. У [2] досліджена асимптотична поведінка розв'язку мішаної задачі для нелінійної системи з термопружною в'язністю. Мішана задача для нелінійної системи зі змінними коефіцієнтами досліджена в [5], у ній також встановлено показникову поведінку розв'язку. Асимптотичну поведінку слабкого розв'язку напівлінійної системи термопружності досліджено в [11] та показано неіснування розв'язку.

Подібні задачі моделюють, наприклад, коливання струни при поперечній складовій напруженості [1], [15] і їх розглядали багато дослідників. Для обмеженої області деякі результати існування отримані в [6]–[10] у припущенні певної поведінки розв'язку, початкових даних та правої частини рівняння (системи) на нескінченності; а для необмеженої області подібна задача розглянута в працях [3], [9], в яких отримано умови існування локального узагальненого розв'язку в просторах локально інтегровних функцій.

Ця праця розвиває та узагальнює результати дослідження мішаної задачі в необмеженій за часом області, викладені в [4], [5] та [13], [14].

Основні результати

Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega \in C^1$, $n \in \mathbb{N}$; $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau)$, де $\tau \in [0,\infty)$; $\Omega_\tau = \Omega \times \{\tau\}$, $Q = \Omega \times (0,+\infty)$.

В області Q розглянемо мішану задачу для системи рівнянь

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\theta_{x_i} + a_0(x)u+$$
$$+ a_1(x)u_t + a_2(x)\theta - \left(\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2\, dx\right) \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}+$$
$$+ b_0(x)|u|^{p-2}u = f_1(x,t), \tag{1}$$
$$\theta_t - \sum_{i,j=1}^{n} (c_{ij}(x)\theta_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} (b_i(x)u_t)_{x_i} + c_0(x)|\theta|^{q-2}\theta+$$
$$+ c_1(x)u_t + c_2(x)\theta = f_2(x,t) \tag{2}$$

з початковими та крайовими умовами:

$$u(x,0) = u_0(x),\ \ u_t(x,0) = u_1(x),\ \ \theta(x,0) = \theta_0(x) \tag{3}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0,\ \ \theta\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{4}$$

Тут використовуватимемо $L^r((0,T);B)$, $C((0,T);B)$ ([18], c. 148, 154, 157), де $r \in [1,+\infty)$, B – деякий банахів простір; $H^k(\Omega)$, $H_0^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$; $W_0^{s,r}(\Omega)$, $s,r \in (1,+\infty)$ ([18], c. 44).

Через $L_{loc}^r((0,T);B)$, де $0 < T \leqslant +\infty$, позначаємо лінійний простір функцій $u : (0,T) \to B$ таких, що $L_{loc}^r((0,T_0);B)$, для довільного $T_0 < T$, $r \in [1,+\infty)$.

Вважатимемо, що $p > 2$, $q > 2$; u_0, u_1, $\theta_0 \in H_0^1(\Omega)$; $f_1(x,t)$, $f_2(x,t)$, $f_{1t}(x,t)$, $f_{2t}(x,t) \in L^2(Q)$.

Нехай коефіцієнти системи (1)–(2) задовольняють такі умови:

(H₁) $a_0,\ a_1,\ a_2 \in W^{1,\infty}(\Omega)$,
$a_0(x) \geqslant A_0 > 0$, $a_1(x) \geqslant A_1 > 0$ для майже всіх $x \in \Omega$;

(H₂) $b_{ij} \in W^{2,\infty}(\Omega)$, $i,j \in \{1,...,n\}$; b_i, $b_0 \in W^{1,\infty}(\Omega)$,
$\sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant B_2 \sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|^2$ для всіх $\xi_i \in \mathbb{R}$ і для майже всіх $x \in \Omega$, $B_2 > 0$,

$b_{ij}(x) = b_{ji}(x)$ для всіх $i, j \in \{1, ..., n\}$ і для майже всіх $x \in \Omega$,
$b_0(x) \geqslant B_0 > 0$ для майже всіх $x \in \Omega$;

($\mathbf{H_3}$) $c_{ij} \in W^{2,\infty}(\Omega)$, $i, j \in \{1, ..., n\}$; c_0, c_1, $c_2 \in W^{1,\infty}(\Omega)$,
$\sum\limits_{i,j=1}^{n} c_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant C^0 \sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|^2$ для всіх $\xi_i \in \mathbb{R}$ і для майже всіх $x \in \Omega$, $C^0 > 0$,
$c_{ij}(x) = c_{ji}(x)$ для всіх $i, j \in \{1, ..., n\}$ і для майже всіх $x \in \Omega$,
$c_0(x) \geqslant C_0 > 0$ для майже всіх $x \in \Omega$,
$c_2(x) \geqslant C_2 > 0$ для майже всіх $x \in \Omega$.

Означення 1. Узагальненим розв'язком задачі (1)–(4) назвемо пару функцій (u, θ) таких, що $u \in C([0,T); H_0^1(\Omega)) \cap L^p_{loc}((0,T); L^p(\Omega))$, $u_t \in L^\infty_{loc}((0,T); H_0^1(\Omega))$, $u_{tt} \in L^\infty_{loc}((0,T); L^2(\Omega))$, $\theta \in C([0,T); H_0^1(\Omega)) \cap L^q_{loc}((0,T); L^q(\Omega))$, $\theta_t \in L^\infty_{loc}((0,T); L^2(\Omega))$ для $T \leqslant +\infty$ і задовольняють початкові умови (3) та систему інтегральних рівностей

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \Bigg[u_{tt}v + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\theta_{x_i}v + a_0(x)uv +$$
$$+ a_1(x)u_tv + a_2(x)\theta v \Bigg] dx + \Bigg(\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 dx \Bigg) \times$$
$$\times \Bigg(\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}v_{x_i} dx \Bigg) + \int\limits_{\Omega_\tau} b_0(x)|u|^{p-2}uv dx =$$
$$= \int\limits_{\Omega_\tau} f_1(x,t)v\, dx,$$
$$\int\limits_{\Omega_\tau} \Bigg[\theta_t w + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(x)\theta_{x_i}w_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_t w_{x_i} +$$
$$+ c_0(x)|\theta|^{q-2}\theta w + c_1(x)u_t w + c_2(x)\theta w \Bigg] dx =$$
$$= \int\limits_{\Omega_\tau} f_2(x,t)w\, dx$$

для майже всіх $\tau \in (0,T)$ і всіх $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, $w \in H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega)$. Якщо $T < +\infty$, то такий розв'язок називатимемо локальним, а якщо $T = +\infty$, то – глобальним.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* ($\mathbf{H_1}$)-($\mathbf{H_3}$) *і, крім того, нехай* $2 < p \leqslant \dfrac{2(n-1)}{n-2}$ *при* $n > 2$ *і* $p > 2$ *при* $n \in \{1, 2\}$; $q > 2$; $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, $\theta_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^{2(q-1)}(\Omega)$, *тоді існує локальний узагальнений розв'язок задачі (1)–(4).*

□ *Доведення.* Для доведення існування розв'язку використаємо метод Фаедо-Гальоркіна. Оскільки простір $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \cap L^{2(q-1)}(\Omega)$ – сепарабельний банахів, то в ньому існує така зліченна множина $\{\omega^k\}$, що будь-яка скінченна кількість елементів цієї множини лінійно незалежна і замикання її лінійної оболонки в $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \cap L^{2(q-1)}(\Omega)$ збігається з цим простором. Можемо прийняти, що $\{\omega^k\}$ ортонормована в $L^2(\Omega)$.

Розглянемо функції $u^N(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k^N(t)\omega^k(x)$, $\theta^N(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} d_k^N(t)\omega^k(x)$, $N \in \mathbb{N}$, де $c_1^N, c_2^N, ..., c_N^N$, $d_1^N, d_2^N, ..., d_N^N$ – розв'язки відповідних задач Коші:

$$\int\limits_{\Omega} \Bigg[u_{tt}^N\omega^k + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)u_{x_i}^N\omega_{x_j}^k + a_0(x)u^N\omega^k +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\theta_{x_i}^N\omega^k + a_1(x)u_t^N\omega^k + a_2(x)\theta^N\omega^k +$$
$$+ b_0(x)|u^N|^{p-2}u^N\omega^k \Bigg] dx + \Bigg(\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^N|^2 dx \Bigg) \times$$
$$\times \Bigg(\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^N\omega_{x_i}^k dx \Bigg) = \int\limits_{\Omega} f_1(x,t)\omega^k\, dx,$$
$$\int\limits_{\Omega} \Bigg[\theta_t^N\omega^k + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(x)\theta_{x_i}^N\omega_{x_j}^k - \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_t^N\omega_{x_i}^k +$$
$$c_0(x)|\theta^N|^{q-2}\theta^N\omega^k + c_1(x)u_t^N\omega^k +$$
$$+ c_2(x)\theta^N\omega^k \Bigg] dx = \int\limits_{\Omega} f_2(x,t)\omega^k\, dx,\ t \geqslant 0, \tag{5}$$

$$c_k^N(0) = u_{0,k}^N,\ c_{kt}^N(0) = u_{1,k}^N,\ d_k^N(0) = \theta_{0,k}^N, \tag{6}$$

де $k \in \{1, ..., N\}$,

$$u_0^N(x) = \sum_{k=1}^{N} u_{0,k}^N\omega^k(x), \quad \|u_0^N - u_0\|_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} \to 0,$$
$$u_1^N(x) = \sum_{k=1}^{N} u_{1,k}^N\omega^k(x), \quad \|u_1^N - u_1\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0, \tag{7}$$
$$\theta_0^N(x) = \sum_{k=1}^{N} \theta_{0,k}^N\omega^k(x), \quad \|\theta_0^N - \theta_0\|_{H_0^1(\Omega)\cap L^{2q-2}(\Omega)} \to 0$$

при $N \to \infty$.

На підставі теореми Каратеодорі ([20], с. 54) існує абсолютно неперервний розв'язок $c_1^N, c_2^N, ..., c_N^N$, $d_1^N, d_2^N, ..., d_N^N$ задачі (5), (6), який визначений на проміжку $[0, t_N)$ і такий, що $c_{1t}^N, c_{2t}^N, ..., c_{Nt}^N$ абсолютно неперервні на $(0, t_N)$.

Домножимо перші рівняння системи (5) відповідно на c_{kt}^N, другі відповідно на d_k^N, $k \in \{1, ..., N\}$. Отримані рівності підсумуємо за k від 1 до N, проінтегруємо за t від 0 до τ, де $\tau \in (0, t_N)$, і додамо.

Одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[u^N_{tt}u^N_t+\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)u^N_{x_i}u^N_{tx_j}+a_0(x)u^Nu^N_t+$$
$$+a_1(x)|u^N_t|^2+a_2(x)\theta^Nu^N_t+\theta^N_t\theta^N+$$
$$+b_0(x)|u^N|^{p-2}u^Nu^N_t+\sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x)\theta^N_{x_i}\theta^N_{x_j}+$$
$$+c_0(x)|\theta^N|^q+c_1(x)u^N_t\theta^N+c_2(x)|\theta^N|^2\Bigg]dxdt+$$
$$+\int\limits_0^\tau\Bigg(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n|u^N_{x_i}|^2dx\Bigg)\times\Bigg(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n u^N_{x_i}u^N_{tx_i}dx\Bigg)dt=$$
$$=\int\limits_{Q_\tau}\Big[f_1(x,t)u^N_t+f_2(x,t)\theta^N\Big]dxdt. \tag{8}$$

Оцінимо доданки останньої рівності. Очевидно,

$$J_1:=\int\limits_{Q_\tau}\Big[u^N_{tt}u^N_t+\theta^N_t\theta^N\Big]dxdt=\frac12\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[|u^N_t|^2+$$
$$+|\theta^N|^2\Big]dx-\frac12\int\limits_{\Omega_0}\Big[|u^N_1|^2+|\theta^N_0|^2\Big]dx.$$

Згідно з умовою $(\mathbf{H_1})$

$$J_2:=\int\limits_{Q_\tau}a_0(x)u^Nu^N_tdxdt\geqslant-A_0\tau\int\limits_{\Omega_0}|u^N_0|^2dx-$$
$$-\frac{A_0(\tau^2+1)}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u^N_t|^2dxdt,$$

оскільки

$$u^2(x)\leqslant 2u^2(x,0)+2\Bigg(\int\limits_0^t u_\tau(x,\tau)d\tau\Bigg)^2\leqslant$$
$$\leqslant 2tu^2(x,0)+t^2\int\limits_0^t u^2_\tau(x,\tau)d\tau.$$

Далі

$$J_3:=\int\limits_{Q_\tau}a_1(x)|u^N_t|^2dxdt\geqslant A_1\int\limits_{Q_\tau}|u^N_t|^2dxdt;$$
$$J_4:=\int\limits_{Q_\tau}a_2(x)\theta^Nu^N_tdxdt\geqslant-\frac12\int\limits_{Q_\tau}|\theta^N|^2dxdt-$$
$$-\frac{A_2}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u^N_t|^2dxdt,\quad \text{де } A_2=\operatorname*{ess\,sup}_\Omega|a_2(x)|^2.$$

З умови $(\mathbf{H_2})$ маємо

$$J_5:=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)u^N_{x_i}u^N_{tx_j}dxdt\geqslant\frac{B_2}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n|u^N_{x_i}|^2dx-$$
$$-\frac{B_{2,0}+1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^n|u^N_{x_i}|^2dx,$$

де $B_{2,0}=\operatorname*{ess\,sup}_\Omega\sum_{i,j=1}^n|b_{ij}(x)|^2$;

$$J_6:=\int\limits_{Q_\tau}b_0(x)|u^N|^{p-2}u^Nu^N_tdxdt\geqslant\frac{B_0}{p}\int\limits_{\Omega_\tau}|u^N_t|^pdx-$$
$$-\frac{B_0}{p}\int\limits_{\Omega_0}|u^N_0|^pdxdt.$$

На підставі умови $(\mathbf{H_3})$

$$J_7:=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x)\theta^N_{x_i}\theta^N_{x_j}dxdt\geqslant C^0\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n|\theta^N_{x_i}|^2dxdt;$$
$$J_8:=\int\limits_{Q_\tau}c_0(x)|\theta^N|^qdxdt\geqslant C_0\int\limits_{Q_\tau}|\theta^N|^qdxdt;$$
$$J_9:=\int\limits_{Q_\tau}c_1(x)u^N_t\theta^Ndxdt\geqslant-\frac{C_1}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u^N_t|^2dxdt-$$
$$-\frac12\int\limits_{Q_\tau}|\theta^N|^2dxdt,$$

де $C_1=\operatorname*{ess\,sup}_\Omega|c_1(x)|^2$;

$$J_{10}:=\int\limits_{Q_\tau}c_2(x)|\theta^N|^2dxdt\geqslant C_2\int\limits_{Q_\tau}|\theta^N|^2dxdt.$$

Далі

$$J_{11}:=\int\limits_0^\tau\Bigg(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n u^N_{x_i}u^N_{tx_i}dx\Bigg)\times\Bigg(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n|u^N_{x_i}|^2dx\Bigg)dt=$$
$$=\frac14\Bigg(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n|u^N_{x_i}|^2dx\Bigg)^2-\frac14\Bigg(\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^n|u^N_{0x_i}|^2dx\Bigg)^2.$$

Згідно з умовами теореми

$$J_{12}:=\int\limits_{Q_\tau}f_1(x,t)u^N_tdxdt\leqslant\frac12\int\limits_{Q_\tau}|f_1(x,t)|^2dx+$$
$$+\frac12\int\limits_{Q_\tau}|u^N_t|^2dxdt,$$
$$J_{13}:=\int\limits_{Q_\tau}f_2(x,t)\theta^Ndxdt\leqslant\frac12\int\limits_{Q_\tau}|f_2(x,t)|^2dx+$$
$$+\frac12\int\limits_{Q_\tau}|\theta^N|^2dxdt.$$

Враховуючи оцінки інтегралів J_1-J_{13}, з (8) одержимо

$$\frac12\int\limits_{\Omega_\tau}\Bigg[|u^N_t|^2+|\theta^N|^2+B_2\sum_{i=1}^n|u^N_{x_i}|^2+\frac{2B_0}{p}|u^N|^p\Bigg]dx+$$
$$+\frac14\Bigg(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n|u^N_{x_i}|^2dx\Bigg)^2+\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[C^0\sum_{i=1}^n|\theta^N_{x_i}|^2+$$
$$+C_0|\theta^N|^q\Bigg]dxdt\leqslant\frac12\int\limits_{\Omega_0}\Big[|u^N_1|^2+|\theta^N_0|^2+2A_0\tau|u^N_0|^2+$$

$$+(B_{2,0}+1)\sum_{i=1}^{n}|u_{0x_i}^N|^2+\frac{2B_0}{p}|u_0^N|^p\Bigg]dx+$$
$$+\frac{1}{4}\Bigg(\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{n}|u_{0x_i}^N|^2dx\Bigg)^2+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}^N|^2+$$
$$+2(1-C_2)|\theta^N|^2+(A_2+A_0(\tau^2+1)+1+C_1-$$
$$-2A_1)|u_t^N|^2\Bigg]dxdt+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\Big[|f_1(x,t)|^2+|f_2(x,t)|^2\Big]\,dx.$$

Використавши для останної нерівності лему Гроуолла-Беллмана, одержимо

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Bigg[|u_t^N|^2+|\theta^N|^2+\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}^N|^2+|u^N|^p\Bigg]dx+$$
$$+\Bigg(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}^N|^2dx\Bigg)^2+\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\sum_{i=1}^{n}|\theta_{x_i}^N|^2+$$
$$+|\theta^N|^q\Bigg]dxdt\leqslant\mu_1, \tag{9}$$

де μ_1 – додатна стала, яка залежить від коефіцієнтів системи, початкових даних і τ.

З отриманих оцінок випливає, що $t_N=T_0$, де додатне число T_0 залежить від початкових даних задачі і коефіцієнтів системи рівнянь.

$$\begin{aligned}
&||u_t^N||_{L^\infty((0,T);L^2(\Omega))}\leqslant\mu_1,\\
&||u^N||_{L^\infty((0,T);H_0^1(\Omega)\cap L^p(\Omega))}\leqslant\mu_1,\\
&||\theta^N||_{L^\infty((0,T);L^2(\Omega))}\leqslant\mu_1,\\
&||\theta^N||_{L^2((0,T);H_0^1(\Omega))\cap L^q((0,T);L^q(\Omega))}\leqslant\mu_1.
\end{aligned}\tag{10}$$

Продиференціюємо систему (5) за t і після нескладних перетворень матимемо

$$\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[u_{ttt}^Nu_{tt}^N+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x)u_{tx_i}^Nu_{ttx_j}^N+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\theta_{x_it}^Nu_{tt}^N+$$
$$+a_0(x)u_t^Nu_{tt}^N+a_1(x)|u_{tt}^N|^2+a_2(x)\theta_t^Nu_{tt}^N+(p-1)\times$$
$$\times b_0(x)|u^N|^{p-2}u_t^Nu_{tt}^N+\theta_{tt}^N\theta_t^N+\sum_{i,j=1}^{n}c_{ij}(x)\theta_{tx_i}^N\theta_{tx_j}^N-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}b_i(x)u_{tt}^N\theta_{tx_i}^N+(q-1)c_0(x)|\theta^N|^{q-2}|\theta_t^N|^2+$$
$$+c_1(x)u_{tt}^N\theta_t^N+c_2(x)|\theta_t^N|^2\Bigg]dxdt+$$
$$+2\int\limits_0^\tau\Bigg(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^Nu_{tx_i}^Ndx\Bigg)\times\Bigg(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^Nu_{ttx_i}^Ndx\Bigg)dt+$$
$$+\int\limits_0^\tau\Bigg(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}^N|^2dx\Bigg)\times\Bigg(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^{n}u_{tx_i}^Nu_{ttx_i}^Ndx\Bigg)dt=$$
$$=\int\limits_{Q_\tau}\Big[f_{1t}(x,t)u_{tt}^N+f_{2t}(x,t)\theta_t^N\Big]dxdt. \tag{11}$$

Аналогічно до оцінок J_1-J_{13} маємо

$$J_{14}:=\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[u_{ttt}^Nu_{tt}^N+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x)u_{tx_i}^Nu_{ttx_j}^N+$$
$$+a_0(x)u_t^Nu_{tt}^N+a_1(x)|u_{tt}^N|^2+a_2(x)\theta_t^Nu_{tt}^N+\theta_{tt}^N\theta_t^N+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}c_{ij}(x)\theta_{tx_i}^N\theta_{tx_j}^N+c_1(x)u_{tt}^N\theta_t^N+c_2(x)|\theta_t^N|^2\Bigg]dxdt\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\Bigg[|u_{tt}^N|^2+|\theta_t^N|^2+B_2\sum_{i=1}^{n}|u_{tx_i}^N|^2\Bigg]dx-$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\Bigg[|u_{tt}^N(x,0)|^2+|\theta_t^N(x,0)|^2+(B_{2,0}+1)\times$$
$$\times\sum_{i=1}^{n}|u_{tx_i}^N|^2\Bigg]dx+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[2C^0\sum_{i=1}^{N}|\theta_{tx_i}^N|^2+|\theta^N|^2+$$
$$+2(C_2-1)|\theta_t^N|^2+(2A_1-A_0-A_2-C_1+1)|u_{tt}^N|^2-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}|u_{tx_i}^N|^2-A_0|u_t^N|^2\Bigg]dxdt+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[|f_{1t}(x,t)|^2+$$
$$+|f_{2t}(x,t)|^2\Bigg]\,dx.$$

Далі, використаємо узагальнену нерівність Гельдера для випадку $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{2}=1$. На підставі умов теореми на p, отримаємо такі неперервні вкладення:

- Якщо $n=1,2$ то $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^{p_1}(\Omega)$ для всіх $p_1>0$.
- Якщо $n\geqslant3$, то $p\leqslant\frac{2(n-1)}{n-2}$. Отже, $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^{p_1}(\Omega)$ для $p_1=\frac{2n}{n-2}$. Отже, оскільки $p_1\geqslant p$, то $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^p(\Omega)$, тоді з того, що $n(p-2)\leqslant p_1$ також випливає, що $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^{n(p-2)}(\Omega)$.

Використавши ці два пункти, отримаємо оцінку

$$J_{15}:=(p-1)\int\limits_{Q_\tau}b_0(x)|u^N|^{p-2}u_t^Nu_{tt}^N\,dx\,dt\leqslant(p-1)\times$$
$$\times B_{2,0}\int\limits_0^\tau\Bigg[\Bigg[\int_\Omega|u^N|^{(p-2)n}dx\Bigg]^{1/n}\Bigg[\int_\Omega|u_t^N|^{p_1}dx\Bigg]^{1/p_1}\times$$
$$\times\Bigg[\int_\Omega|u_{tt}^N|^2dx\Bigg]^{1/2}\Bigg]dt=(p-1)B_{2,0}\int\limits_0^\tau\Big[\|u^N\|_{(p-2)n}^{p-2}\times$$
$$\times\|u_t^N\|_{p_1}\|u_{tt}^N\|_2\Big]\,dt\leqslant K_0\int\limits_0^\tau\Big[\|u^N\|_{H_0^1(\Omega)}^{p-2}\times$$
$$\times\|u_t^N\|_{H_0^1(\Omega)}\times\|u_{tt}^N\|_2\Big]\,dt\leqslant\ K_1\int\limits_0^\tau\Big[\|u_t^N\|\times$$
$$\times|u_{tt}^N|\Big]\,dt\leqslant\frac{K_1}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u_t|^2\,dx\,dt+\frac{K_1}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u_{tt}|^2\,dx\,dt,$$

де K_0,K_1 – додатні сталі.

З умови $(\mathbf{H_3})$ маємо

$$J_{16} := \int\limits_{Q_\tau} (q-1)c_0(x)|\theta^N|^{q-2}|\theta_t^N|^2 dxdt \geqslant$$
$$\geqslant C_0(q-1)\int\limits_{Q_\tau} |\theta^N|^{q-2}|\theta_t^N|^2 dxdt.$$

Далі

$$J_{17} := 2\int\limits_0^\tau \left(\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n u_{x_i}^N u_{tx_i}^N dx\right)\times$$
$$\times\left(\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n u_{x_i}^N u_{ttx_i}^N dx\right)dt \geqslant \left(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n u_{x_i}^N u_{tx_i}^N dx\right)^2 -$$
$$-\left(\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^n u_{x_i}^N u_{tx_i}^N dx\right)^2 - \int\limits_0^\tau \left(\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2 dx\right)\times$$
$$\times\left(\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2 dx\right)dt - \int\limits_0^\tau \left(\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2 dx\right)^2 dt;$$

$$J_{18} := \int\limits_0^\tau \left(\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2 dx\right)\times$$
$$\times\left(\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n u_{tx_i}^N u_{ttx_i}^N dx\right)dt \geqslant \frac{1}{2}\left(\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2 dx\right)\times$$
$$\times\left(\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2 dx\right) - \frac{1}{2}\left(\int\limits_{\Omega_0} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2 dx\right)\times$$
$$\times\left(\int\limits_{\Omega_0} \sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2 dx\right) - \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\left(\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2 dx\right)\times$$
$$\times\left(\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2 dx\right)dt - \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau \left(\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2 dx\right)^2 dt.$$

Враховуючи оцінки інтегралів $J_{14} - J_{18}$, з (11) матимемо

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left[|u_{tt}^N|^2 + |\theta_t^N|^2 + 2B_2\sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2\right]dx +$$
$$+\left(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2 dx\right)\left(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2 dx\right)+$$
$$+2\left(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n u_{x_i}^N u_{tx_i}^N dx\right)^2 + 2\int\limits_{Q_\tau}\left[C^0\sum_{i=1}^n |\theta_{tx_i}^N|^2 +\right.$$
$$\left.+ C_0(q-1)|\theta^N|^{q-2}|\theta_t^N|^2\right]dxdt \leqslant \int\limits_{Q_\tau}\left[(A_2 + C_1 + K_1 +\right.$$
$$+ A_0 - 2A_1 + 1)|u_{tt}^N|^2 + (A_0 + K_1 + 1)|u_t^N|^2 +$$
$$\left.+ 2(2 - C_2)|\theta_t^N|^2 + |\theta^N|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2 + \sum_{i=1}^N |u_{tx_i}^N|^2\right]dxdt +$$
$$+\int\limits_{\Omega_0}\left[|u_{tt}^N|^2 + |\theta_t^N|^2 + B_{2,0}\sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2\right]dx +$$
$$+\left(\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2 dx\right)\times\left(\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2 dx\right)+$$
$$+2\left(\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^n u_{x_i}^N u_{tx_i}^N dx\right)^2 + 3\int\limits_0^\tau\left(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2 dx\right)\times$$
$$\times\left(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2 dx\right)dt + 3\int\limits_0^\tau\left(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2 dx\right)^2 dt +$$
$$+\int\limits_{Q_\tau}\left[|f_{1t}(x,t)|^2 + |f_{2t}(x,t)|^2\right]dx. \tag{12}$$

Оцінимо тепер $\int\limits_{\Omega_0}\left[|u_{tt}^N(x,0)|^2 + |\theta_t^N(x,0)|^2\right]dx$. Для цього домножимо перші рівняння системи (5) відповідно на $c_{ktt}^N(0)$, другі відповідно на $d_{kt}^N(0)$, $k \in \{1,...,N\}$. Отримані рівності підсумуємо за k від 1 до N і додамо. Одержимо рівність

$$\int\limits_{\Omega_0}\left[|u_{tt}^N(x,0)|^2 - \sum_{i,j=1}^n (b_{ij}(x)u_{0x_i}^N)_{x_j} u_{tt}^N(x,0) +\right.$$
$$+\sum_{i=1}^n b_i(x)\theta_{0x_i}^N u_{tt}^N(x,0) + a_0(x)u_0^N u_{tt}^N(x,0) +$$
$$+ a_2(x)\theta_0^N u_{tt}^N(x,0) + b_0(x)|u_0^N|^{p-2}u_0^N u_{tt}^N(x,0) +$$
$$+ |\theta_t^N(x,0)|^2 - \sum_{i,j=1}^n (c_{ij}(x)\theta_{0x_i}^N)_{x_j}\theta_t^N(x,0) +$$
$$+ a_1(x)u_1^N u_{tt}^N(x,0) + \sum_{i=1}^n (b_i(x)u_1^N)_{x_i}\theta_t^N(x,0) +$$
$$+ c_0(x)|\theta_0^N|^{q-2}\theta_0^N\theta_t^N(x,0) + c_1(x)u_1^N\theta_t^N(x,0) +$$
$$\left.+ c_2(x)\theta_0^N\theta_t^N(x,0)\right]dxdt - \left(\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^n |u_{0x_i}^N|^2 dx\right)\times$$
$$\times\left(\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^n u_{0x_ix_i}^N u_{tt}^N(x,0)dx\right) = \int\limits_{\Omega_0}\left[f_1(x,0)u_{tt}^N(x,0) +\right.$$
$$\left.+ f_2(x,0)\theta_t^N(x,0)\right]dx.$$

Оцінимо доданки останньої рівності

$$\int\limits_{\Omega_0}\left[|u_{tt}^N(x,0)|^2(1-4\delta) + |\theta_t^N(x,0)|^2(1-3\delta)\right]dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\delta}\int\limits_{\Omega_0}\left[\sum_{i,j=1}^n\left[(b_{ij}(x)u_{0x_i}^N)_{x_j}\right]^2 + \left[a_0(x)u_0^N\right]^2 +\right.$$
$$+\sum_{i=1}^n\left[b_i(x)\theta_{0x_i}^N\right]^2 + \left[a_1(x)u_1^N\right]^2 + \left[a_2(x)\theta_0^N\right]^2 +$$
$$+\left[b_0(x)|u_0^N|^{p-2}u_0^N\right]^2 + \sum_{i,j=1}^n\left[(c_{ij}(x)\theta_{0x_i}^N)_{x_j}\right]^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\Big[(b_i(x)u_1^N)_{x_i}\Big]^2+\Big[c_0(x)|\theta_0^N|^{q-2}\theta_0^N\Big]^2+$$
$$+\Big[c_1(x)u_1^N\Big]^2+\Big[c_2(x)\theta_0^N\Big]^2\Bigg]dxdt+$$
$$+\frac{1}{2\delta}\Big(\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{n}|u_{0x_i}^N|^2dx\Big)\Big(\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{n}|u_{0x_ix_i}^N|^2dx\Big)+$$
$$+\frac{1}{2\delta}\int\limits_{\Omega_0}\Big[|f_1(x,0)|^2+|f_2(x,0)|^2\Big]\,dx.$$

Отже, при $\delta<\dfrac{1}{4}$, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_0}\Big[|u_{tt}^N(x,0)|^2+|\theta_t^N(x,0)|^2\Big]dx\leqslant\mu_2,\ \ \mu_2>0.$$

Тоді до нерівності (12) застосуємо лему Гронуолла-Беллмана

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[|u_{tt}^N|^2+|\theta_t^N|^2+\sum_{i=1}^{n}|u_{tx_i}^N|^2\Big]dx+\Big(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}^N|^2dx\Big)\times$$
$$\times\Big(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u_{tx_i}^N|^2dx\Big)+\Big(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^Nu_{tx_i}^Ndx\Big)^2+$$
$$+\int\limits_{Q_\tau}\Big[|\theta^N|^{q-2}|\theta_t^N|^2+\sum_{i=1}^{n}|\theta_{tx_i}^N|^2\Big]dxdt\leqslant$$
$$\leqslant\mu_3\int\limits_0^\tau\Big(\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}|u_{tx_i}^N|^2dx\Big)^2dt+\mu_4,\tag{13}$$

де μ_3, μ_4 – додатні сталі, які не залежать від $(u^N,\ \theta^N)$ та τ.

В останній нерівності використаємо лему Біхарі ([19], с. 110), одержимо оцінку

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[|u_{tt}^N|^2+|\theta_t^N|^2+\sum_{i=1}^{n}|u_{tx_i}^N|^2\Big]dx+\Big(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}^N|^2dx\Big)\times$$
$$\times\Big(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u_{tx_i}^N|^2dx\Big)+\Big(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^Nu_{tx_i}^Ndx\Big)^2+$$
$$+\int\limits_{Q_\tau}\Big[|\theta^N|^{q-2}|\theta_t^N|^2+\sum_{i=1}^{n}|\theta_{tx_i}^N|^2\Big]dxdt\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\mu_5}{[1-\mu_3\mu_4\tau]},\ \ \text{де } \mu_5>0,\ \tau\in[0,T_0]\ \text{і}\ T_0<\frac{1}{\mu_3\mu_4}.$$

Отже, правильними є оцінки

$$\begin{aligned}&||u_t^N||_{L^\infty((0,T_0);H_0^1(\Omega))}\leqslant\mu_6,\\&||u_{tt}^N||_{L^\infty((0,T_0);L^2(\Omega))}\leqslant\mu_6,\\&||\theta_t^N||_{L^2((0,T_0);H_0^1(\Omega))}\leqslant\mu_6,\\&||\,|\theta^N|^{q-2}|\theta_t^N|^2\,||_{L^1((0,T_0);L^1(\Omega))}\leqslant\mu_6,\end{aligned}\tag{14}$$

де стала μ_6 не залежить від N.

Зауважимо, що з системи (5) легко отримати систему

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[u_{tt}^Nv+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x)u_{x_i}^Nv_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\theta_{x_i}^Nv+$$
$$+a_0(x)u^Nv+a_1(x)u_t^Nv+a_2(x)\theta^Nv-$$
$$-b_0(x)|u^N|^{p-2}u^Nv\Big]dxdt+\int\limits_0^\tau\Big(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}^N|^2dx\Big)\times$$
$$\times\Big(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^Nv_{x_i}dx\Big)dt=\int\limits_{Q_\tau}f_1(x,t)v\,dx,$$
$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[\theta_t^Nw+\sum_{i,j=1}^{n}c_{ij}(x)\theta_{x_i}^Nw_{x_j}+c_0(x)|\theta^N|^{q-2}\theta^Nw-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}b_i(x)u_t^Nw_{x_i}+c_1(x)u_t^Nw+$$
$$+c_2(x)\theta^Nw\Big]dxdt=\int\limits_{Q_\tau}f_2(x,t)w\,dx,\quad\tau\in[0,T_0],\tag{15}$$

для довільних $v\in L^2((0,T_0);H_0^1(\Omega))$, $w\in L^2((0,T_0);H_0^1(\Omega))\cap L^q((0,T_0);L^q(\Omega))$.

У системі (15) візьмемо $v=-u_{tx_kx_k}^N$ і $w=-\theta_{x_kx_k}^N$, отримані рівності підсумуємо за k від 1 до n і додамо. Матимемо

$$\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{Q_\tau}\Big[-u_{tt}^Nu_{tx_kx_k}^N+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x)u_{x_ix_j}^Nu_{tx_kx_k}^N+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ijx_j}(x)u_{x_i}^Nu_{tx_kx_k}^N-\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\theta_{x_i}^Nu_{tx_kx_k}^N-$$
$$-a_0(x)u^Nu_{tx_kx_k}^N-b_0(x)|u^N|^{p-2}u^Nu_{tx_kx_k}^N-$$
$$-a_2(x)\theta^Nu_{tx_kx_k}^N-a_1(x)u_t^Nu_{tx_kx_k}^N\Big]dxdt+$$
$$+\int\limits_0^\tau\Big(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}^N|^2dx\Big)\times\Big(\int\limits_\Omega\Big(\sum_{i=1}^{n}u_{x_ix_i}^N\Big)\times$$
$$\times\Big(\sum_{k=1}^{n}u_{tx_kx_k}^N\Big)dx\Big)dt+\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{Q_\tau}\Big[-\theta_t^N\theta_{x_kx_k}^N+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}c_{ij}(x)\theta_{x_ix_j}^N\theta_{x_kx_k}^N+\sum_{i,j=1}^{n}c_{ijx_j}(x)\theta_{x_i}^N\theta_{x_kx_k}^N-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}b_i(x)u_{tx_i}^N\theta_{x_kx_k}^N-\sum_{i=1}^{n}b_{ix_i}(x)u_t\theta_{x_kx_k}^N-$$
$$-c_0(x)|\theta^N|^{q-2}\theta^N\theta_{x_kx_k}^N-c_1(x)u_t^N\theta_{x_kx_k}^N-$$
$$-c_2(x)\theta^N\theta_{x_kx_k}^N\Big]dxdt=-\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{Q_\tau}\Big[f_1(x,t)u_{tx_kx_k}^N+$$
$$+f_2(x,t)\theta_{x_kx_k}^N\Big]dxdt.\tag{16}$$

Оцінимо доданки останньої рівності. Очевидно

$$J_{19} := -\int\limits_{Q_\tau} \sum_{k=1}^{n} u_{tt}^N u_{tx_kx_k}^N dxdt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{k=1}^{n} |u_{tx_k}^N|^2 dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} \sum_{k=1}^{n} |u_{1x_k}^N|^2 dx;$$

$$J_{20} := -\int\limits_{Q_\tau} \sum_{k=1}^{n} \theta_t^N \theta_{x_kx_k}^N dxdt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{k=1}^{n} |\theta_{x_k}^N|^2 dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} \sum_{k=1}^{n} |\theta_{0x_k}^N|^2 dx.$$

З умови $(\mathbf{H_1})$ маємо

$$J_{21} := -\int\limits_{Q_\tau} \sum_{k=1}^{n} a_0(x) u^N u_{tx_kx_k}^N dxdt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{A_0}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{k=1}^{n} |u_{x_k}^N|^2 dx - \frac{\overline{A}_0}{2}\int\limits_{\Omega_0} \sum_{k=1}^{n} |u_{0x_k}^N|^2 dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} \sum_{k=1}^{n} |u_{tx_k}^N|^2 dxdt - \frac{A_{0,2}}{2}\int\limits_{Q_\tau} |u^N|^2 dxdt,$$

де $\overline{A}_0 = \operatorname{ess\,sup}\limits_{\Omega} |a_0(x)|^2,\ A_{0,2} = \operatorname{ess\,sup}\limits_{\Omega} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{0x_i}(x)|^2;$

$$J_{22} := -\int\limits_{Q_\tau} \sum_{k=1}^{n} a_1(x) u_t^N u_{tx_kx_k}^N dxdt \geqslant$$

$$\geqslant A_1 \int\limits_{Q_\tau} \sum_{k=1}^{n} |u_{tx_k}^N|^2 dxdt - \frac{A_{1,2}}{2}\int\limits_{Q_\tau} |u_t^N|^2 dxdt -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} \sum_{k=1}^{n} |u_{tx_k}^N|^2 dxdt,$$

де $A_{1,2} = \operatorname{ess\,sup}\limits_{\Omega} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{1x_i}(x)|^2;$

$$J_{23} := -\int\limits_{Q_\tau} \sum_{k=1}^{n} a_2(x) \theta^N u_{tx_kx_k}^N dxdt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{A_2}{2}\int\limits_{Q_\tau} \sum_{k=1}^{n} |\theta_{x_k}^N|^2 dxdt - \int\limits_{Q_\tau} \sum_{k=1}^{n} |u_{tx_k}^N|^2 dxdt -$$

$$-\frac{A_{2,2}}{2}\int\limits_{Q_\tau} |\theta^N|^2 dxdt, \quad A_{2,2} = \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} |a_{2x_i}(x)|^2.$$

На підставі умови $(\mathbf{H_2})$

$$J_{24} := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x) u_{x_ix_j}^N u_{tx_kx_k}^N dxdt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{B_2}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_ix_i}^N|^2 dx - \frac{B_{2,0}+1}{2}\int\limits_{\Omega_0} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_ix_i}^N|^2 dx -$$

$$-\frac{B_{2,1}+1}{2}\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_ix_i}^N|^2 dx;$$

$$J_{25} := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j,k=1}^{n} b_{ijx_j}(x) u_{x_i}^N u_{tx_kx_k}^N dxdt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{B_{2,2}+1}{2}\int\limits_{Q_\tau} \sum_{k=1}^{n} |u_{tx_k}^N|^2 dxdt - \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} |u_{x_ix_j}^N|^2 dxdt -$$

$$-\frac{B_{2,3}}{2}\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^N|^2 dxdt,$$

де $B_{2,2} = \operatorname{ess\,sup}\limits_{\Omega} \sum\limits_{i,j=1}^{n} |b_{ijx_i}(x)|^2,$

$B_{2,3} = \operatorname{ess\,sup}\limits_{\Omega} \sum\limits_{i,j=1}^{n} |b_{ijx_ix_j}(x)|^2;$

$$J_{26} := -\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,k=1}^{n} \Big[b_i(x) \theta_{x_i}^N u_{tx_kx_k}^N + b_i(x) u_{tx_i}^N \theta_{x_kx_k}^N +$$

$$+ b_{ix_i}(x) u_t \theta_{x_kx_k}^N \Big] dxdt \geqslant -\frac{B_{1,2}}{2}\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |\theta_{x_i}^N|^2 dxdt -$$

$$-\frac{B_{1,2}}{2\delta_3}\int\limits_{Q_\tau} |u_t|^2 dxdt - \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} \sum_{k=1}^{n} |u_{tx_k}^N|^2 dxdt -$$

$$-\frac{\delta_3}{2}\int\limits_{Q_\tau} \sum_{k=1}^{n} |\theta_{x_kx_k}^N|^2 dxdt,$$

де $\delta_3 > 0,\ B_{1,2} = \operatorname{ess\,sup}\limits_{\Omega} \sum\limits_{i,j=1}^{n} |b_{ix_j}(x)|^2;$

$$J_{27} := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{k=1}^{n} b_0(x) |u^N|^{p-2} u^N u_{tx_kx_k}^N dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{B_{0,3}}{2}\int\limits_{Q_\tau} |u^N|^{2(p-1)} dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} \sum_{k=1}^{n} |u_{tx_k}^N|^2 dxdt +$$

$$+ B_{2,0}(p-1)\int\limits_0^\tau \Bigg(\int\limits_{\Omega_\tau} |u^N|^{(p-2)n} dx\Bigg)^{1/n} \times$$

$$\times \Bigg(\int\limits_{\Omega_\tau} |u_{tx_k}^N|^2 dx\Bigg)^{1/2} \Bigg(\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{k=1}^{n} |u_{x_k}^N|^r dx\Bigg)^{1/r} dt,$$

де $\dfrac{1}{r} = \dfrac{n-2}{2n}$, $B_{0,3} = \operatorname{ess\,sup}\limits_{\Omega} \sum\limits_{i=1}^{n} |b_{0x_i}(x)|^2$, але при $p \leqslant \dfrac{2(n-1)}{n-2}$, якщо $n > 2$, і $p > 2$, якщо $n \in \{1,2\}$, маємо

$$B_{2,0}(p-1)\int\limits_0^\tau \Bigg(\int\limits_{\Omega_\tau} |u^N|^{(p-2)n} dx\Bigg)^{1/n} \times \Bigg(\int\limits_{\Omega_\tau} |u_{tx_k}^N|^2 dx\Bigg)^{1/2} \times$$

$$\times \Bigg(\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{k=1}^{n} |u_{x_k}^N|^r dx\Bigg)^{1/r} dt \leqslant B_{2,0}(p-1) K_0 \times \tag{17}$$

$$\times \int_0^\tau \Big(\int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2 dx \Big)^{(p-2)/2} \times \Big(\int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2 dx \Big)^{1/2} \times$$

$$\times \Big(\int_{\Omega_\tau} \sum_{i,j=1}^n |u_{x_i x_j}^N|^2 dx \Big)^{1/2} dt \leqslant \frac{B_{2,0}(p-1)K_0}{2} \times$$

$$\times \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2 dxdt + \frac{B_{2,0}(p-1)K_0}{2} \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^n |u_{x_i x_j}^N|^2 dxdt.$$

З умови ($\mathbf{H_3}$) матимемо

$$J_{28} := \int_{Q_\tau} \sum_{k=1}^n \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x) \theta_{x_i x_j}^N \theta_{x_k x_k}^N dxdt \geqslant$$

$$\geqslant C^0 \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |\theta_{x_i x_i}^N|^2 dxdt;$$

$$J_{29} := \int_{Q_\tau} \sum_{k=1}^n \sum_{i,j=1}^n c_{ijx_j}(x) \theta_{x_i}^N \theta_{x_k x_k}^N dxdt \geqslant -$$

$$- \frac{C_{2,2}\delta_3}{2} \int_{Q_\tau} \sum_{k=1}^n |\theta_{x_k x_k}^N|^2 dxdt - \frac{1}{2\delta_3} \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |\theta_{x_i}^N|^2 dxdt,$$

де $C_{2,2} = \operatorname{ess\,sup}_\Omega \sum_{i,j=1}^n |c_{ijx_j}(x)|^2$;

$$J_{30} := - \int_{Q_\tau} \sum_{k=1}^n c_0(x) |\theta^N|^{q-2} \theta^N \theta_{x_k x_k}^N dxdt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2(q-1)C_0 - \delta_4}{2} \int_{Q_\tau} \sum_{k=1}^n |\theta^N|^{q-2} |\theta_{x_k}^N|^2 dxdt -$$

$$- \frac{C_{0,2}}{2\delta_4} \int_{Q_\tau} |\theta^N|^q dxdt,$$

де $\delta_4 > 0$, $C_{0,2} = \operatorname{ess\,sup}_\Omega \sum_{i=1}^n |c_{0x_i}(x)|^2$;

$$J_{31} := - \int_{Q_\tau} \sum_{k=1}^n c_1(x) u_t^N \theta_{x_k x_k}^N dxdt \geqslant$$

$$\geqslant - \frac{C_{1,2}}{2\delta_3} \int_{Q_\tau} |u_t^N|^2 dxdt - \frac{\delta_3}{2} \int_{Q_\tau} \sum_{k=1}^n |\theta_{x_k x_k}^N|^2 dxdt,$$

де $C_{1,2} = \operatorname{ess\,sup}_\Omega \sum_{i=1}^n |c_{1x_i}(x)|^2$;

$$J_{32} := - \int_{Q_\tau} \sum_{k=1}^n c_2(x) \theta^N \theta_{x_k x_k}^N dxdt \geqslant$$

$$\geqslant - \frac{\gamma_{1,2}}{2\delta_3} \int_{Q_\tau} |\theta^N|^2 dxdt - \frac{\delta_3}{2} \int_{Q_\tau} \sum_{k=1}^n |\theta_{x_k x_k}^N|^2 dxdt,$$

де $\gamma_{1,2} = \operatorname{ess\,sup}_\Omega \sum_{i=1}^n |c_{2x_i}(x)|^2$.

Далі

$$J_{33} := \int_0^\tau \Big(\int_\Omega \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2 dx \Big) \times$$

$$\times \Big(\int_\Omega \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}^N \sum_{k=1}^n u_{tx_k x_k}^N dx \Big) dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \Big(\int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2 dx \Big) \Big(\int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i x_i}^N|^2 dx \Big) -$$

$$- \frac{1}{2} \Big(\int_{\Omega_0} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2 dx \Big) \times \Big(\int_{\Omega_0} \sum_{i=1}^n |u_{x_i x_i}^N|^2 dx \Big) -$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^\tau \Big(\int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2 dx \Big) \Big(\int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i x_i}^N|^2 dx \Big) dt -$$

$$- \frac{1}{4} \int_0^\tau \Big(\int_\Omega \sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2 dx \Big)^2 dt -$$

$$- \frac{1}{4} \int_0^\tau \Big(\int_\Omega \sum_{i=1}^n |u_{x_i x_i}^N|^2 dx \Big)^2 dt.$$

За умов теореми

$$J_{34} := - \int_{Q_\tau} f_1(x,t) u_{tx_k x_k}^N dx \geqslant$$

$$\geqslant - \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} |f_1(x,t)|^2 dxdt - \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} \sum_{k=1}^n |u_{tx_k x_k}^N|^2 dxdt,$$

$$J_{35} := - \int_{Q_\tau} f_1(x,t) \theta_{x_k x_k}^N dxdt \geqslant$$

$$\geqslant - \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} |f_2(x,t)|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} \sum_{k=1}^n |\theta_{x_k x_k}^N|^2 dxdt.$$

З отриманих оцінок інтегралів $J_{19} - J_{35}$, матимемо

$$\int_{\Omega_\tau} \Big[\sum_{k=1}^n |u_{tx_k}^N|^2 + \sum_{k=1}^n |\theta_{x_k}^N|^2 + A_0 \sum_{k=1}^n |u_{x_k}^N|^2 +$$

$$+ B_2 \sum_{i=1}^n |u_{x_i x_i}^N|^2 \Big] dx + \Big(\int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2 dx \Big) \times$$

$$\times \Big(\int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i x_i}^N|^2 dx \Big) + 2A_1 \int_{Q_\tau} \sum_{k=1}^n |u_{tx_k}^N|^2 dxdt +$$

$$+ \big(2C^0 - \delta_3(3 + C_{2,2})\big) \times \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |\theta_{x_i x_i}^N|^2 dxdt +$$

$$+ \big(2(q-1)C_0 - \delta_4\big) \int_{Q_\tau} \sum_{k=1}^n |\theta^N|^{q-2} |\theta_{x_k}^N|^2 dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega_0}\Big[\sum_{k=1}^{n}|u^N_{1x_k}|^2+\sum_{k=1}^{n}|\theta^N_{0x_k}|^2+\overline{A}_0\sum_{k=1}^{n}|u^N_{0x_k}|^2+$$

$$+(B_{2,0}+1)\sum_{i=1}^{n}|u^N_{0x_ix_i}|^2+2\tau A_{0,2}|u^N_0|^2\Big]dx+$$

$$+\bigg(\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{0x_i}|^2dx\bigg)\bigg(\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{0,x_ix_i}|^2dx\bigg)+$$

$$+B_{0,3}K_0\int\limits_0^\tau\bigg(\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_i}|^2dx\bigg)^{p-1}dt+$$

$$+\bigg(A_{1,2}+A_{0,2}\tau^2+\frac{C_{1,2}+B_{1,2}}{\delta_3}\bigg)\times\int\limits_{Q_\tau}|u^N_t|^2dxdt+$$

$$+\bigg(A_2+\delta_3+B_{1,2}\bigg)\int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^{n}|\theta^N_{x_k}|^2dxdt+\bigg(A_{2,2}+\frac{\gamma_{1,2}}{\delta_3}\bigg)\times$$

$$\times\int\limits_{Q_\tau}|\theta^N|^2dxdt+\big(B_{2,1}+2+B_{2,0}(p-1)K_0+1\big)\times$$

$$\times\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_ix_i}|^2dx+B_{2,3}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_i}|^2dxdt+$$

$$+\frac{C_{0,2}}{\delta_4}\int\limits_{Q_\tau}|\theta^N|^qdxdt+\big(5+B_{2,2}+B_{2,0}(p-1)K_0\big)\times$$

$$\times\int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^{n}|u^N_{tx_k}|^2dxdt+\frac12\int\limits_0^\tau\bigg(\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{tx_i}|^2dx\bigg)^2dt+$$

$$+\frac12\int\limits_0^\tau\bigg(\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_ix_i}|^2dx\bigg)^2dt+\frac12\int\limits_{Q_\tau}\Big[|f_1(x,t)|^2+$$

$$+|f_2(x,t)|^2\Big]dx.$$

Нехай $\delta_3<\dfrac{2C^0}{3+C_{2,2}}$, $\delta_4<2(q-1)C_0$, тоді підінтегральний вираз лівої частини останньої нерівності додатний. За лемою Гроноулла-Беллмана маємо

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[\sum_{k=1}^{n}|u^N_{tx_k}|^2+\sum_{k=1}^{n}|\theta^N_{x_k}|^2+\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_ix_i}|^2+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}|u^N_{x_k}|^2\Big]dx+\bigg(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_i}|^2dx\bigg)\times$$

$$\times\bigg(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_ix_i}|^2dx\bigg)+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^{n}|u^N_{tx_k}|^2dxdt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|\theta^N_{x_ix_i}|^2dxdt+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^{n}|\theta^N|^{q-2}|\theta^N_{x_k}|^2dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\mu_7+\mu_8\int\limits_0^\tau\bigg(\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_ix_i}|^2dx\bigg)^2dt,$$

де μ_7, μ_8 – додатні сталі, які не залежать від u^N, θ^N.

До отриманої нерівності застосуємо лему Біхарі([19], с. 110), одержимо оцінку

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[\sum_{k=1}^{n}|u^N_{tx_k}|^2+\sum_{k=1}^{n}|\theta^N_{x_k}|^2+\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_ix_i}|^2+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}|u^N_{x_k}|^2\Big]dx+\bigg(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_i}|^2dx\bigg)\times$$

$$\times\bigg(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_ix_i}|^2dx\bigg)+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^{n}|u^N_{tx_k}|^2dxdt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|\theta^N_{x_ix_i}|^2dxdt+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{k=1}^{n}|\theta^N|^{q-2}|\theta^N_{x_k}|^2dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\mu_9}{1-\mu_7\mu_8\tau},\tag{18}$$

де $\mu_9>0$, $\tau\in[0,T_1]$ і $T_1<\dfrac{1}{\mu_7\mu_8}$.

Візьмемо тепер $T=\min\{T_0,T_1\}$. Тоді на підставі (10), (14) і (18) існують підпослідовності $\{u^{N_k}\}\subset\{u^N\}$, $\{\theta^{N_k}\}\subset\{\theta^N\}$ такі, що

$$\begin{aligned}
&u^{N_k}\to u\quad *\text{- слабко в}\quad L^\infty((0,T);H^2(\Omega)\cap L^p(\Omega)),\\
&u^{N_k}_t\to u_t\quad *\text{- слабко в}\quad L^\infty((0,T);H^1_0(\Omega)),\\
&u^{N_k}_{tt}\to u_{tt}\quad *\text{- слабко в}\quad L^\infty((0,T);L^2(\Omega)),\\
&\theta^{N_k}\to\theta\ \text{слабко в}\ L^2((0,T);H^2(\Omega))\cap L^q((0,T);L^q(\Omega)),\\
&\theta^{N_k}_t\to\theta_t\ \text{слабко в}\quad L^2((0,T);H^1_0(\Omega))
\end{aligned}\tag{19}$$

при $N_k\to\infty$.

Введемо оператори

$$\mathcal{A}:L^q((0,T);L^q(\Omega))\to L^{q'}((0,T);L^{q'}(\Omega)),$$

$$\mathcal{B}:L^2((0,T);H^1_0(\Omega))\to L^2((0,T);(H^1_0(\Omega))^*),$$

які визначені відповідно для довільних $\theta,w\in L^q((0,T);L^q(\Omega))$ і $u,v\in L^2((0,T);H^1_0(\Omega))$ формулами

$$\langle\mathcal{A}(\theta),w\rangle_1=\int\limits_{Q_T}c_0(x)|\theta|^{q-2}\theta w\,dxdt,$$

де $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ – скалярний добуток між елементами простору $L^{q'}((0,T);L^{q'}(\Omega))$ і $L^q((0,T);L^q(\Omega))$;

$$\langle\mathcal{B}(u),v\rangle_2=\int\limits_0^T\bigg(\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2dx\bigg)\times\bigg(\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}v_{x_i}dx\bigg)dt,$$

де $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ – скалярний добуток між елементами простору $L^2((0,T);(H^1_0(\Omega))^*)$ і $L^2((0,T);H^1_0(\Omega))$.

З оцінки (19) маємо

$$\int\limits_{Q_T}\big||u^N|^{p-2}u^N\big|^{p'}dxdt\leqslant\mu_{10},\ \mu_{10}>0,$$

$$\int\limits_{Q_T}\big||\theta^N|^{q-2}\theta^N\big|^{q'}dxdt\leqslant\mu_{11},\ \mu_{11}>0,$$

$$\int\limits_0^T\bigg(\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_i}|^2dx\bigg)^2dt\leqslant\mu_{12},\quad\mu_{12}>0.$$

Тому

$$|u^{N_k}|^{p-2}u^{N_k} \to \chi_0 \ \text{ слабко в } \ L^{p'}(Q_T),$$
$$\mathcal{A}(\theta^{N_k}) \to \chi_1 \ \text{ слабко в } \ L^{q'}(Q_T),$$
$$\mathcal{B}(u^{N_k}) \to \chi_2 \ \text{ слабко в } \ L^2((0,T);(H_0^1(\Omega))^*).$$

Враховуючи отримані оцінки, із (15) матимемо систему

$$\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[u_{tt}v+\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)u_{x_i}v_{x_j}+\sum_{i=1}^n b_i(x)\theta_{x_i}v+a_0(x)uv+$$
$$++a_1(x)u_tv+a_2(x)\theta v\Bigg]dxdt-\langle\chi_0,v\rangle_2+\langle\chi_2,v\rangle_2=$$
$$=\int\limits_{Q_\tau} f_1(x,t)v\,dxdt,$$
$$\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\theta_tw+\sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x)\theta_{x_i}w_{x_j}-\sum_{i=1}^n b_i(x)u_tw_{x_i}+$$
$$+c_1(x)u_tw+c_2(x)\theta w\Bigg]dxdt+\langle\chi_1,w\rangle_1=$$
$$=\int\limits_{Q_\tau} f_2(x,t)w\,dxdt \qquad (20)$$

для довільних $\tau\in[0,T)$, $v\in L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$, $w\in L^2((0,T);H_0^1(\Omega))\cap L^q((0,T);L^q(\Omega))$.

Зазначимо, що послідовність $\{u^N\}$ обмежена в $L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$, а послідовність $\{u_t^N\}$ обмежена в $L^2((0,T);L^2(\Omega))$. Оскільки $H_0^1(\Omega)\subset L^p(\Omega)$ компактно при $p\in\left[2,\dfrac{2n}{n-2}\right)$, $n>2$, то на підставі теореми 5.1 ([8], с. 70) можемо вважати, що $u^{N_k}\to u$ сильно в $L^p((0,T);L^p(\Omega))$ і майже всюди в Q_T. Тому $\chi_2=|u|^{p-2}u$ майже всюди в Q_T.

Аналогічно, послідовність $\{u^N\}$ обмежена в $L^2((0,T);H^2(\Omega))$, а послідовність $\{u_t^N\}$ обмежена в $L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$. Оскільки $H^2(\Omega)\subset H_0^1(\Omega)$ компактно, тому можемо вважати, що $u^{N_k}\to u$ сильно в $L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$ і майже всюди в Q_T. Тому $\chi_3=\mathcal{B}(u)$ майже всюди в Q_T.

Залишилося показати рівність $|u|^{p-2}u=\chi_0$. Для цього використаємо метод монотонності.

Розглянемо

$$0\leqslant y_k=\langle\mathcal{A}(\theta^{N_k})-\mathcal{A}(w),\theta^{N_k}-w\rangle_1=$$
$$=\langle\mathcal{A}(\theta^{N_k}),\theta^{N_k}\rangle_1-\langle\mathcal{A}(w),\theta^{N_k}-w\rangle_1-$$
$$-\langle\mathcal{A}(\theta^{N_k}),w\rangle_1=\int\limits_{Q_T}\Bigg[f_2(x,t)\theta^{N_k}-\theta_t^{N_k}\theta^{N_k}-$$
$$-\sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x)\theta_{x_i}^{N_k}\theta_{x_j}^{N_k}+\sum_{i=1}^n b_i(x)u_t^{N_k}\theta_{x_i}^{N_k}-$$
$$-c_1(x)u_t^{N_k}\theta^{N_k}-c_2(x)|\theta^{N_k}|^2\Bigg]dxdt-$$
$$-\langle\mathcal{A}(w),\theta^{N_k}-w\rangle_1-\langle\mathcal{A}(\theta^{N_k}),w\rangle_1.$$

Перейдемо в цій нерівності до верхньої границі при $N_k\to\infty$. Використовуючи лему 5.3 ([18], С. 20), отримаємо

$$0\leqslant\int\limits_{Q_T}\Bigg[f_2(x,t)\theta-\theta_t\theta-\sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x)\theta_{x_i}\theta_{x_j}+$$
$$+\sum_{i=1}^n b_i(x)u_t\theta_{x_i}-c_1(x)u_t\theta-c_2(x)|\theta|^2\Bigg]dxdt-$$
$$-\langle\mathcal{A}(w),\theta-w\rangle_1-\langle\chi_1,w\rangle_1. \qquad (21)$$

У другому рівнянні системи (20) приймемо $w=\theta$ і одержимо

$$\int\limits_{Q_T}\Bigg[\theta_t\theta+\sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x)\theta_{x_i}\theta_{x_j}-\sum_{i=1}^n b_i(x)u_t\theta_{x_i}+c_1(x)u_t\theta+$$
$$+c_2(x)|\theta|^2\Bigg]dxdt+\langle\chi_1,\theta\rangle_1=\int\limits_{Q_T} f_2(x,t)\theta\,dxdt. \qquad (22)$$

Додавши (21) і (22), отримаємо рівність

$$\langle\chi_1-\mathcal{A}(w),\theta-w\rangle_1\geqslant 0.$$

Прийнявши $\theta-w=\lambda\psi$, $\forall\,\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda>0$, $\psi\in L^q(Q_T)$ і врахувавши семінеперервність оператора $\mathcal{A}$, матимемо

$$\chi_1=\mathcal{A}(\theta).$$

Необхідно перевірити виконання початкових умов.

Оскільки $u_{tt}\in L^2((0,T);L^2(\Omega))$, $u_t\in L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$, $u\in L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$, $\theta\in L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$, $\theta_t\in L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$, то з леми 1.2 [12, с. 20] випливає, що $u:(0,T)\to H_0^1(\Omega)$, $u_t:(0,T)\to L^2(\Omega)$, $\theta:(0,T)\to H_0^1(\Omega)$ є неперервними функціями і правильні відповідні формули інтегрування частинами.

З одержаних оцінок маємо, що $u^{N_k}(\cdot,0)\to u(\cdot,0)$ слабко в $H_0^1(\Omega)$, але $u^{N_k}(\cdot,0)=u_0^{N_k}(\cdot)\to u_0(\cdot)$ в $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, тому $u(x,0)=u_0(x)$.

Оскільки $u_{tt}^{N_k}\to u_{tt}$ слабко в $L^2(Q_T)$, з леми 1.2 ([8], с. 20) випливає, що

$$u_t^{N_k}(x,0)\to u_t(x)|_{t=0}=u_t(x,0),\ x\in\Omega,$$

але відомо, що $u_t^{N_k}(\cdot,0)=u_1^{N_k}(\cdot)\to u_1(\cdot)$ в $H_0^1(\Omega)$, тому $u_t(x,0)=u_1(x)$.

Також

$$\theta^{N_k}(\cdot,0)\to\theta(\cdot,0)\ \text{ слабко в }\ H_0^1(\Omega),$$
$$\text{але }\ \theta^{N_k}(\cdot,0)=\theta_0^{N_k}(\cdot)\to\theta_0(\cdot)\ \text{ в }\ H_0^1(\Omega),$$

тому $\theta(x,0)=\theta_0(x)$.

Отже, розв'язок існує, оскільки виконуються також і початкові умови (4).

Теорема доведена. ■

Введемо позначення:

$$E(t)=\frac12\int\limits_{\Omega_t}\Bigg[u_t^2+\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}+a_0(x)u^2+\theta^2\Bigg]dx+$$
$$+\frac1p\int\limits_{\Omega_t} b_0(x)|u|^pdx+\frac14\Bigg(\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2dx\Bigg)^2. \qquad (23)$$

Розглянемо систему нерівностей

$$2A_1\nu_2-\nu_1\nu_2-C_1 \geqslant \nu_0, \quad 2C_2\nu_1-A_2-\nu_1\nu_2 > \nu_0, \quad \nu_0 > 0, \tag{24}$$

під додатним розв'язком якої розумітимемо такі (ν_1, ν_2), що $\nu_1 > 0,\ \nu_2 > 0$. Позначимо через Ξ множину всіх додатних розв'язків системи (24).

Зауваження 1. Завжди існують такі значення параметрів A_1, A_2, C_1, C_2, для яких $\Xi \neq \emptyset$. Справді, припустимо, що $\nu_1 = 1,\ \nu_2 = 1$, тоді із системи (24) випливає, що $2A_1 \geqslant C_1 + \nu_0 + 1,\ 2C_2 > A_2 + \nu_0 + 1$.

Теорема 2. *Нехай коефіцієнти системи рівнянь (1)–(2) задовольняють умови* $(\mathbf{H_1})$, $(\mathbf{H_2})$, $(\mathbf{H_3})$*),* $\Xi \neq \emptyset$; $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, $\theta_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega)$; $p > 2$, $q > 2$. *Нехай, крім того, при* $t \to +\infty$ *виконується нерівність*

$$\int\limits_{Q_t} e^{\frac{\varepsilon M_2 \tau}{2}} \left[|f_1(x,\tau)|^2 + |f_2(x,\tau)|^2\right] dx d\tau \leqslant \alpha t^{\beta}$$

для деяких додатних сталих ε, M_2, α *і* β. *Тоді узагальнений розв'язок задачі (1)–(4) задовольняє оцінку*

$$E(t) \leqslant C e^{-\frac{\varepsilon M_2 t}{2}}$$

для всіх $t \geqslant 0$ *і всіх* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, *де* C *і* ε_0 *– додатні сталі.*

☐ *Доведення.* Спочатку продиференціюємо (23) за t. Матимемо

$$E'(t) = \int\limits_{\Omega_t} \Big[u_{tt}u_t + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x) u_{x_i} u_{tx_j} + a_0(x) u u_t +$$
$$+ \theta\theta_t + b_0(x)|u|^{p-2}uu_t\Big] dx + \Big(\int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 dx\Big) \times$$
$$\times \Big(\int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} u_{tx_i} dx\Big),$$

але, оскільки

$$\int\limits_{\Omega_t} \Big[u_{tt}u_t + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x) u_{x_i} u_{tx_j} + a_0(x) u u_t + \theta\theta_t +$$
$$+ b_0(x)|u|^{p-2}uu_t\Big] dx + \Big(\int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 dx\Big) \times$$
$$\times \Big(\int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} u_{tx_i} dx\Big) = \int\limits_{\Omega_t} \Big[-\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\theta_{x_i} u_t -$$
$$- a_1(x)|u_t|^2 - a_2(x)\theta u_t - \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(x)\theta_{x_i}\theta_{x_j} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_t \theta_{x_i} - c_0(x)|\theta|^q - c_1(x) u_t\theta - c_2(x)|\theta|^2 +$$
$$+ f_1(x,t)u_t + f_2(x,t)\theta\Big] dx,$$

то

$$E'(t) = \int\limits_{\Omega_t} \Big[- a_1(x)|u_t|^2 - a_2(x)\theta u_t -$$
$$- \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(x)\theta_{x_i}\theta_{x_j} - c_0(x)|\theta|^q - c_1(x) u_t\theta -$$
$$- c_2(x)|\theta|^2 + f_1(x,t)u_t + f_2(x,t)\theta\Big] dx. \tag{25}$$

Оцінимо доданки (25)

$$\widehat{J}_1 := -\int\limits_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(x)\theta_{x_i}\theta_{x_j} dx \leqslant -C^0 \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} |\theta_{x_i}|^2 dx,$$

$$\widehat{J}_2 := -\int\limits_{\Omega_t} a_1(x)|u_t|^2 dx \leqslant -A_1 \int\limits_{\Omega_t} |u_t|^2 dx,$$

$$\widehat{J}_3 := -\int\limits_{\Omega_t} a_2(x)\theta u_t dx \leqslant \frac{A_2}{2\nu_1} \int\limits_{\Omega_t} |\theta|^2 dx + \frac{\nu_1}{2} \int\limits_{\Omega_t} |u_t|^2 dx,$$

$$\widehat{J}_4 := -\int\limits_{\Omega_t} c_1(x)\theta u_t dx \leqslant \frac{\nu_2}{2} \int\limits_{\Omega_t} |\theta|^2 dx + \frac{C_1}{2\nu_2} \int\limits_{\Omega_t} |u_t|^2 dx,$$

$$\widehat{J}_5 := -\int\limits_{\Omega_t} c_0(x)|\theta|^q dx \leqslant -C_0 \int\limits_{\Omega_t} |\theta|^q dx,$$

$$\widehat{J}_6 := -\int\limits_{\Omega_t} c_2(x)|\theta|^2 dx \leqslant -C_2 \int\limits_{\Omega_t} |\theta|^2 dx,$$

$$\widehat{J}_7 := \int\limits_{\Omega_t} f_1(x,t)|u_t|^2 dx \leqslant \frac{1}{2\delta_1} \int\limits_{\Omega_t} |f_1(x,t)|^2 dx +$$
$$+ \frac{\delta_1}{2} \int\limits_{\Omega_t} |u_t|^2 dx,\ \delta_1 > 0,$$

$$\widehat{J}_8 := \int\limits_{\Omega_t} f_2(x,t)|\theta|^2 dx \leqslant \frac{1}{2\delta_2} \int\limits_{\Omega_t} |f_2(x,t)|^2 dx +$$
$$+ \frac{\delta_2}{2} \int\limits_{\Omega_t} |\theta|^2 dx,\ \delta_2 > 0.$$

Враховуючи умови теореми 2 і оцінки інтегралів $\widehat{J}_1 - \widehat{J}_8$, з (25) матимемо

$$E'(t) \leqslant -\int\limits_{\Omega_t} \Big[|u_t|^2\Big(A_1 - \frac{C_1}{2\nu_2} - \frac{\nu_1}{2} - \frac{\delta_1}{2}\Big) +$$
$$+ |\theta|^2\Big(C_2 - \frac{A_2}{2\nu_1} - \frac{\nu_2}{2} - \frac{\delta_2}{2}\Big) + C^0 \sum_{i=1}^{n} |\theta_{x_i}|^2 +$$
$$+ C_0|\theta|^q\Big] dx + \int\limits_{\Omega_t} \Big[\frac{1}{2\delta_1}|f_1(x,t)|^2 + \frac{1}{2\delta_2}|f_2(x,t)|^2\Big] dx \leqslant$$
$$- \int\limits_{\Omega_t} \Big[|u_t|^2\Big(\nu_0 - \frac{\delta_1}{2}\Big) + |\theta|^2\Big(\nu_0 - \frac{\delta_2}{2}\Big) + C^0 \sum_{i=1}^{n} |\theta_{x_i}|^2 +$$
$$+ C_0|\theta|^q\Big] dx + \int\limits_{\Omega_t} \Big[\frac{1}{2\delta_1}|f_1(x,t)|^2 + \frac{1}{2\delta_2}|f_2(x,t)|^2\Big] dx.$$

Виберемо $\delta_1 < 2\nu_0,\ \delta_2 < 2\nu_0$.

Введемо позначення

$$E_\varepsilon(t) = E(t) + \varepsilon\psi(t), \qquad (26)$$

де

$$\psi(t) = \int\limits_{\Omega_t} u u_t dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_t} a_1(x)|u|^2 dx,\ \varepsilon > 0.$$

Легко отримати оцінку

$$|\psi(t)| = \left|\int\limits_{\Omega_t} u u_t dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_t} a_1(x)|u|^2 dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1+A_1}{2}\int\limits_{\Omega_t}|u|^2dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_t}|u_t|^2dx \leqslant M_1E(t).$$

З отриманої оцінки і (26) одержимо

$$|E_\varepsilon(t) - E(t)| \leqslant \varepsilon M_1 E(t). \qquad (27)$$

Тепер розглянемо

$$E'_\varepsilon(t) = E'(t) + \varepsilon\int\limits_{\Omega_t}\left[u u_{tt} + |u_t|^2 + a_1(x)uu_t\right]dx \leqslant$$
$$\leqslant -\int\limits_{\Omega_t}\Bigg[|u_t|^2\left(\nu_0 - \frac{\delta_1}{2}\right) + |\theta|^2\left(\nu_0 - \frac{\delta_2}{2}\right) +$$
$$+ C^0\sum_{i=1}^n|\theta_{x_i}|^2 + C_0|\theta|^q\Bigg]dx + \int\limits_{\Omega_t}\Bigg[\frac{1}{2\delta_1}|f_1(x,t)|^2 +$$
$$+\frac{1}{2\delta_2}|f_2(x,t)|^2\Bigg]dx + \varepsilon\int\limits_{\Omega_t}\Bigg[u_t^2 - \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j} -$$
$$-\sum_{i=1}^n b_i(x)\theta_{x_i}u - a_0(x)u^2 - a_2(x)\theta u - b_0(x)|u|^p +$$
$$+ f_1(x,t)u\Bigg]dx - \varepsilon\left(\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}|^2dx\right)^2.$$

Оцінимо доданки останньої рівності

$$\widehat{J}_9 := -\varepsilon\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dx \leqslant -\varepsilon B_2\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}|^2dx,$$

$$\widehat{J}_{10} := -\varepsilon\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^n b_i(x)\theta_{x_i}udx \leqslant \frac{\varepsilon\delta_3B_1}{2}\int\limits_{\Omega_t}|u|^2dx +$$
$$+\frac{\varepsilon}{2\delta_3}\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^n|\theta_{x_i}|^2dx, \quad \text{де } \delta_3 > 0,$$

$$\widehat{J}_{11} := -\varepsilon\int\limits_{\Omega_t}a_0(x)u^2dx \leqslant -\varepsilon A_0\int\limits_{\Omega_t}u^2dx,$$

$$\widehat{J}_{12} := -\varepsilon\int\limits_{\Omega_t}a_2(x)\theta udx \leqslant \frac{\varepsilon\delta_4A_2}{2}\int\limits_{\Omega_t}|u|^2dx +$$
$$+\frac{\varepsilon}{2\delta_4}\int\limits_{\Omega_t}|\theta|^2dx, \quad \text{де } \delta_4 > 0,$$

$$\widehat{J}_{13} := -\varepsilon\int\limits_{\Omega_t}b_0(x)|u|^pdx \leqslant -\varepsilon B_0\int\limits_{\Omega_t}|u|^pdx,$$

$$\widehat{J}_{14} := \varepsilon\int\limits_{\Omega_t}f_1(x,t)udx \leqslant \frac{\varepsilon\delta_5}{2}\int\limits_{\Omega_t}|u|^2dx +$$
$$+\frac{\varepsilon}{2\delta_5}\int\limits_{\Omega_t}|f_1(x,t)|^2dx, \quad \text{де } \delta_5 > 0.$$

Отже,

$$E'_\varepsilon(t) \leqslant \int\limits_{\Omega_t}\Bigg[|u_t|^2\left(-\nu_0 + \frac{\delta_1}{2} + \varepsilon\right) +$$
$$+|\theta|^2\left(-\nu_0 + \frac{\delta_2}{2} + \frac{\varepsilon}{2\delta_4}\right) + \sum_{i=1}^n|\theta_{x_i}|^2\left(-C^0 + \frac{\varepsilon}{2\delta_3}\right) -$$
$$-C_0|\theta|^q + \varepsilon|u|^2\left(-A_0 - B_0 + \frac{A_2\delta_4}{2} + \frac{B_1\delta_3}{2} + \frac{\delta_5}{2}\right) -$$
$$-\varepsilon B_2\sum_{i=1}^n|u_{x_i}|^2 - \varepsilon B_0|u|^p\Bigg]dx - \varepsilon\left(\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}|^2dx\right)^2 +$$
$$+\int\limits_{\Omega_t}\left[|f_1(x,t)|^2\left(\frac{1}{2\delta_1} + \frac{\varepsilon}{2\delta_5}\right) + \frac{1}{\delta_2}|f_2(x,t)|^2\right]dx.$$

Нехай

$$2A_0 + 2B_0 > A_2\delta_4 + B_1\delta_3 + \varepsilon\delta_5,$$
$$\varepsilon < \min\left\{\nu_0 - \frac{\delta_1}{2}; (2\nu_0 - \delta_2)\delta_4; 2C^0\delta_3\right\},$$

тоді

$$E'_\varepsilon(t) \leqslant -\varepsilon M_2E(t) + M_3\int\limits_{\Omega_t}\left[|f_1(x,t)|^2 + |f_2(x,t)|^2\right]dx,$$

де M_2, M_3 – деякі додатні сталі.

Але з оцінки (27) маємо

$$(1 - M_1\varepsilon)E(t) \leqslant E_\varepsilon(t) \leqslant (1 + M_1\varepsilon)E(t).$$

Нехай $\varepsilon \leqslant \frac{1}{2M_1}$, тоді

$$\frac{1}{2}E(t) \leqslant E_\varepsilon(t) \leqslant \frac{3}{2}E(t) \leqslant 2E(t),$$
$$-\varepsilon M_2E(t) \leqslant -\frac{\varepsilon M_2}{2}E_\varepsilon(t).$$

Отже,

$$E'_\varepsilon(t) \leqslant -\frac{\varepsilon M_2}{2}E_\varepsilon(t) +$$
$$+M_3\int\limits_{\Omega_t}\left[|f_1(x,t)|^2 + |f_2(x,t)|^2\right]dx.$$

З останньої нерівності одержимо

$$\frac{d}{dt}\left(E_\varepsilon(t)e^{\frac{\varepsilon M_2 t}{2}}\right) \leqslant$$

$$\leq M_3 e^{\frac{\varepsilon M_2 t}{2}} \int\limits_{\Omega_t} \left[|f_1(x,t)|^2 + |f_2(x,t)|^2\right] dx.$$

Проінтегруємо обидві частини останньої нерівності від 0 до t. Матимемо

$$E_\varepsilon(t) \leqslant e^{-\frac{\varepsilon M_2 t}{2}}\Bigg(E_\varepsilon(0)+$$

$$+M_3 \int\limits_{Q_t} e^{\frac{\varepsilon M_2 \tau}{2}} \left[|f_1(x,\tau)|^2 + |f_2(x,\tau)|^2\right] dx\, d\tau\Bigg).$$

Врахувавши умови теореми, маємо

$$E_\varepsilon(t) \leqslant C e^{-\frac{\varepsilon M_2 t}{2}},$$

де C – додатна стала.

Отже, теорема доведена. ■

Висновки

У роботі досліджено мішану задачу з однорідними крайовими умовами Діріхле та ненульовими початковими умовами для нелінійної зв'язної системи еволюційних рівнянь з інтегральним збуренням в необмеженій за часом області. Розглянута асимптотична поведінка узагальненого розв'язку задачі за певних умов на коефіцієнти рівняння і початкові дані.

Література

[1] Aassila M. Nonlinear boundary stabilization of an inhomogeneous and anisotropic thermoelasticity system/Aassila M.// Applied Math Letters. – Vol.13. – 2000. – P. 71–76.

[2] Apolaya R.F. On a nonlinear coupled system with internal damping / Apolaya R.F., Clark H.R., Feitosa A.J. // Electronic Journal of Differential Equations. – 2000. – V.2000, №64. – P. 1–17.

[3] Bisignin E. Perturbation of Kirchhoff-Carrier's operator by Lipschitz functions /Bisignin E. // Proccedings of XXXI Bras. Sem. of Analysis. – Rio de Janeiro, 1992.

[4] Clark M.R. On a mixed problem for a coupled nonlinear system / Clark M.R., Lima O.A. // Electronic Journal of Differential Equations. – 1997. – V.1997, №06. – P. 1–11.

[5] Clark M.R. Existence of solutions for a variational unilateral system / Clark M.R., Lima O.A. // Electronic Journal of Differential Equations. – 2002. – V.2002, №22. – P. 1–18.

[6] D'Ancona P. Nonlinear perturbation of the Kirchhoff-Carrier equations / D'Ancona P., Spagnolo S. – Univ. Pisa Lecutures Notes, 1992.

[7] hHosoya M., Yamada Y. On some nonlinear wave equation I - local existence and regularity of solutions / Hosoya M., Yamada Y. // Journal Fac. Sa. Tokyo, Sec. IA, Math. – 1991. – V.38. – P. 225–238.

[8] Лионс Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Лионс Ж.Л. – М., 1972.

[9] Matos M.P. Mathematical analysis of the nonlinear model for the vibrations of a string / Matos M.P. // Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications. – 1991. – V.17, №12. – P. 1125–1137.

[10] Medeiros L.A. On some nonlinear perturbations of Kirchhoff-Carrier's operator / Medeiros L.A. // Camp. Appl. Math. – 1994. – V.13, №3. – P. 225–233.

[11] Messaoudi S.A. A blowup result in a multidimensional semilinear thermoelastic system / Messaoudi S.A. // Electronic Journal of Differential Equations. – 2001. – V.2001, №30. – P. 1–9.

[12] Nechepurenko M.O. The mixed problem for a nonlinear coupled evolution system in a bounded domain / Nechepurenko M.O. // Visnyk Lvivskogo Univ. Ser.Mech-Math. – 2007. – V.67. – P. 207–223.

[13] Nechepurenko M.O. Mixed problem for a nonlinear coupled system in unbounded domains / Nechepurenko M.O. // Matematychi Studii.— 2009. — V.32. - No.1. – P. 33–44.

[14] Нечепуренко М.О. О существовании обобщенного решения нелинейной эволюционной системы уравнений в неограниченной по времени области / Нечепуренко М.О., Торган Г.Р. // Український математичний вісник.— 2010. — Т.7. – № 1. – С. 49–72.

[15] Pohozhaev S.I. On a class of quasilinear hyperbolic equations / Pohozhaev S.I. // Mat. Sbornic. – 1975. – V.96, №138. – P.152–166.

[16] Muñoz Rivera J.E. Smoothing Effect and Propagations of Singularities for Viscoelastic Plates / Jaime E. Muñoz Rivera, Luci Harue Fatori. // J. of Math. Anal. and Appl. – 1997. – V. 206. – P.397–427.

[17] Торган Г.Р. Неіснування глобального розв'язку змішаної задачі для рівняння типу Ейдельмана / Торган Г.Р. // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2008. – №6. – С.98–103.

[18] Гаевский Х. Нелинейные операторные дифференциальные уравнения / Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. – М., 1978. – 336 с.

[19] Демидович Б.П. Леции по математической теории устойчивости / Демидович Б.П. – М., 1967. – 472 с.

[20] Коддингтон Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Коддингтон Э.А., Левинсон Н. – М., 1958. – 474 с.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

М.А. Нечепуренко, Г.Р. Торган

Львовский национальный университет имени Ивана Франко
79000, г. Львов, ул. Университетская, 1

Исследовано асимптотическое поведение обобщенного решения смешанной задачи для нелинейной системы уравнений с интегральным возмущением в неограниченной области по времени.

Ключевые слова: смешанная задача, нелинейная система, интегральное возмущение, асимптотическое поведение.

2000 MSC: 35M33, 35B40, 58D25

УДК: 517.95

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM FOR A NONLINEAR SYSTEM OF EQUATIONS WITH INTEGRAL PERTURBATION

M.A. Nechepurenko, H.R. Torhan

Lviv Ivan Franko National university
(79000, L'viv, vul. Universytets'ka, 1)

The asymptotic behavior of generalized solutions to the one initial boundary value problem for a nonlinear system of equations with integral perturbation in unbounded by time domain is investigated.

Keywords: mixed problem, nonlinear system, integral perturbation, asymptotic behavior.

2000 MSC: 35M33, 35B40, 58D25

УДК: 517.95