ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
“ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”
“Фізико-математичні науки”
Вип.687 № 687, (2010) с. 91–96

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
“LVIVSKA POLITECHNIKA”
“Physical & mathematical sciences”
Vol.687 No 687, (2010) 91–96

ХАРАКТЕРИСТИКА НЕВАНЛІННИ ЗРОСТАННЯ ДЕЛЬТА-ПЛЮРИСУБГАРМОНІЙНИХ ФУНКЦІЙ

О. Бродяк[a], Я. Васильків[b], С. Тарасюк[b]

[a]*Національний університет “Львівська політехніка”*
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна
[b]*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
вул. Університетська 1, 79000, Львів, Україна

(Отримано 6 листопада 2010 р.)

Для δ-плюрисубгармонійних в $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ функцій (тобто різниць плюрисубгармонійних функцій), введено аналог характеристики Неванлінни зростання таких функцій і вивчено її основні властивості. Крім того розглянуто клас δ-плюрисубгармонійних функцій скінченного λ-типу (узагальнення добре відомих класів мероморфних в $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 1)$ функцій скінченного λ-типу, введених і вивчених Л. А. Рубелом, Б. А. Тейлором та Р. Куюлою) і встановлено, що цей клас утворює решітку Ріса.

Ключові слова: субгармонійна функція, плюрисубгармонійна функція, характеристика Неванлінни, розподіл значень.

2000 MSC: 31C10, 32U05

УДК: 517.576

Вступ

У теорії зростання і в теорії розподілу значень цілих та мероморфних функцій істотне значення має низка характеристик таких функцій, найуживанішими серед яких є характеристики, введені Р. Неванлінною [1] (див. також [2], [3]). У подальшому аналоги таких характеристик введено для субгармонійних та δ-субгармонійних на площині чи евклідовому просторі функцій, а також вивчено їхні властивості [4], [5], [6]. Крім того, в роботі [7] вивчено основні властивості неванліннових характеристик мероморфних в $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ функцій.

Узагальненням мероморфних функцій багатьох комплексних змінних є так звані δ-плюрисубгармонійні функції (адже логарифм модуля мероморфної в $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ функції є δ-плюрисубгармонійною функцією), які ми й розглядаємо в цій роботі. Проте, властивості неванліннових характеристик для таких об'єктів в науковій літерарурі не достатньо висвітлені. Те саме стосується й самого поняття δ-плюрисубгармонійної функції. Основна мета цієї роботи означити як і поняття δ-плюрисубгармонійної функції (див. розділ I), так і основні характеристики зростання таких функцій, а також вивчити їхні найважливіші властивості (див. розділ II). Крім того, в розділі II ми вводимо клас δ-плюрисубгармонійних функцій скінченного λ-типу для довільних функцій зростання $\lambda(r)$, тобто додатних неспадних необмежених функцій, означених на $(0, +\infty)$, і показуємо, що цей клас утворює решітку Ріса.

I. Означення та допоміжні твердження

Дійснозначна напівнеперервна зверху функція $u(z)$, $u(z) \not\equiv -\infty$, $z \in \mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ називається *плюрисубгармонійною* в $\mathbb{C}^n$ (див., наприклад, [8, додаток 1], [9, с. 123], [10, с. 251]), якщо для довільної комплексної прямої $z = a + y\,b$, $a \in \mathbb{C}^n$, $b \in \mathbb{C}^n$, $\|b\| = 1$, $y \in \mathbb{C}$, зріз-функція $u_{a,b}(y) = u(a + y\,b)$ є субгармонійною функцією однієї комплексної змінної y, де $\|b\| = \sqrt{|b_1|^2 + \cdots + |b_n|^2}$ – евклідова норма в $\mathbb{C}^n$.

За аналогією до [4], різницю $w(z) = u_1(z) - u_2(z)$ плюрисубгармонійних в $\mathbb{C}^n$ функцій u_1 і u_2, визначену у розумінні $\overline{\mathbb{R}}$ на множині $E \subset \mathbb{C}^n$, де u_1 і u_2 не рівні одночасно $-\infty$, назвемо *δ-плюрисубгармонійною функцією.* Зазначимо, що (див., наприклад, [8, додаток 1]), що множина E – зв'язна, а множина $\complement E = \mathbb{C}^n \setminus E$ – плюриполярна і тому її лебегова міра дорівнює нулеві.

Оператори зовнішнього дифернціювання ∂ та $\overline{\partial}$ в $\mathbb{C}^n$ означаються співвідношеннями

$$\partial = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\, z_k}\, d\, z_k, \qquad \overline{\partial} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\, \bar{z}_k}\, d\, \bar{z}_k,$$

де $z_k = x_k + i\, y_k$, $\bar{z}_k = x_k - i\, y_k$, $\{x_k, y_k\} \subset \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, а

$$\frac{\partial}{\partial\, z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\, x_k} - i\,\frac{\partial}{\partial\, y_k}\right), \quad \frac{\partial}{\partial\, \bar{z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\, x_k} + i\,\frac{\partial}{\partial\, y_k}\right)$$

– оператори формальних похідних і, як звичайно,

$$d = \partial + \bar{\partial} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial\, x_k}\, d\, x_k + \frac{\partial}{\partial\, y_k}\, d\, y_k\right).$$

Довільній плюрисубгармонійній в $\mathbb{C}^n$ функції u ставимо у взаємно-однозначну відповідність (див., наприклад, [8, с. 56], [11]) додатний замкнений потік t_u бі-степеня $(1,1)$ в $\mathbb{C}^n$

$$t_u = \frac{i}{2}\,\partial\,\bar\partial\,u = \frac{i}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial\,z_j\,\partial\,\bar z_k}\,d\,z_j\wedge d\,\bar z_k,$$

де похідні $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\,z_j\,\partial\,\bar z_k}$ визначені як розподіли у розумінні Л. Шварца (функція $u\in L^1_{loc}(\mathbb{C}^n)$). Такий потік називатимемо потоком, *асоційованим за Рісом з плюрисубгармонійною функцією* u.

Додатність потоку t_u означає, що для довільної нескінченно диференційовної невід'ємної функції φ з компактним носієм в $\mathbb{C}^n$ ермітова матриця

$$\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\,z_j\,\partial\,\bar z_k},\,\varphi\,\beta^n\right)\right]_{1\le j,\,k\le n}$$

є додатно напівозначеною, де

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\,z_j\,\partial\,\bar z_k},\,\varphi\,\beta^n\right) = \int_{\mathbb{C}^n} u(z)\,\frac{\partial^2\varphi(z)}{\partial\,z_j\,\partial\,\bar z_k}\,\beta^n(z)$$

– значення розподілу $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\,z_j\,\partial\,\bar z_k}$ на формі $\varphi\,\beta^n$, $\beta^n(z) = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{i}{2}\,d\,z_k\wedge d\,\bar z_k\right)$ – елемент об'єму в $\mathbb{C}^n$.

Замкненість потоку t_u означає, що $d\,t_u = 0$, тобто $(d\,t_u,\psi) = \int_{\mathbb{C}^n} t_u\wedge d\,\psi = 0$ для довільної форми з простору $D^0_{n-1}(\mathbb{C}^n)$ диференціальних форм вигляду

$$\psi = \sum_{J,K}\psi_{J,K}\,d\,z_J\wedge d\,\bar z_K$$

з коефіцієнтами класу C^∞ із компактним носієм в $\mathbb{C}^n$, де $J=(j_1,\dots,j_{n-1})$, $K=(k_1,\dots,k_{n-1})$, $1\le j_1<j_2<\dots<j_{n-1}\le n$, $1\le k_1<k_2<\dots<k_{n-1}\le n$ – впорядковані мультиіндекси, а $d\,z_J\wedge d\,\bar z_K = d\,z_{j_1}\wedge\dots\wedge d\,z_{j_{n-1}}\wedge d\,\bar z_{k_1}\wedge\dots\wedge d\,\bar z_{k_{n-1}}$ – зовнішній добуток базисних диференціальних форм.

Враховуючи, що довільна δ-плюрисубгармонійна в $\mathbb{C}^n$ функція $w = u_1 - u_2$ є різницею двох плюрисубгармонійних в $\mathbb{C}^n$ функцій u_1 та u_2, одержимо, що потік

$$t_w = \frac{i}{2}\,\partial\,\bar\partial\,w = \frac{i}{2}\,\partial\,\bar\partial\,u_1 - \frac{i}{2}\,\partial\,\bar\partial\,u_2 = t_{u_1} - t_{u_2}$$

є дійснозначним замкненим потоком типу міри бі-степеня $(1,1)$ в $\mathbb{C}^n$, що зображається різницею двох додатних замкнених потоків бі-степеня $(1,1)$ в $\mathbb{C}^n$.

Подамо таке означення [12].

Означення 1. Нехай ψ – дійснозначна замкнена диференціальна форма з коефіцієнтами із класу C^1 бі-степеня (p,p) на комплексному многовиді $D\subset\mathbb{C}^n$. Говорять, що ψ має ***обмежену варіацію***, якщо для довільної компактної підмножини $K\subset D$ знайдеться відкритий окіл U множини K і додатні замкнені форми ψ^+ та ψ^- з класу C^1 бі-степеня (p,p) на U такі, що $\psi = \psi^+ - \psi^-$.

Відомо [12, с. 134], що якщо комплексний многовид D є келеровим, то довільна дійснозначна замкнена диференціальна форма ψ з класу C^1 бі-степеня (p,p) має обмежену варіацію. Але евклідова метрична форма породжує келерову форму $\omega(z) = \frac{i}{2}\,\partial\,\bar\partial\,\|z\| = \frac{i}{2}\sum\limits_{j=1}^{n} d\,z_j\wedge d\,\bar z_j$ (тобто $d\,\omega(z)=0$).

Означення 2. Дійснозначний замкнений потік типу міри бі-степеня $(1,1)$ в $\mathbb{C}^n$ називатимемо ***потоком обмеженої варіації***, якщо його можна зобразити у вигляді різниці двох додатних замкнених потоків бі-степеня $(1,1)$ в $\mathbb{C}^n$.

Зазначимо (див., наприклад, [8, с. 53], [13, додаток 5.3]), що регуляризація $(t)_\varepsilon$ довільного дійснозначного потоку t типу міри в $\mathbb{C}^n$

$$(t)_\varepsilon = t*\rho_\varepsilon = \frac{i}{2}\sum_{j,k=1}^{n}(t_{j,k})_\varepsilon\,d\,z_j\wedge d\,\bar z_k$$

є дійснозначною диференціальною формою класу C^∞, де $(t_{j,k}) = t_{j,k}*\rho_\varepsilon$ – згортка коефіцієнтів-розподілів $t_{j,k}$ цього потоку t з функцією $\rho_\varepsilon(z) = \rho\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-2n}$, а $\rho(z)$ – невід'ємна нескінченно диференційовна функція з компактним носієм у кулі $\{z\in\mathbb{C}^n : \|z\|<1\}$ така, що $\int_{\mathbb{C}^n}\rho(z)\,\beta^n(z) = 1$ і, крім того, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(t_\varepsilon,\psi) = (t,\psi)$ для довільної форми ψ з простору $D^0_{n-1}(\mathbb{C}^n)$.

Отже, очевидним є твердження.

Теорема 1. *Потік t обмеженої варіації є потоком, асоційованим за Рісом з дійснозначною функцією w тоді і тільки тоді, коли w є δ-плюрисубгармонійною в $\mathbb{C}^n$ функцією.*

За аналогією до одновимірного випадку [4] введемо означення.

Означення 3. Нехай w – δ-плюрисубгармонійна в $\mathbb{C}^n$ функція, $t_w = \frac{i}{2}\,\partial\,\bar\partial\,w$ – її потік, t_w^+, t_w^- – додатна та від'ємна варіації t_w відповідно. ***Канонічним зображенням*** δ-плюрисубгармонійної в $\mathbb{C}^n$ функції w називається пара плюрисубгармонійних в $\mathbb{C}^n$ функцій (u_1,u_2) така, що $w = u_1 - u_2$, $t_{u_1} = \frac{i}{2}\,\partial\,\bar\partial\,u_1 = t_w^+$, $t_{u_2} = \frac{i}{2}\,\partial\,\bar\partial\,u_2 = t_w^-$. Функцію $\Omega = \max\{u_1,u_2\}$, де (u_1,u_2) – канонічне зображення w, назвемо ***канонічною обвідною*** функції w.

Зазначимо [8, додаток 1], що канонічна обвідна є плюрисубгармонійною функцією, отже, й субгармонійною в $\mathbb{C}^n$, тому $\Omega\in L^1_{loc}(\mathbb{C}^n)$. Крім того, оскільки носії потоків t_w^+ і t_w^- можуть перетинатися по множині, на якій вони одночасно пертворюються в нуль, то канонічне зображення (u_1,u_2) функції w визначається з точністю до спільного доданка – плюригармонійної в $\mathbb{C}^n$ функції.

Через $\delta-\mathrm{PSH}(\mathbb{C}^n)$ позначимо простір δ-плюрисубгармонійних в $\mathbb{C}^n$ функцій w, плюригармонійних в деякому околі нуля, таких, що $u_1(0)=0,\ u_2(0)=0$, де (u_1,u_2) – канонічне зображення w. Для довільної функції $w\in\delta-\mathrm{PSH}(\mathbb{C}^n)$ означимо її неванліннову характеристику $T(r,w)$ співвідношенням

$$T(r,w)=\frac{1}{|S_n|}\int_{S_n}\Omega(ry)\,d\,S(y),\qquad r>0,$$

де $|S_n|$ – площа одиничної сфери $S_n=\{y\in\mathbb{C}^n:\|y\|=1\}$ в $\mathbb{C}^n$, $d\,S(y)$ – елемент її площі, а Ω – канонічна обвідна функції w. Позаяк міра $d\,S(y)$ інваріантна відносно обертань в $\mathbb{C}^n$ [14, с. 21], то

$$T(r,w)=\frac{1}{|S_n|}\int_{S_n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Omega(re^{i\theta}y)\,d\,\theta\right)d\,S(y).$$

Зазначимо, що функція

$$T_y(r,w)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Omega(re^{i\theta}y)\,d\,\theta$$

– неванліннова характеристика зріз-функції $w_y(z)=w_{0,y}(z)=w(zy),\ y\in S_n,\ z\in\mathbb{C}$, тобто $T_y(r,w)=\widetilde{T}(r,w_y)$, де $\widetilde{T}(r,w_y)$ – неванліннова харктеристика δ-субгармонійної в $\mathbb{C}$ функції $w_y(z),\ z\in\mathbb{C}$. Крім того (див., наприклад, [7, лема 2.4], [8, додаток 1], [9, с. 124]), характеристика $T_y(r,w)$ є плюрисубгармонійною в $\mathbb{C}^n$ функцією змінної $y\in\mathbb{C}^n$.

II. Формулювання та доведення основних результатів

Основні властивості неванліннових характеристик $T(r,w),\ r>0$, зростання δ-плюрисубгармонійних функцій w описано в таких твердженнях.

Теорема 2. *Для всіх $y\in S_n$ виконується нерівність*

$$T_y(r,w)\le 3\cdot 2^{2n-2}\,T(2r,w).$$

□ *Доведення.* Нехай $y\in S_n$, а $\Omega(zy)$ – канонічна обвідна δ-субгармонійної в $\mathbb{C}$ функції $w_y(z)=w(zy),\ z\in\mathbb{C}$. Розглянемо функцію

$$v(\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Omega(e^{i\theta}\eta)\,d\,\theta,\qquad \eta\in\mathbb{C}^n.$$

Позаяк функція $\Omega(zy)$ – субгармонійна по $z\in\mathbb{C}$ для кожного $y\in S_n$, то $v(|z|y)\ge\Omega(0\cdot y)=0$, тобто $v(\eta)\ge 0$ для всіх $\eta\in\mathbb{C}^n$. З іншого боку (див., наприклад, [7, лема 3.12], [8, додаток 1], [11, с. 124]), функція $v(\eta)$ – плюрисубгармонійна в $\mathbb{C}^n$. Тоді для довільного $y\in\mathbb{C}^n,\ \|y\|=t,\ 0<t<1$, з огляду на лему 3.12 з [7], маємо

$$v(\tau y)\le\frac{1+t}{(1-t)^{2n-1}}\cdot\frac{1}{|S_n|}\int_{S_n}v(\tau z)\,d\,S(z),$$

$0<\tau<+\infty$. Прийнявши $t=\dfrac{1}{2},\ \tau=2r$, отримуємо потрібну нерівність

$T_y(r,w)=v(ry)\le\frac{3\cdot 2^{2n-2}}{|S_n|}\int_{S_n}v(2rz)\,d\,S(z)=3\times 2^{2n-2}T(2r,w)$. ■

Нехай $w\in\delta-\mathrm{PSH}(\mathbb{C}^n)$. Для довільного $r>0$ позначимо

$$m(r,w)=\frac{1}{|S_n|}\int_{S_n}w^+(ry)\,d\,S(y),\qquad m(r,-w)=\frac{1}{|S_n|}\int_{S_n}w^-(ry)\,d\,S(y),$$

$$N(r,w)=\frac{1}{|S_n|}\int_{S_n}u_2(ry)\,d\,S(y),\qquad N(r,-w)=\frac{1}{|S_n|}\int_{S_n}u_1(ry)\,d\,S(y),$$

де $w^+=\max\{w,0\},\ w^-=(-w)^+,\ (u_1,u_2)$ – канонічне зображення w. Враховуючи рівності $\max\{u_1,u_2\}=w^++u_2=w^-+u_1$, отримуємо

$$T(r,w)=m(r,w)+N(r,w)=m(r,-w)+N(r,-w).$$

Зауважимо, що якщо $w=U-V$ – деяке зображення функції $w\in\delta-\mathrm{PSH}(\mathbb{C}^n)$, то знайдеться плюрисубгармонійна в $\mathbb{C}^n$, плюригармонійна в деякому околі нуля функція $p(z)$ така, що $U=u_1+p,\ V=u_2+p$, де (u_1,u_2) – канонічне зображення w і, оскільки $\max\{U,V\}=\max\{u_1,u_2\}+p$, то

$$\frac{1}{|S_n|}\int_{S_n}\max\{U(ry),V(ry)\}\,d\,S(y)=T(r,w)+\frac{1}{|S_n|}\int_{S_n}p(ry)\,d\,S(y)\ge T(r,w),$$

бо $\dfrac{1}{|S_n|}\int_{S_n}p(ry)\,d\,S(y)\ge 0$.

Теорема 3. *Нехай $w,\ w_1,\ w_2$ належать до $\delta-\mathrm{PSH}(\mathbb{C}^n)$. Тоді*

1) $\forall\, c\in\mathbb{R}:\ T(r,cw)=|c|\,T(r,w);$

2) $T(r,w_1+w_2)\le T(r,w_1)+T(r,w_2)-\dfrac{1}{|S_n|}\int\limits_{S_n}p(ry)\,d\,S(y),$

де p – деяка плюрисубгармонійна в $\mathbb{C}^n$ функція;

3) $T_{zy}(r,w) = T_y(r|z|,w)$ *для всіх* $r \geq 0,\ z \in \mathbb{C},\ y \in \mathbb{C}^n$.

□ *Доведення.* Здійснимо міркування, аналогічні до наведених в [4]. Нехай (u_1, u_2) – канонічне зображення w. Зазначимо, що функція $|c| \max\{u_1, u_2\}$ є канонічною обвідною функції $cw \in \delta - \mathrm{PSH}(\mathbb{C}^n)$, тому $T(r, cw) = |c|\, T(r, w)$.

Нехай $(u_1, v_1),\ (u_2, v_2)$ – канонічні зображення w_1 та w_2, а (u, v) – канонічне зображення $w_1 + w_2$. Тоді знайдеться плюрисубгармонійна в $\mathbb{C}^n$ функція p, плюригармонійна в деякому околі нуля, $p(0) = 0$, така, що $u_1 + u_2 = u + p,\ v_1 + v_2 = v + p$. Далі, враховуючи нерівність $\max\{u, v\} \leq \max\{u_1, v_1\} + \max\{u_2, v_2\} - p$, отримуємо співвідношення

$$T(r, w_1 + w_2) \leq T(r, w_1) + T(r, w_2) -$$
$$- \frac{1}{|S_n|} \int_{S_n} p(ry)\, d\,S(y) \leq T(r, w_1) + T(r, w_2).$$

Нехай Ω – канонічна обвідна функції w. Тоді, з огляду на періодичність функції e^{ix}, отримуємо

$$T_{zy}(r,w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Omega(re^{i\theta}zy)\, d\,\theta =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Omega(r|z|e^{i\theta+\varphi}y)\, d\,\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Omega(r|z|e^{it}y)\, d\,t =$$
$$= T_y(r|z|, w).$$

■

Теорема 4. *Нехай* $w \in \delta - \mathrm{PSH}(\mathbb{C}^n),\ y_0 \in \mathbb{C}^n,\ g(y) = w(y + y_0),\ y \in \mathbb{C}^n$. *Тоді*

$$T(r,w) \leq 3 \cdot 2^{2n-1} \left(1 + \frac{\|y_0\|}{r}\right)^{2n-1} T(2r + \|y_0\|, g).$$

□ *Доведення.* Нехай $\Omega(z),\ z \in \mathbb{C}^n$, – канонічна обвідна функції w. Функція $\Omega(z)$ обмежена, плюрисубгармонійна (отже, й субгармонійна) в $\mathbb{C}^n$, плюригармонійна в деякому околі нуля і $\Omega(0) = 0$. Крім того, додавши, якщо це потрібно, плюригамонійну функцію, можемо вважати, що $\forall z \in \mathbb{C}^n:\ \Omega(z) \geq 0$. Тоді

$$T(r,w) = \frac{1}{|S_n|}\int_{S_n} \Omega(ry)\, d\,S(y) = \frac{r^{2n-2}}{|S_n| r^{2n-1}} \int_{\|y\|=r} \Omega(y)\, d\,S_r(y),$$

а

$$T(R,g) = \frac{1}{|S_n|}\int_{S_n} \Omega(Ry + y_0)\, d\,S(y) = \frac{R^{2n-2}}{|S_n| R^{2n-1}} \int_{\|y-y_0\|=R} \Omega(y)\, d\,S_R(y),$$

де $d\,S_t(y)$ – елемент площі сфери радіуса t в $\mathbb{C}^n$.

З огляду на теорему 2.5 з [5], маємо

$$\Omega(ry) \leq \frac{R^{2n-2}}{|S_n| R^{2n-1}} \int_{\|\eta-y_0\|=R} \Omega(\eta) \frac{R^2 - \|ry - y_0\|^2}{\|\eta - ry\|^{2n}}\, d\,S_R(\eta).$$

При $R = \|\eta - y_0\| = 2r + \|y_0\|$ маємо $\|\eta - ry\| \geq r,\ R^2 - \|ry - y_0\|^2 \leq (2r + \|y_0\|)^2 - (r - \|y_0\|)^2 = 3r(r + 2\|y_0\|)$. Тому

$$\Omega(ry) \leq \frac{3r(2r + \|y_0\|)^{2n-2}(r + 2\|y_0\|)}{r^{2n}|S_n|(2r + \|y_0\|)^{2n-1}} \int_{\|\eta-y_0\|=R} \Omega(\eta)\, d\,S_R(\eta) \leq 3 \cdot 2^{2n-1} \left(1 + \frac{\|y_0\|}{r}\right)^{2n-1} T(2r + \|y_0\|, g).\ ■$$

Теорема 5. *Нехай* $w \in \delta - \mathrm{PSH}(\mathbb{C}^n)$ *і нехай відображення* $\tau : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ *є* $\mathbb{C}$*-лінійним. Тоді знайдуться додатні сталі* A *і* B *такі, що* $T(r, w \circ \tau) \leq T(B\,r\,M_\tau, w)$, *де* $M_\tau = \max\{|\tau(y)| : y \in S_m\}$.

□ *Доведення* аналогічне до наведеного в [2, с. 339]. Функція $w \circ \tau \in \Delta ps(\mathbb{C}^m)$ [9, с. 259]. Зафіксуємо $y \in S_m$. Якщо $\tau(y) = 0$, то звуження $w \circ \tau$ на комплексну пряму, що проходить через точки 0 та y, дорівнює $w(\tau(y)) = w(0) = 0$, звідки випливає, що $T_y(r, w \circ \tau) \equiv 0$ для довільного $r > 0$. Якщо $\tau(y) \neq 0$, то таке звуження співпадає зі звуженням функції w на комплексну пряму, що проходить через точки 0 та $\tau(y)$ в $\mathbb{C}^n$. Тому для довільного $r > 0$, з урахуванням теорем 2 і 3, справджуються співвідношення

$$T_y(r, w \circ \tau) = T_{\tau(y)}(r, w) = T_\eta(r|\tau(y)|, w) \leq$$
$$\leq A\, T_\eta(r\,M_\tau, w) \leq A\, T(B\,M_\tau r, w),$$

де $\eta = \dfrac{\tau(y)}{|\tau(y)|},\ M_\tau = \max\{|\tau(y)| : y \in S_m\}$.

Отже, для довільних $y \in S_m$ і $r > 0$ виконується нерівість $T_y(r, w \circ \tau) \leq T(B\,r\,M_\tau, w)$, а тому $T(r, w \circ \tau) \leq T(B\,r\,M_\tau, w)$. ■

Варто також відзначити (див., наприклад, [8, додаток 1], [11, с. 125, 138], [5, с. 81]), що функція $T(r, w)$ опукла відносно $\log r$ і неспадна (це правильно для субгармонійних в $\mathbb{C}^n$ функцій, а отже, й для плюрисубгармонійних). Такі самі властивості має функція $T_y(r,w)$ – неванліннова характеристика зріз-функції $w_y(z) = w(zy)$, $z \in \mathbb{C}$, $y \in S_n$, яка, крім того, є необмеженою при $r \to +\infty$. Отже, необмеженою при $r \to +\infty$ є і функція $T(r,w)$.

Додатну неперервну на $(0,+\infty)$ функцію $\lambda(r)$, $\lambda(r) \nearrow +\infty$ при $r \to +\infty$, називатимемо *функцією зростання.*

Нехай λ – фіксована функція зростання. Функція $w \in \delta-\mathrm{PSH}(\mathbb{C}^n)$ називається (порівн. з [15]) *δ-плюрисубгармонійною функцією скінченного λ-типу*, якщо знайдуться додатні сталі A, B такі, що для всіх $r > 0$ виконується нерівність $T(r,w) \le A\,\lambda(B\,r)$. Клас таких функцій позначатимемо через $\Lambda^n_{\delta P}$.

Класи $\Lambda^n_{\delta P}$ узагальнюють класи мероморфних в $\mathbb{C}^n$ функцій скінченного λ-типу, введених і досліджених в [7] (порівн. з [16]).

Теорема 6. *1) Сім'я функцій $\delta-\mathrm{PSH}(\mathbb{C}^n)$ утворює лінійний простір над полем дійсних чисел по відношенню до звичайних операцій додавання функцій і множення на дійсне число. Більше того, це решітка Ріса, тобто, якщо $w_1, w_2, w\in\delta-\mathrm{PSH}(\mathbb{C}^n)$, то такими самими будуть і функції $\max\{w_1,w_2\}$, $\min\{w_1,w_2\}$, $|w|$.*

2) Клас $\Lambda^n_{\delta P}$ утворює решітку Ріса, тобто, якщо w_1, w_2, w належать $\Lambda^n_{\delta P}$, то функції $\max\{w_1,w_2\}$, $\min\{w_1,w_2\}$, $|w|$ також належать $\Lambda^n_{\delta P}$.

$\square$ *Доведення.* З огляду на загальновідомі властивості плюрисубгармонійних функцій (див., наприклад, [8], [11], [9], [12], [15]), доведення твердження п. 1) цієї теореми цілком аналогічне до доведення теорем 21 та 22 з [4], і тому ми його опускаємо.

Враховуючи співвідношення $2\max\{w_1,w_2\} = \{w_1+w_2+|w_1-w_2|\}$,$2\min\{w_1,w_2\} = \{w_1+w_2-|w_1-w_2|\}$, і теорему 3, не важко зауважити, що достатньо встановити лише імплікацію $w \in \Lambda^n_{\delta P} \Longrightarrow |w| \in \Lambda^n_{\delta P}$.

Нехай (u,v) – канонічне зображення функції $w \in \Lambda^n_{\delta P}$. Правильна рівність $|w| = 2\max\{u,v\}-u-v$. Позначимо $p_1 = 2\max\{u,v\}$, $p_2 = u+v$. Функції p_1, $p_2 \in \Lambda^n_{\delta P}$, $|w| = p_1 - p_2$ і, крім того, $T(r,|w|) \le \frac{1}{|S_n|}\int\limits_{S_n} \max\{p_1(ry),p_2(ry)\}\,dS(y) = \frac{1}{|S_n|}\int\limits_{S_n}(p_1(ry)-p_2(ry))^+\,dS(y) + \frac{1}{|S_n|}\int\limits_{S_n} p_2(ry)\,dS(y) = \frac{1}{|S_n|}\int\limits_{S_n}|w(ry)|\,dS(y) + \frac{1}{|S_n|}\int\limits_{S_n} u(ry)\,dS(y) + \frac{1}{|S_n|}\int\limits_{S_n} v(ry)\,dS(y) = 2\,T(r,w) \le 2\,A\,\lambda(B\,r)$. $\blacksquare$

Висновки

У цій статті розглянуто такі об'єкти: δ-плюрисубгармонійні в $\mathbb{C}^n$ $(n \ge 2)$ функції; потоки, асоційовані за Рісом з такими функціями та основні характеристики Неванлінни зростання таких функцій. Вивчено загальні властивості цих характеристик і наведено одне застосування до опису алгебраїчної структури класу δ-плюрисубгармонійних функцій скінченного λ-типу, де λ – довільна функція зростання. Всі розглянуті в роботі об'єкти та встановлені нами властивості таких об'єктів становлять інтерес, як для загальної теорії зростання плюрисубгармонійних функцій, так і для теорії розподілу значень таких функцій.

Література

[1] Nevanlinna R. Zur Theorie der meromorphen Functionen / R. Nevanlinna // Acta math. – 1925. – V. 46. – P. 1–99.

[2] Гольдберг А. А. Распределение значений мероморфных функций / А. А. Гольдберг, И. В. Островский. – Москва: Наука, 1970. – 592 с.

[3] Хейман У. К. Мероморфные функции / У. К. Хейман. – Москва: Мир, 1966. – 287 с.

[4] Arsove M. Functions representable as differences of subharmonic functions / M. Arsove // Trans. Amer. Math. Soc. – 1953. – V. 75. – P. 327–365.

[5] Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции, Т. 1 / У. Хейман, П. Кеннеди. – Москва: Мир, 1980. – 340 с.

[6] Hayman W. K. Subharmonic functions. Vol. 2 / W. K. Hayman. – London Mathematical Society Monographs, 20, Academic Press, Inc., 1989. – 876 p.

[7] Kujala R. O. Functions of finite λ-type in several complex variable / R. O. Kujala // Trans. Amer. Math. Soc. – 1971. – V. 161. – P. 327–358.

[8] Лелон П., Груман Л. Целые функции многих комплексных переменных / П. Лелон, Л. Груман. – Москва: Мир, 1986. – 350 с.

[9] Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих комплексных переменных /Л. И. Ронкин. – Москва: Наука, 1971. – 430 с.

[10] Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ, Ч. 2 / Б. В. Шабат. – Москва: Наука, 1985. – 464 с.

[11] Lelong P. Fonctions plurisousharmoniques et formes differentielles positives / P. Lelong. – Paris-London-New York: Gordon and Breach, 1968. – 79 p.

[12] Stoll W. The Alfors-Weyl theory of meromorphic maps on parabolic manifolds / W. Stoll // Lecture Notes Math. – 1983. – V. 981. – P. 101–219.

[13] Чирка Е. М. Комплексные множества / Е. М. Чирка. – М.: Наука, 1985. – 272 с.

[14] Рудин У. Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$ / У. Рудин. – М.: Мир, 1984. – 455 с.

[15] Noverraz P. Functions plurisousharmoniques et analytiques dans les espaces vectoriels topologiques complexes / P. Noverraz // Ann. Inst. Fourier. – 1969. – V. 19, No 2. – P. 419–493.

[16] Rubel L. A., Taylor B. A. A Fourier series method for meromorphic and entire functions / L. A. Rubel, B. A. Taylor // Bull. Soc. Math. France. – 1968. – V. 96. – P. 53–96.

ХАРАКТЕРИСТИКА НЕВАНЛИННЫ РОСТА ДЕЛЬТА-ПЛЮРИСУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

О. Бродяк[a], Я. Василькив[b], С. Тарасюк[b]

[a] *Национальный университет “Львивсъка политехника”,*
ул. С. Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина
[b] *Львовский национальный университет имени Ивана Франка,*
ул. Университетская, 1, 79000, Львов, Украина

Для δ-плюрисубгармонических в $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ функций (т. е. разностей плюрисубгармонических функций), введен аналог характеристики Неванлинны роста таких функций и изучены её основные свойства. Кроме этого, рассмотрен класс δ-плюрисубгармонических функций конечного λ-типа (обобщение хорошо известных класов мероморфных в $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 1)$ функций конечного λ-типа, введенных и изученных Л. А. Рубелом, Б. А. Тейлором и Р. Куюлой) и установлено, что этот класс образует решетку Рисса.

Ключевые слова: субгармоническая функция, плюрисубгармоническая функция, характеристика Неванлинны, распределение значений.

2000 MSC: 31C10, 32U05

УДК: 517.576

NEVANLINA’S GROWTH CHARACTERISTIC FOR DELTA-PLURISUBHARMONIC FUNCTIONS

O. Brodyak[a], Ya. Vasylkiv[b], S. Tarasyuk[b]

[a] *National University “Lvivska Politechnika”,*
12 S. Bandera Str., Lviv, UA-79013, Ukraine
[b] *Ivan Franko Lviv National University,*
1 Universutets’ka Srt., Lviv, UA - 79000, Ukraine

For δ-plurisubharmonic in $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ functions (ie differences plurisubharmonic functions), introduced the similar to Nevanlinna’s characteristics of growth for such functions and studied its basic properties. In addition, the class δ-plurisubharmonic functions of finite λ-type (generalization of well known classes of meromorphic in $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 1)$ functions of finite λ-type introduced and studied by L. A. Rubel, B. A. Taylor and R. Kujala) was introdused and found that this class forms Riesz’s lattice.

Keywords: subharmonic functions, plurisubharmonic functions, Nevanlinna’s characteristic, value distribution.

2000 MSC: 31C10, 32U05

УДК: 517.576