ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.687 № 687, (2010) с. 29–58

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.687 No 687, (2010) 29–58

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА РОЗСІЯННЯ ДЛЯ ПРОСТОРОВО-ДВОВИМІРНОЇ СИСТЕМИ ДІРАКА І МЕТОД БІНАРНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Ю. Сидоренко[a], М. Починайко[b], О. Чвартацький[a]

[a] *Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська 1, 79000, Львів, Україна*
*y_sydorenko*franko.lviv.ua
[b] *Національний університет "Львівська політехніка" вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна*

(Отримано 12 лютого 2010 р.)

Методом бінарних перетворень знайдено всі основні об'єкти (оператори) оберненої задачі розсіяння для системи Дірака. Доведено їхню еквівалентність з операторами, отриманими за класичного підходу Марченка-Гельфанда-Левітана.

Ключові слова: система Дірака, бінарні перетворення, обернена задача розсіяння.

2000 MSC: 33Q58, 37K10, 37K15

УДК: 517.9

ВСТУП

Одним з найвидатніших досягнень в галузі точних природничих наук другої половини минулого століття по праву вважають відкриття у 1967 році Гарднером, Гріном, Крускалом і Міурою того факту, що для відомого нелінійного рівняння Кортевега - де Вріза (KdV) існує аналітичний метод розв'язання задачі Коші. Невдовзі Пітер Лакс зробив фундаментальне відкриття можливості застосування аналогічних методів дослідження для інших нелінійних динамічних систем, яке спричинило справжню наукову революцію у нелінійній фізиці, що істотно змінило погляди і підходи до багатьох нелінійних моделей сучасного природознавства. У результаті, на початку 70-х років XX століття на стику багатьох дисциплін (диференціальні рівняння, математична та теоретична фізика, функціональний аналіз, теоретико-груповий аналіз, алгебрична геометрія тощо) виник окремий підрозділ сучасного природознавства – теорія солітонів (або МОЗР – метод оберненої задачі розсіяння, теорія інтегровних динамічних систем тощо). У класичному варіанті МОЗР ключове значення під час дослідження як задачі Коші, так і у разі побудови точних розв'язків для нелінійної моделі, мають операторне зображення Лакса і рівняння Марченка-Гельфанда-Левітана оберненої задачі для одного з лінійних операторів комутуючої пари Лакса. Важливі аналітичні результати стосовно прямої і оберненої задач теорії розсіяння в багатовимірному випадку отримав Л.П. Нижник [1] і Л.Д. Фаддєєв [2]. Це дозволило дослідити такі фізично важливі багатовимірні системи, як рівняння Деві - Стюартсона (просторово-двовимірні узагальнення нелінійного рівняння Шредінгера), просторові узагальнення рівнянь KdV та деякі інші майже з тією самою повнотою, що й методом Фур'є в лінійному випадку [3–7]. Алгебризованіші версії МОЗР започатковані у роботах Захарова - Шабата [4,5] за, так званим, методом одягання диференціальних операторів, і з робіт, присвячених застосуванню класичних перетворень Беклунда - Дарбу в теорії солітонів (Вадаті - Тода, Калоджеро - Дегаспеpіс, В.Б. Матвєєв [8]). Розвиненню цих алгебричних ідей присвячені роботи Б. Конопельченка, В. Євела, В. Штраммпа та багатьох інших науковців, зокрема і одного з авторів цієї праці. Так, на початку 90-х років минулого століття виникло поняття нелокальної симетрійної редукції і нелокально-редукованої ієрархії Кадомцева - Петвіашвілі. А саме, було продемонстровано, що накладання нелокальної в'язі на оператор Лакса редукує (2+1)-вимірну ієрархію КП до інтегровних (1+1)-вимірних ієрархій, серед яких містяться як векторно-матричні узагальнення добре відомих моделей, так і значна кількість нових систем теорії солітонів [9-16]. Пошуку нових інтегровних нелокальних редукцій в операторних ієрархіях Лакса за два останні десятиріччя приділялась значна увага і велика кількість наукових публікацій. Проте, у цій тематиці залишається багато нез'ясованих питань, оскільки редукований оператор Лакса є, по-перше, інтегро-диференціальним, і, по-друге, він, як правило, у фізично-важливих випадках допускає нетривіальну групу редукцій [17–19]. Це обумовлює відсутність нині вичерпних аналітичних результатів по прямій і оберненій задачах розсіяння для таких операторів, що, своєю чергою, вимагає розвитку альтернативних алгебричних методів інтегрування інтегро-диференціальних лаксових зображень. Власне, ці питання і є предметом дослідження в роботі.

Метою роботи є побудова всіх основних об'єктів оберненої задачі розсіяння для гіперболічної системи

Дірака у випадку вироджених даних розсіяння (які є всюди щільними серед даних розсіяння з $L_2(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C})$) двома альтернативними способами: класичним методом Марченка-Гельфанда-Левітана та методом бінарних перетворень, запропонованим в роботах [20–26,19]. У роботі отримані такі результати:

– доведено існування спеціальної факторизації операторів S(221), (296) та $\hat{S}$ (270), (298);

– у випадку вироджених даних розсіяння знайдено в явному вигляді всі елементи оператора S та оберненого до нього оператора S^{-1};

– отримано в явному вигляді дві пари операторів перетворень, що факторизують оператори S (12),(47), (221), (296) та $\hat{S}$ (253), (270), (298);

– знайдено зображення загального розв'язку нестаціонарної системи Дірака для відповідних асимптотик і спеціальних класів потенціалів (коефіцієнтів), всюди щільних в $L_2(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C})$;

– методом бінарних перетворень знайдено всі основні об'єкти оберненої задачі розсіяння та доведено їх еквівалентність з операторами, отриманими за класичним підходом Марченка-Гельфанда-Левітана.

Алгебризований підхід другої частини роботи, який базується на знайдених явно операторах бінарних перетворень, дозволяє уникнути тонких аналітичних питань постановки і дослідження прямих і обернених задач розсіяння для широкого класу нестаціонарних інтегро-диференціальних лаксових зображень. Крім того, він дає змогу отримувати значно ширші класи потенціалів (не обов'язково у просторі $L_2(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C})$), при яких відповідні лінійні задачі (взагалі кажучи, інтегро-диференціальні – див. теорему 10) є інтегровними.

Нижче ми наводимо добре відомі формули для композицій інтегральних операторів та деякі скорочення для операторів з виродженими ядрами, які постійно використовуються в основному тексті роботи, особливо у разі складних технічних перетворень у доведеннях цієї роботи. Розглянемо простір $L_2(\mathbb{R} \to \mathbb{C}^n)$ всіх вимірних векторнозначних функцій $f(x)$. В цьому просторі введемо такі оператори:

1. $K_+f(x) := \int_{-\infty}^{x} K_+(x,s)f(s)ds$ – вольтерівський оператор зі змінною верхньою межею, де ядро при фіксованих x та s є матрицею розмірності $(n \times n)$.

2. $K_-f(x) := \int_{x}^{+\infty} K_-(x,s)f(s)ds$ – вольтерівський оператор зі змінною нижньою межею.

3. $Rf(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} R(x,s)f(s)ds$ – фредгольмівський оператор.

Розпишемо всеможливі композиції операторів 1–3, які використовуються в роботі:

$$(K_{1+}K_{2+})f(x) = \int_{-\infty}^{x} K_{1+}(x,s)\left\{\int_{-\infty}^{s} K_{2+}(s,z)f(z)dz\right\}ds = \int_{-\infty}^{x}\left\{\int_{z}^{x} K_{1+}(x,s)K_{2+}(s,z)ds\right\}f(z)dz. \tag{1}$$

$$(K_{1-}K_{2-})f(x) = \int_{x}^{+\infty} K_{1-}(x,s)\left\{\int_{s}^{+\infty} K_{2-}(s,z)f(z)dz\right\}ds = \int_{x}^{+\infty}\left\{\int_{x}^{z} K_{1-}(x,s)K_{2-}(s,z)ds\right\}f(z)dz. \tag{2}$$

$$\begin{aligned}&(K_{1+}K_{2-})f(x) = \int_{-\infty}^{x} K_{1+}(x,s)\left\{\int_{s}^{+\infty} K_{2-}(s,z)f(z)dz\right\}ds = \\ &= \int_{-\infty}^{x}\left\{\int_{-\infty}^{z} K_{1+}(x,s)K_{2-}(s,z)ds\right\}f(z)dz + \int_{x}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{x} K_{1+}(x,s)K_{2-}(s,z)ds\right\}f(z)dz.\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}&(K_{1-}K_{2+})f(x) = \int_{x}^{+\infty} K_{1-}(x,s)\left\{\int_{-\infty}^{s} K_{2+}(s,z)f(z)dz\right\}ds = \\ &= \int_{-\infty}^{x}\left\{\int_{x}^{+\infty} K_{1-}(x,s)K_{2+}(s,z)ds\right\}f(z)dz + \int_{x}^{+\infty}\left\{\int_{z}^{+\infty} K_{1-}(x,s)K_{2+}(s,z)ds\right\}f(z)dz.\end{aligned} \tag{4}$$

$$(RK_+)f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x,s)\left\{\int_{-\infty}^{s} K_+(s,z)f(z)dz\right\}ds = \int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{z}^{+\infty} R(x,s)K_+(s,z)ds\right\}f(z)dz. \tag{5}$$

$$(K_+R)f(x) = \int_{-\infty}^{x} K_+(x,s)\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} R(s,z)f(z)dz\right\}ds = \int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{x} K_+(x,s)R(s,z)ds\right\}f(z)dz. \tag{6}$$

$$(RK_-)f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x,s)\left\{\int_{s}^{+\infty} K_-(s,z)f(z)dz\right\}ds = \int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{z} R(x,s)K_-(s,z)ds\right\}f(z)dz. \tag{7}$$

$$(K_-R)f(x) = \int_{x}^{+\infty} K_-(x,s)\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} R(s,z)f(z)dz\right\}ds = \int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{x}^{+\infty} K_-(x,s)R(s,z)ds\right\}f(z)dz. \tag{8}$$

Зауваження 1. Для інтегральних операторів (1)–(3) з виродженими ядрами в роботі прийняті скорочені позначення. Якщо ядро A(x,y) інтегрального оператора A допускає факторизацію (тобто, є виродженим) вигляду $A(x,y) = A_1(x)A_2(y)$, то оператор A зображатимемо так: $A = A_1(x)\int A_2(y)\cdot dy$, де пропущені межі інтегрування відображають тип відповідного оператора 1–3.

I. Обернена задача для системи Дірака

Розглянемо двовимірну двокомпонентну систему рівнянь Дірака вигляду

$$\begin{aligned}&\frac{\partial Y_1(x,y)}{\partial x} + u_1(x,y)Y_2(x,y) = 0,\\ &\frac{\partial Y_2(x,y)}{\partial y} + u_2(x,y)Y_1(x,y) = 0,\end{aligned} \tag{9}$$

в припущенні, що коефіцієнти $u_1(x,y), u_2(x,y)$ є комплекснозначними, вимірними за x та y функціями, інтегровними з квадратом за двома змінними

$$u_1, u_2 \in L_2(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}). \tag{10}$$

Розглянемо простір Υ пар функцій $Y_1(x,y), Y_2(x,y)$, де функції Y_1, Y_2 вимірні за змінними x та y з нормою

$$\|Y\|_\Upsilon = \max\Big\{ \operatorname{vrai\,sup}_x \Big[\int_{-\infty}^{\infty} |Y_1(x,y)|^2 dy \Big]^{\frac{1}{2}},$$

$$\operatorname{vrai\,sup}_y \Big[\int_{-\infty}^{\infty} |Y_2(x,y)|^2 dx \Big]^{\frac{1}{2}} \Big\}.$$

Вектор-функцію $Y(x,y) = (Y_1(x,y), Y_2(x,y))$ називатимемо припустимим розв'язком системи (9), якщо $Y_1(x,y)$, $Y_2(x,y)$ задовольняють систему (9) в сенсі теорії узагальнених функцій.

Теорема 1. [27, 3] *Нехай коефіцієнти системи (9) задовольняють умови (10). Тоді для припустимого розв'язку* $Y = (Y_1, Y_2)$ *системи (9) існують в* $L_2(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$ *границі*

$$\begin{array}{l} L_- Y_1(x,y) := Y_1(-\infty, y) = a_1(y), \\ L_+ Y_1(x,y) := Y_1(+\infty, y) = b_1(y), \\ L^- Y_2(x,y) := Y_2(x, -\infty) = a_2(x), \\ L^+ Y_2(x,y) := Y_2(x, +\infty) = b_2(x). \end{array} \tag{11}$$

Для кожної з пар (a_1, a_2), (b_1, b_2), (a_1, b_2), (b_1, a_2) *довільно заданих функцій з* $L_2(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$ *існує єдиний припустимий розв'язок, для якого ця пара є відповідною (11) асимптотикою на безмежності.*

Теорема 1 дає можливість розв'язати пряму задачу розсіяння, яка полягає в знаходженні розв'язків системи (9) за однією із згадуваних пар асимптотик. Отже, з теореми 1 слідує, що кожній парі a_1, a_2 функцій з $L_2(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$ відповідає єдиний розв'язок прямої задачі розсіяння для системи (9) і цьому ж розв'язку відповідає пара асимптотик b_1, $b_2 \in L_2(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$ на іншій безмежності. Це означає, що існує оператор S, який перетворює падаючі хвилі $a = (a_1(y), a_2(x))^\top$ в розсіяні $b = (b_1(y), b_2(x))^\top$ і визначається рівністю:

$$\begin{pmatrix} b_1(y) \\ b_2(x) \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} a_1(y) \\ a_2(x) \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Обернена задача розсіяння для системи (9) полягає в знаходженні коефіцієнтів (потенціалів) u_1, u_2 за заданим оператором S.

Оператор розсіяння $\tilde{S}$ для системи (9) зв'язує профілі падаючих та розсіяних хвиль і визначається рівністю

$$\begin{pmatrix} b_1(\tau) \\ b_2(\tau) \end{pmatrix} = \tilde{S} \begin{pmatrix} a_1(\tau) \\ a_2(\tau) \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Простий зв'язок між операторами S та $\tilde{S}$ задається формулою (50) (див. теорему 3).

Оператор розсіяння для системи (9) можна ввести, очевидно, і іншим способом. А саме, можна визначити оператор $\hat{\tilde{S}}$, наприклад, так:

$$\begin{pmatrix} a_1(\tau) \\ b_2(\tau) \end{pmatrix} = \hat{\tilde{S}} \begin{pmatrix} b_1(\tau) \\ a_2(\tau) \end{pmatrix}, \tag{14}$$

а відповідний оператор $\hat{S}$, який перетворює падаючі хвилі $(b_1(y), a_2(x))^\top$ в розсіяні $(a_1(y), b_2(x))^\top$, матиме такий вигляд:

$$\begin{pmatrix} a_1(y) \\ b_2(x) \end{pmatrix} = \hat{S} \begin{pmatrix} b_1(y) \\ a_2(x) \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Явний вигляд оператора $\hat{S}$ знайдено методом бінарних перетворень у другій частині роботи.

Зауваження 2. Оскільки між парами $S, \hat{S}$ та $\tilde{S}, \hat{\tilde{S}}$ існує простий та очевидний зв'язок, то надалі всі ці оператори називатимемо операторами розсіяння.

Лема 1. [27, 3] *1. Припустимий розв'язок системи (9) з коефіцієнтами (потенціалами)* $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$, *що задовольняють умови (10), може бути зображений у вигляді:*

$$\begin{cases} Y_1(x,y) = a_1(y) + \int_{-\infty}^{y} A_{11}^+(x,y,s) a_1(s) ds + \\ \qquad + \int_{-\infty}^{x} A_{12}^+(x,y,s) a_2(s) ds, \\ Y_2(x,y) = a_2(x) + \int_{-\infty}^{y} A_{21}^+(x,y,s) a_1(s) ds + \\ \qquad + \int_{-\infty}^{x} A_{22}^+(x,y,s) a_2(s) ds, \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} Y_1(x,y) = b_1(y) + \int_{y}^{+\infty} A_{11}^-(x,y,s) b_1(s) ds + \\ + \int_{x}^{+\infty} A_{12}^-(x,y,s) b_2(s) ds, \\ Y_2(x,y) = b_2(x) + \int_{y}^{+\infty} A_{21}^-(x,y,s) b_1(s) ds + \\ + \int_{x}^{+\infty} A_{22}^-(x,y,s) b_2(s) ds, \end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases} Y_1(x,y) = a_1(y) + \int_{y}^{+\infty} B_{11}^-(x,y,s) a_1(s) ds + \\ + \int_{-\infty}^{x} B_{12}^+(x,y,s) b_2(s) ds, \\ Y_2(x,y) = b_2(x) + \int_{y}^{+\infty} B_{21}^-(x,y,s) a_1(s) ds + \\ + \int_{-\infty}^{x} B_{22}^+(x,y,s) b_2(s) ds, \end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{cases} Y_1(x,y) = b_1(y) + \int_{-\infty}^{y} B_{11}^+(x,y,s) b_1(s) ds + \\ + \int_{x}^{+\infty} B_{12}^-(x,y,s) a_2(s) ds, \\ Y_2(x,y) = a_2(x) + \int_{-\infty}^{y} B_{21}^+(x,y,s) b_1(s) ds + \\ + \int_{x}^{+\infty} B_{22}^-(x,y,s) a_2(s) ds, \end{cases} \tag{19}$$

де функції a_1, a_2, b_1, b_2 *є асимптотиками (11) цього розв'язку. Системи (16)–(19) визначають оператори перетворення* $A_{(\pm)}$, $B_{(\pm)}$ *, ядра яких* $A_{ij}^{\pm}(x,y;s)$, $B_{ij}^{\pm}(x,y;s)$, $i,j = 1,2$, *однозначно визначаються коефіцієнтами* $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$ *системи (9).*

2. Впроваджені таким способом функції $A_{ij}(x,y,\xi)$, $B_{ij}(x,y,\xi)$, $i,j = 1,2$*:*

$$A_{i1}(x,y,\xi) = \begin{cases} A_{i1}^+(x,y,\xi), & \xi < y \\ A_{i1}^-(x,y,\xi), & \xi > y \end{cases}, \quad i = 1,2; \tag{20}$$

$$A_{i2}(x,y,\xi) = \begin{cases} A_{i2}^+(x,y,\xi), & \xi < x \\ A_{i2}^-(x,y,\xi), & \xi > x \end{cases}, \quad i = 1,2; \tag{21}$$

$$B_{i1}(x,y,\xi) = \begin{cases} B_{i1}^+(x,y,\xi), & \xi < y \\ B_{i1}^-(x,y,\xi), & \xi > y \end{cases}, \quad i = 1,2; \tag{22}$$

$$B_{i2}(x,y,\xi) = \begin{cases} B_{i2}^+(x,y,\xi), & \xi < x \\ B_{i2}^-(x,y,\xi), & \xi > x \end{cases}, \quad i = 1,2; \tag{23}$$

допускають оцінки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sup_x |A_{1j}(x,y;\xi)|^2 dy d\xi < +\infty, \tag{24}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sup_x |B_{1j}(x,y;\xi)|^2 d\xi dy < +\infty, \tag{25}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sup_y |A_{2j}(x,y;\xi)|^2 dx d\xi < +\infty, \tag{26}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sup_y |B_{2j}(x,y;\xi)|^2 d\xi dx < +\infty. \tag{27}$$

3. Коефіцієнти u_1, u_2 системи (9) виражаються через ядра операторів перетворення $A_{(\pm)}$, $B_{(\pm)}$ за допомогою формул

$$\begin{aligned} u_1(x,y) &= A_{12}^-(x,y,x+0) = -A_{12}^+(x,y,x-0) = \\ &= B_{12}^-(x,y,x+0) = -B_{12}^+(x,y,x-0), \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} u_2(x,y) &= A_{21}^-(x,y,y+0) = -A_{21}^+(x,y,y-0) = \\ &= B_{21}^-(x,y,y+0) = -B_{21}^+(x,y,y-0). \end{aligned} \tag{29}$$

Припустимий розв'язок системи (9) з заданими асимптотиками $a_1(y) = Y_1(-\infty,y)$, $a_2(x) = Y_2(x,-\infty)$ задовольняє систему інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} Y_1(x,y) = a_1(y) - \int_{-\infty}^{x} u_1(s,y)Y_2(s,y)ds, \\ Y_2(x,y) = a_2(x) - \int_{-\infty}^{y} u_2(x,s)Y_1(x,s)ds. \end{cases} \tag{30}$$

Для решти асимптотик мають місце аналогічні рівняння

$$\begin{cases} Y_1(x,y) = b_1(y) + \int_{x}^{+\infty} u_1(s,y)Y_2(s,y)ds, \\ Y_2(x,y) = b_2(x) + \int_{y}^{+\infty} u_2(x,s)Y_1(x,s)ds, \end{cases} \tag{31}$$

$$\begin{cases} Y_1(x,y) = a_1(y) - \int_{-\infty}^{x} u_1(s,y)Y_2(s,y)ds, \\ Y_2(x,y) = b_2(x) + \int_{y}^{+\infty} u_2(x,s)Y_1(x,s)ds, \end{cases} \tag{32}$$

$$\begin{cases} Y_1(x,y) = b_1(y) + \int_{x}^{+\infty} u_1(s,y)Y_2(s,y)ds, \\ Y_2(x,y) = a_2(x) - \int_{-\infty}^{y} u_2(x,s)Y_1(x,s)ds. \end{cases} \tag{33}$$

Підставляючи (16) в (30), (17) в (31), (18) в (32), (19) в (33), отримаємо, відповідно, системи інтегральних рівнянь для ядер операторів $A_{(\pm)}$, $B_{(\pm)}$:

$$\begin{cases} A_{11}^+(x,y,s) + \int_{-\infty}^{x} u_1(\xi,y)A_{21}^+(\xi,y,s)d\xi = 0, \\ A_{21}^+(x,y,s) + u_2(x,s) - \int_{y}^{s} u_2(x,\xi)A_{11}^+(x,\xi,s)d\xi = 0, \\ s \le y; \end{cases} \tag{34}$$

$$\begin{cases} A_{22}^+(x,y,s) + \int_{-\infty}^{y} u_2(x,\xi)A_{12}^+(x,\xi,s)d\xi = 0, \\ A_{12}^+(x,y,s) + u_1(s,y) - \int_{x}^{s} u_1(\xi,y)A_{22}^+(\xi,y,s)d\xi = 0, \\ s \le x; \end{cases} \tag{35}$$

$$\begin{cases} B_{11}^-(x,y,s) + \int_{-\infty}^{x} u_1(\xi,y)B_{21}^-(\xi,y,s)d\xi = 0, \\ B_{21}^-(x,y,s) - u_2(x,s) - \int_{y}^{s} u_2(x,\xi)B_{11}^-(x,\xi,s)d\xi = 0, \\ s \ge y; \end{cases} \tag{36}$$

$$\begin{cases} B_{22}^-(x,y,s) + \int_{-\infty}^{y} u_2(x,\xi)B_{12}^-(x,\xi,s)d\xi = 0, \\ B_{12}^-(x,y,s) - u_1(s,y) - \int_{x}^{s} u_1(\xi,y)B_{22}^-(\xi,y,s)d\xi = 0, \\ s \ge x; \end{cases} \tag{37}$$

$$\begin{cases} A_{12}^-(x,y,s) - u_1(s,y) + \int_{s}^{x} u_1(\xi,y)A_{22}^-(\xi,y,s)d\xi = 0, \\ A_{22}^-(x,y,s) + \int_{y}^{+\infty} u_2(x,\xi)A_{12}^-(x,\xi,s)d\xi = 0, \\ s \ge x; \end{cases} \tag{38}$$

$$\begin{cases} A_{11}^-(x,y,s) - \int_{x}^{+\infty} u_1(\xi,y)A_{21}^-(\xi,y,s)d\xi = 0, \\ A_{21}^-(x,y,s) - u_2(x,s) + \int_{s}^{y} u_2(x,\xi)A_{11}^-(x,\xi,s)d\xi = 0, \\ s \ge y; \end{cases} \tag{39}$$

$$\begin{cases} B_{12}^+(x,y,s) + u_1(s,y) + \int_{s}^{x} u_1(\xi,y)B_{22}^+(\xi,y,s)d\xi = 0, \\ B_{22}^+(x,y,s) - \int_{y}^{+\infty} u_2(x,\xi)B_{12}^+(\xi,y,s)d\xi = 0, \\ s \le x; \end{cases} \tag{40}$$

$$\begin{cases} B_{11}^+(x,y,s) - \int_{x}^{+\infty} u_1(s,y)B_{21}^+(x,\xi,s)d\xi = 0, \\ B_{21}^+(x,y,s) + u_2(x,s) + \int_{s}^{y} u_2(x,\xi)B_{11}^+(x,\xi,s)d\xi = 0, \\ s \le y. \end{cases} \tag{41}$$

Системи інтегральних рівнянь (36), (40) для ядер операторів $B_{(\pm)}$ були отримані в роботах [27, 3].

Зауважимо, що формули (28)–(29) є простими наслідками других рівностей в системах (34)–(41).

Теорема 2. [27, 3] *Нехай $\tilde{S}$ – оператор розсіяння (13) для системи (9) з коефіцієнтами u_1 та u_2, що задовольняють умови (10). Тоді*

1. Оператор $\tilde{S}$ допускає двосторонню факторизацію

$$\tilde{S} = (I+\tilde{A}_-)^{-1}(I+\tilde{A}_+) = (I+\tilde{B}_+)^{-1}(I+\tilde{B}_-), \tag{42}$$

де $\tilde{A}_\pm$, $\tilde{B}_\pm$ – матричні вольтеррівські оператори Гільберта-Шмідта відповідної полярності.

2. У просторі $L_2(-\infty,+\infty;\mathbf{C}^2)$ існує оператор $\tilde{S}^{-1}$ і

$$\tilde{S} = I + \tilde{F}, \ \ \tilde{S}^{-1} = I + \tilde{G}, \tag{43}$$

де $\tilde{F} = \|\tilde{F}_{ij}\|_{i,j=1}^2$, $\tilde{G} = \|\tilde{G}_{ij}\|_{i,j=1}^2$ – матричні оператори Гільберта-Шмідта.

3. Антидіагональні елементи операторів $\tilde{F}$ і $\tilde{G}$ є фредгольмівськими інтегральними операторами.

4. Діагональні елементи $\tilde{F}$ і $\tilde{G}$ є вольтеррівськими інтегральними операторами:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{11} = \tilde{F}_{11+}, \ \tilde{F}_{22} = \tilde{F}_{22+}, \\ \tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{11-}, \ \tilde{G}_{22} = \tilde{G}_{22-}. \end{aligned} \tag{44}$$

Теорема 3. *Нехай S – оператор (12) для системи (9) з коефіцієнтами u_1 та u_2, що задовольняють умови (10). Тоді*

1. У просторі $L_2(-\infty,+\infty;\mathbf{C}^2)$ існує обернений оператор S^{-1} і

$$S = I + F, \ \ S^{-1} = I + G, \tag{45}$$

де $F = \|F_{ij}\|^2_{i,j=1},\ G = \|G_{ij}\|^2_{i,j=1}$ *– матричні оператори Гільберта-Шмідта.*

2. Антидіагональні елементи операторів F *і* G *є фредгольмівськими інтегральними операторами.*

3. Діагональні елементи F *і* G *є вольтеррівськими інтегральними операторами:*

$$F_{11} = F_{11+},\ F_{22} = F_{22+},\ G_{11} = G_{11-},\ G_{22} = G_{22-} \tag{46}$$

зі змінною верхньою $(F_{11+},\ F_{22+})$ *та нижньою* $(G_{11-},\ G_{22-})$ *межами інтегрування відповідно.*

4. Оператор S *допускає факторизацію*

$$S = (I + A_{(-)})^{-1}(I + A_{(+)}), \tag{47}$$

де оператори $A_{(\pm)}$ *визначаються системами (16)–(17) леми 1.*

□ *Доведення.* Визначимо оператор $T_{y,x}$ так:

$$T_{y,x} = \begin{pmatrix} \theta_{(y\to x)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad T_{y,x}\begin{pmatrix} f_1(y) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \tag{48}$$

$$= \begin{pmatrix} \theta_{(y\to x)} f_1(y) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}, \tag{49}$$

де $f_1(y),\ f_2(x)$ – довільні функції з $L_2(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$. З означення оператора S (12) та оператора розсіяння $\tilde{S}$ (див. теорему 2) слідує, що

$$S = (T_{y,x})^{-1}\tilde{S}T_{y,x} = T_{x,y}\tilde{S}T_{y,x}. \tag{50}$$

З рівності (50) отримаємо такі співвідношення між елементами операторів S та $\tilde{S}$:

$$\begin{gathered} F_{11} = \theta_{(x\to y)}\left(\int_{-\infty}^{x}\tilde{F}_{11}(x,\tau)\cdot d\tau\right)\theta_{(y\to x)}, \\ F_{12} = \theta_{(x\to y)}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{F}_{12}(x,\tau)\cdot d\tau, \\ F_{21} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{F}_{21}(x,\tau)\cdot d\tau\right)\theta_{(x\to y)}, \\ F_{22} = \int_{-\infty}^{x}\tilde{F}_{22}(x,\tau)\cdot d\tau. \end{gathered} \tag{51}$$

Отже, F_{11} та F_{22} є вольтеррівськими інтегральними операторами зі змінною верхньою межею інтегрування, а оператори $F_{12},\ F_{21}$ – фредгольмівські. За теоремою 2 до оператора $\tilde{S}$ існує обернений $\tilde{S}^{-1}$. Тому

$$\exists S^{-1} = T_{x,y}\tilde{S}^{-1}T_{y,x}. \tag{52}$$

З рівності (52) слідує, що оператори $G_{11} := G_{11-}$, $G_{22} := G_{22-}$ – вольтеррівські, а $G_{12},\ G_{21}$ – фредгольмівські. Отже, оператори F і G мають такий вигляд:

$$F = \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^{y} F_{11}(y,s)\cdot ds & \int_{-\infty}^{+\infty} F_{12}(\tau,y)\cdot d\tau \\ \int_{-\infty}^{+\infty} F_{21}(x,s)\cdot ds & \int_{-\infty}^{x} F_{22}(x,\tau)\cdot d\tau \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} \int_{+\infty}^{y} G_{11}(y,s)\cdot ds & \int_{-\infty}^{+\infty} G_{12}(\tau,y)\cdot d\tau \\ \int_{-\infty}^{+\infty} G_{21}(x,s)\cdot ds & \int_{+\infty}^{x} G_{22}(x,\tau)\cdot d\tau \end{pmatrix}.$$

Прирівнюючи зображення (16) та (17), отримаємо

$$(I + A_{(+)})a = (I + A_{(-)})b, \tag{53}$$

За теоремою 1 до операторів $I + A_{(+)}$ та $I + A_{(-)}$ існують обернені. Враховуючи визначення оператора S (12), з рівності (53) отримаємо факторизацію (47). ■

II. Обернена задача з виродженими даними розсіяння

Лема 2. [27, 3] *Оператор розсіяння однозначно визначається одним із наборів операторів* $F_{12},\ G_{21}$ *або* $F_{21},\ G_{12}$.

Нехай пара операторів $F_{12},\ G_{21}$ є відомою. Розпишемо одне з операторних рівнянь на ядра F, G, породжених матричним рівнянням $(I+F)(I+G) = I$:

$$\begin{gathered} \int_{-\infty}^{y} F_{11}(y,s)\cdot ds + \int_{+\infty}^{y} G_{11}(y,s)\cdot ds + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} F_{12}(\tau,y)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} G_{21}(\tau,z)\cdot dz\Big)d\tau + \\ + \int_{-\infty}^{y} F_{11}(y,s)\Big(\int_{+\infty}^{s} G_{11}(s,z)\cdot dz\Big)ds = 0. \end{gathered} \tag{54}$$

Операторне рівняння (54) рівносильне системі інтегральних рівнянь для ядер операторів F_{11} та G_{11}:

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{12}(\tau,y)G_{21}(\tau,z)d\tau + F_{11}(y,z) - \\ \quad - \int_{-\infty}^{z} F_{11}(y,s)G_{11}(s,z)ds = 0,\ z \le y, \\ \\ -\int_{-\infty}^{+\infty} F_{12}(\tau,y)G_{21}(\tau,z)d\tau + G_{11}(y,z) + \\ \quad + \int_{-\infty}^{y} F_{11}(y,s)G_{11}(s,z)ds = 0,\ z \ge y. \end{cases} \tag{55}$$

Зауваження 3. Згідно з лемою 2 система (55) має єдиний розв'язок.

Надалі розглядатимемо вироджені дані розсіяння. А саме, нехай ядра операторів $F_{12},\ G_{21}$ факторизуються так:

$$\begin{gathered} F_{12}(x,y) = p_1(y)q_1^{\top}(x), \\ G_{21}(x,y) = q_2(x)p_2^{\top}(y), \end{gathered} \tag{56}$$

де $p_1(y) := (p_{11}(y),\dots,p_{1n}(y))$, $p_2(y) := (p_{21}(y),\dots,p_{2n}(y))$, $q_2(x) := (q_{21}(x),\dots,q_{2n}(x))$, $q_1(x) := (q_{11}(x),\dots,q_{1n}(x))$ – вектор-функції розмірності $(1\times n)$, компоненти яких є лінійно незалежними. Покажемо, що ядра $F_{11},\ G_{11}$ тоді теж допускатимуть факторизацію. Нехай $F_{11}^{*}(y,z)$, при $y \ge z$ та $G_{11}^{*}(y,z)$, при $y \le z$ – розв'язок системи (55). Визначимо оператори R та K співвідношенням:

$$\begin{gathered} Kh(y,z) = -p_1(y)\Big\{\int_{-\infty}^{+\infty} q_1^{\top}(\tau)q_2(\tau)d\tau\Big\}p_2^{\top}(z) + \\ + Rh(y,z), \\ Rh(y,z) = \int_{-\infty}^{z} h(y,s)G_{11}^{*}(s,z)ds,\ h \in H, \end{gathered} \tag{57}$$

$$\begin{gathered} H = \Big\{h(y,z) : E \to \mathbb{C}\Big| \\ ||h||^2 := \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y} |h(y,z)|^2 dzdy < +\infty\Big\}, \\ E = \Big\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \Big| z \le y\Big\}, \end{gathered} \tag{58}$$

Позначимо

$$M := \int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{z} |G_{11}^{*}(s,z)|^2 ds\Big)dz. \tag{59}$$

Для величини $||Rh||^2$ виконуватиметься така оцінка:

$$
\begin{aligned}
||Rh||^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y}\Big|\int_{-\infty}^{z} h(y,s)G_{11}^*(s,z)ds\Big|^2 dzdy \le \\
\le \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y}\Big(\int_{-\infty}^{z}|h(y,s)|^2ds\Big)\Big(\int_{-\infty}^{z}|G_{11}^*(s,z)|^2ds\Big)dzdy \le \\
\le \int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{y}|h(y,s)|^2ds\Big)\int_{-\infty}^{y}\Big(\int_{-\infty}^{z}|G_{11}^*(s,z)|^2ds\Big)dzdy \le \\
\le \int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{y}|h(y,s)|^2ds\Big)\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{z}|G_{11}^*(s,z)|^2ds\Big)dzdy = ||h||^2M.
\end{aligned}
\tag{60}
$$

Подібну оцінку отримуємо і для $||R^2h||^2$:

$$
\begin{aligned}
||R^2h||^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y}\left(\int_{-\infty}^{z}\left\{\int_{-\infty}^{s_1} h(y,s_2)G_{11}(s_2,s_1)ds_2\right\}G_{11}(s_1,z)ds_1\right)^2 dzdy \le \\
\le \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y}\left(\int_{-\infty}^{z}\left\{\left(\int_{-\infty}^{s_1}|h(y,s_2)|^2ds_2\right)\left(\int_{-\infty}^{s_1}|G_{11}(s_2,s_1)|^2ds_2\right)\right\}^{\frac{1}{2}}G_{11}(s_1,z)ds_1\right)^2 dzdy \le \\
\le \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{y}|h(y,s_2)|^2ds_2\right)\int_{-\infty}^{y}\left(\int_{-\infty}^{z}\left\{\left(\int_{-\infty}^{s_1}|G_{11}(s_2,s_1)|^2ds_2\right)\right\}^{\frac{1}{2}}G_{11}(s_1,z)ds_1\right)^2 dzdy \le \\
\le \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{y}|h(y,s_2)|^2ds_2\right)\int_{-\infty}^{y}\left(\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{s_1}|G_{11}(s_2,s_1)|^2ds_2ds_1\right)\left(\int_{-\infty}^{z}|G_{11}(s_1,z)|^2ds_1\right)dzdy \le \\
\le \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y}|h(y,s_2)|^2ds_2dy\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{s_1}|G_{11}(s_2,s_1)|^2ds_2ds_1\right)^2 \le \frac{1}{2}||h||^2M^2.
\end{aligned}
\tag{61}
$$

Оцінимо $||R^3h||^2$:

$$
\begin{aligned}
||R^3h||^2 \le \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y}\Big|\int_{-\infty}^{z}\left\{\int_{-\infty}^{s_1}\left\{\int_{-\infty}^{s_2} h(y,s_3)G_{11}^*(s_3,s_2)ds_3\right\}G_{11}^*(s_2,s_1)ds_2\right\}G_{11}^*(s_1,z)ds_1\Big|^2 dzdy \le \\
\le \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y}\Big|\int_{-\infty}^{z}\left\{\int_{-\infty}^{s_1}\left\{\int_{-\infty}^{s_2}|h(y,s_3)|^2ds_3\int_{-\infty}^{s_2}|G_{11}^*(s_3,s_2)|^2ds_3\right\}^{\frac{1}{2}}G_{11}^*(s_2,s_1)ds_2\right\}\cdot \\
\cdot G_{11}^*(s_1,z)ds_1\Big|^2 dzdy \le ||h||^2\int_{-\infty}^{+\infty}\Big|\int_{-\infty}^{z}\left\{\int_{-\infty}^{s_1}\left\{\int_{-\infty}^{s_2}|G_{11}^*(s_3,s_2)|^2ds_3\right\}^{\frac{1}{2}}G_{11}^*(s_2,s_1)ds_2\right\}\cdot \\
\cdot G_{11}^*(s_1,z)ds_1\Big|^2 dz \le ||h||^2\int_{-\infty}^{+\infty}\Big|\int_{-\infty}^{z}\left(\left\{\int_{-\infty}^{s_1}\int_{-\infty}^{s_2}|G_{11}^*(s_3,s_2)|^2ds_3ds_2\right\}\left\{\int_{-\infty}^{s_1}|G_{11}^*(s_2,s_1)|^2ds_2\right\}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot \\
\cdot G_{11}^*(s_1,z)ds_1\Big|^2 dz \le ||h||^2\int_{-\infty}^{+\infty}\Big|\left(\int_{-\infty}^{z}\left\{\int_{-\infty}^{s_1}\int_{-\infty}^{s_2}|G_{11}^*(s_3,s_2)|^2ds_3ds_2\right\}\left\{\int_{-\infty}^{s_1}|G_{11}^*(s_2,s_1)|^2ds_2\right\}ds_1\right)\cdot \\
\cdot\left(\int_{-\infty}^{z}|G_{11}^*(s_1,z)|^2ds_1\right)dz = \frac{1}{2}||h||^2\int_{-\infty}^{+\infty}\Big|\left(\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{s_2}|G_{11}^*(s_1,s_2)|^2ds_1ds_2\right)^2\cdot \\
\cdot\left(\int_{-\infty}^{z}|G_{11}^*(s_1,z)|^2ds_1\right)dz \le \frac{1}{3!}||h||^2M^3
\end{aligned}
\tag{62}
$$

За індукцією слідує, що $||R^mh||^2 \le \frac{1}{m!}||h||^2M^m$. Отже, R^m – стиск для деякого натурального m. Отже, рівняння $Kh = h$ має єдиний розв'язок $F_{11}^*(y,z)$.

Подіявши оператором K на функцію $F_{12}(z,y) := p_1(y)q_1^\top(z)$, отримаємо

$$
\begin{aligned}
K(p_1(y)q_1^\top(z)) = p_1(y)(-\Big\{\int_{-\infty}^{+\infty} q_1^\top(\tau)q_2(\tau)d\tau\Big\}p_2^\top(z) + \\
+\int_{-\infty}^{z} q_1^\top(s)G_{11}(s,z)ds) := p_1(y)\tilde{f}_1^\top(z).
\end{aligned}
\tag{63}
$$

Аналогічно отримується, що $K^m(p_1(y)q_1^\top(z)) = p_1(y)\tilde{f}_m^\top(z)$, де $\tilde{f}_m(z)$ – деяка вектор-функція розмірності $(1\times n)$.

З іншого боку, $K^m(p_1(y)q_1^\top(z)) \to F_{11}^*(y,z)$, при $m\to\infty$. Тому

$$
F_{11}^*(y,z) = p_1(y)f_2^\top(z), \tag{64}
$$

де $f_2(z)$ – деяка вектор-функція розмірності $(1\times n)$. Аналогічно отримується, що

$$
G_{11}^*(y,z) = g_1(y)p_2^\top(z), \tag{65}
$$

де $g_1(y)$ – деяка вектор-функція розмірності $(1\times n)$.

Отже, ми довели таку теорему:

Теорема 4. *Якщо дані розсіяння F_{12}, G_{21} є виродженими, тобто подаються у вигляді (56), то ядра операторів F_{11}, G_{11} допускатимуть факторизації (64) та (65) відповідно.*

Враховуючи зображення (56), (64), (65) система (55) набуде такого вигляду:

$$
\begin{cases}
p_1(y)\Big\{\int_{-\infty}^{+\infty} q_1^\top(\tau)q_2(\tau)d\tau\Big\}p_2^\top(z) + p_1(y)f_2^\top(z) - \\
\qquad -p_1(y)\Big\{\int_{-\infty}^{z} f_2^\top(s)g_1(s)ds\Big\}p_2^\top(z) = 0, \\
-p_1(y)\Big\{\int_{-\infty}^{+\infty} q_1^\top(\tau)q_2(\tau)d\tau\Big\}p_2^\top(z) + g_1(y)p_2^\top(z) + \\
\qquad +p_1(y)\Big\{\int_{-\infty}^{y} f_2^\top(s)g_1(s)ds\Big\}p_2^\top(z) = 0,
\end{cases}
\tag{66}
$$

Очевидно, що вектор-функції $f_2^\top(z)$ та $g_1(z)$ можна подати у вигляді:

$$
f_2^\top(z) = P_2(z)p_2^\top(z),\ \ g_1(y) = p_1(y)P_1(y), \tag{67}
$$

де $P_1(y)$ і $P_2(x)$ – невироджені матричні функції розмірності $(n \times n)$. Тоді система (66) набуде вигляду:

$$\begin{cases} f_1(y)\Big\{\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} q_1^\top(\tau)q_2(\tau)d\tau\Big)+P_2(z)- \\ -\Big(\int_{-\infty}^{z} P_2(s)p_2^\top(s)p_1(s)P_1(s)ds\Big)\Big\}p_2^\top(z)=0, \\ p_1(y)\Big\{-\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} q_1^\top(\tau)q_2(\tau)d\tau\Big)+P_1(z)+ \\ +\Big(\int_{-\infty}^{z} P_2(s)p_2^\top(s)p_1(s)P_1(s)ds\Big)\Big\}g_2^\top(z)=0, \end{cases} \tag{68}$$

Для знаходження $P_1(z)$ та $P_2(z)$ достатньо знайти розв'язок такої системи:

$$\begin{cases} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} q_1^\top(\tau)q_2(\tau)d\tau\Big)+P_2(z)- \\ -\Big(\int_{-\infty}^{z} P_2(s)p_2^\top(s)p_1(s)P_1(s)ds\Big)=0, \\ -\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} q_1^\top(\tau)q_2(\tau)d\tau\Big)+P_1(z)+ \\ +\Big(\int_{-\infty}^{z} P_2(s)p_2^\top(s)p_1(s)P_1(s)ds\Big)=0. \end{cases} \tag{69}$$

Розв'язок системи (69) виглядає так:

$$\begin{aligned} P_1(z) = -\Big\{ &\int_{-\infty}^{z} p_2^\top(s)p_1(s)ds- \\ &-\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} q_1^\top(\tau)q_2(\tau)d\tau\Big)^{-1}\Big\}^{-1}, \end{aligned} \tag{70}$$

$$\begin{aligned} P_2(z) = \Big\{ &\int_{-\infty}^{z} p_2^\top(s)p_1(s)ds- \\ &-\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} q_1^\top(\tau)q_2(\tau)d\tau\Big)^{-1}\Big\}^{-1}. \end{aligned} \tag{71}$$

Відповідно, ядра $F_{11}(y,z)$ та $G_{11}(y,z)$ можна зобразити так:

$$\begin{aligned} F_{11}(y,z) = -p_1(y)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} q_1^\top(\tau)q_2(\tau)d\tau\Big)\cdot \\ \cdot\Delta_{1-}^{-1}(+\infty,z)p_2^\top(z), \end{aligned} \tag{72}$$

$$\begin{aligned} G_{11}(y,z) = p_1(y)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} q_1^\top(\tau)q_2(\tau)d\tau\Big)\cdot \\ \cdot\Delta_{1-}^{-1}(+\infty,y)p_2^\top(z), \end{aligned} \tag{73}$$

де

$$\begin{aligned} \Delta_{1-}(x,y) := I - \Big(\int_{-\infty}^{y} p_2^\top(s)p_1(s)ds\Big)\cdot \\ \cdot\Big(\int_{-\infty}^{x} q_1^\top(\tau)q_2(\tau)d\tau\Big). \end{aligned} \tag{74}$$

З операторного рівняння

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x} F_{22}(x,\tau)\cdot d\tau + \int_{+\infty}^{x} G_{22}(x,\tau)\cdot d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} G_{21}(x,s)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} F_{12}(s,\tau)\cdot d\tau\Big)ds+ \\ +\int_{+\infty}^{x} G_{22}(y,s)\Big(\int_{-\infty}^{\tau} F_{22}(\tau,r)\cdot dr\Big)d\tau = 0, \end{aligned} \tag{75}$$

слідує система для знаходження F_{22} та G_{22}:

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{21}(x,s)F_{12}(s,\tau)ds + F_{22}(x,\tau) + \int_{+\infty}^{x} G_{22}(x,\tau)F_{22}(r,\tau)dr = 0,\ \tau \le x, \\ -\int_{-\infty}^{+\infty} G_{21}(x,s)F_{12}(s,\tau)ds + G_{22}(x,\tau) - \int_{+\infty}^{\tau} G_{22}(x,r)F_{22}(r,\tau)dr = 0,\ \tau \ge x. \end{cases} \tag{76}$$

Для системи (76) справедливий аналог теореми 4:

Теорема 5. *Якщо дані розсіяння F_{12}, G_{21} є виродженими, тобто подаються у вигляді (56), то ядра операторів F_{22}, G_{22} допускають такі факторизації:*

$$F_{22}(x,\tau) = f_1(x)q_1^\top(\tau), \tag{77}$$

$$G_{22}(x,\tau) = q_2(x)g_2^\top(\tau). \tag{78}$$

Система інтегральних рівнянь (76) розв'язується аналогічно до системи (55). Ядра F_{22}, G_{22} матимуть такий вигляд:

$$\begin{aligned} F_{22}(x,\tau) = -q_2(x)\Delta_{2+}^{-1}(x,+\infty)\cdot \\ \cdot\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} p_2^\top(s)p_1(s)ds\Big)q_1^\top(\tau), \end{aligned} \tag{79}$$

$$\begin{aligned} G_{22}(x,\tau) = q_2(x)\Delta_{2+}^{-1}(\tau,+\infty)\cdot \\ \cdot\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} p_2^\top(s)p_1(s)ds\Big)q_1^\top(\tau), \end{aligned} \tag{80}$$

де

$$\begin{aligned} \Delta_{2+}(x,y) := I+ \\ +\Big(\int_{-\infty}^{y} p_2^\top(s)p_1(s)ds\Big)\Big(\int_{+\infty}^{x} q_1^\top(\tau)q_2(\tau)d\tau\Big). \end{aligned} \tag{81}$$

З операторних рівностей

$$\begin{aligned} F_{21} = -(I+F_{22})G_{21}(I+G_{11})^{-1}, \\ G_{12} = -(I+G_{11})F_{12}(I+F_{22})^{-1}, \end{aligned} \tag{82}$$

знайдемо ядра F_{21} та G_{12}, скориставшись таким твердженням:

Твердження 1. У випадку вироджених даних розсіяння F_{12} та G_{21} (56) обернені оператори $(I+F_{22})^{-1}$ та $(I+G_{11})^{-1}$ матимуть такий вигляд:

$$\begin{aligned} (I+G_{11})^{-1} = \Big(I + p_1(y)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} q_1^\top q_2 d\tau\Big)\cdot \\ \cdot\Delta_{1-}^{-1}(+\infty,y)\int_{+\infty}^{y} p_2^\top(z)\cdot dz\Big)^{-1} = \\ = \Big(I - p_1(y)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} q_1^\top q_2 d\tau\Big)\cdot \\ \cdot\int_{+\infty}^{y} \Delta_{1-}^{-1}(+\infty,z)p_2^\top(z)\cdot dz\Big). \end{aligned} \tag{83}$$

$$\begin{aligned} (I+F_{22})^{-1} = \Big(I - q_2(x)\Delta_{2+}^{-1}(x,+\infty)\cdot \\ \cdot\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} p_2^\top p_1 d\tau\Big)\int_{-\infty}^{x} q_1^\top(\tau)\cdot d\tau\Big)^{-1} = \\ = I + q_2(x)\int_{-\infty}^{x} \Delta_{2+}^{-1}(\tau,+\infty)\cdot \\ \cdot\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} p_2^\top p_1 d\tau\Big)q_1^\top(\tau)\cdot d\tau \end{aligned} \tag{84}$$

□ *Доведення.* Правильність формул (83) та (84) можна перевірити їхньою безпосередньою підстановкою в операторні рівності

$$(I+F_{22})(I+F_{22})^{-1}=(I+F_{22})^{-1}(I+F_{22})=I, \quad (85)$$

$$(I+G_{22})(I+G_{22})^{-1}=(I+G_{22})^{-1}(I+G_{22})=I, \quad (86)$$

використовуючи формули для композицій інтегральних операторів зі вступу. ■

Запишемо рівність для знаходження оператора F_{21} (82):

$$\begin{gathered}F_{21}=-\Big(I-q_2(x)\Delta_{2+}^{-1}(x,+\infty)\cdot\\ \cdot\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}p_2^\top p_1 ds\Big)\int_{-\infty}^{x}q_1^\top(\tau)\cdot d\tau\Big)\circ\\ \circ\Big(q_2(x)\int_{-\infty}^{+\infty}p_2^\top(z)\cdot dz\Big)\circ\Big(I-p_1(y)\cdot\\ \cdot\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}q_1^\top q_2 d\tau\Big)\int_{+\infty}^{y}\Delta_{1-}^{-1}(+\infty,z)p_2^\top(z)\cdot dz\Big).\end{gathered}\quad (87)$$

За допомогою технічних перетворень з операторної композиції (87) знаходимо оператор F_{21} і, відповідно, його ядро, яке матиме такий вигляд:

$$\begin{gathered}F_{21}(x,y)=-q_2(x)\Delta_{2+}^{-1}(x,+\infty)\cdot\\ \cdot\Delta_{1-}(+\infty,+\infty)\Delta_{1-}^{-1}(+\infty,y)p_2^\top(y),\end{gathered}\quad (88)$$

де

$$\begin{gathered}\tilde\Delta_{1-}(x,y):=I-\Big(\int_{-\infty}^{x}q_1^\top(\tau)q_2(\tau)d\tau\Big)\cdot\\ \cdot\Big(\int_{-\infty}^{y}p_2^\top(s)p_1(s)ds\Big),\\ \tilde\Delta_{2+}(x,y):=I+\Big(\int_{+\infty}^{x}q_1^\top(\tau)q_2(\tau)d\tau\Big)\cdot\\ \cdot\Big(\int_{-\infty}^{y}p_2^\top(s)p_1(s)ds\Big).\end{gathered}\quad (89)$$

Аналогічно знаходиться ядро G_{12}:

$$\begin{gathered}G_{12}(x,y)=-p_1(y)\tilde\Delta_{1-}^{-1}(+\infty,y)\cdot\\ \cdot\tilde\Delta_{1-}^{-1}(+\infty,+\infty)\tilde\Delta_{2+}^{-1}(x,+\infty)q_1^\top(x).\end{gathered}\quad (90)$$

Як підсумок попередніх результатів сформулюємо таку теорему.

Теорема 6. *У випадку вироджених даних розсіяння F_{12}, G_{21} (56) оператор S (12) матиме вигляд*

$$S=I+\begin{pmatrix}\int_{-\infty}^{y}F_{11}(y,s)\cdot ds & \int_{-\infty}^{+\infty}F_{12}(\tau,y)\cdot d\tau\\ \int_{-\infty}^{+\infty}F_{21}(x,s)\cdot ds & \int_{-\infty}^{x}F_{22}(x,\tau)\cdot d\tau\end{pmatrix}, \quad (91)$$

де ядра оператора F_{11}, F_{21}, F_{22} визначаються формулами (72), (88), (79), відповідно.

Обернений оператор S^{-1} матиме вигляд

$$S^{-1}=I+\begin{pmatrix}\int_{+\infty}^{y}G_{11}(y,s)\cdot ds & \int_{-\infty}^{+\infty}G_{12}(\tau,y)\cdot d\tau\\ \int_{-\infty}^{+\infty}G_{21}(x,s)\cdot ds & \int_{+\infty}^{x}G_{22}(x,\tau)\cdot d\tau\end{pmatrix}, \quad (92)$$

де ядра оператора G_{11}, G_{12}, G_{22} визначаються формулами (73), (90), (80) відповідно.

III. Рівняння оберненої задачі та їх розв'язки

Знайдемо зв'язок між даними розсіяння та ядрами операторів перетворення. Прирівнюючи перші рівності (18) та (19), приймаючи $a_1=0$, $b_1=F_{12}a_2$, $b_2=a_2+F_{22}a_2$, отримаємо

$$\begin{cases}B_{11}^+(x,y,\xi)+\int_x^{+\infty}B_{12}^-(x,y,s)G_{21}(s,\xi)ds=0, \ \xi\le y,\\ B_{12}^-(x,y,\xi)+\int_{-\infty}^{y}B_{11}^+(x,y,s)F_{12}(s,\xi)ds+F_{12}(y,\xi)=0, \ \xi\ge x;\end{cases}\quad (93)$$

Аналогічно з рівностей (18) та (19) отримуємо другу систему рівнянь на ядра операторів $B_{(\pm)}$

$$\begin{cases}B_{22}^-(x,y,\xi)+\int_{-\infty}^{y}B_{21}^+(x,y,s)F_{12}(s,\xi)ds=0, \ \xi\ge x,\\ B_{21}^+(x,y,\xi)+G_{21}(x,\xi)+\int_x^{+\infty}B_{22}^-(x,y,s)G_{21}(s,\xi)ds=0, \ \xi\le y.\end{cases}\quad (94)$$

Системи (93)–(94) є системами інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду, які у випадку вироджених даних розсіяння F_{12}, G_{21} (56) розв'язуються явно, що й було продемонстровано в роботах [27, 3].

Аналогічно з рівностей (18)–(19) отримаємо решту систем для ядер операторів перетворення $B_{(\pm)}$

$$\begin{cases}B_{21}^-(x,y,\xi)+F_{21}(x,\xi)+\int_{-\infty}^{x}B_{22}^+(x,y,s)F_{21}(s,\xi)ds=0, \ \xi\ge y,\\ B_{22}^+(x,y,\xi)+\int_y^{+\infty}B_{21}^-(x,y,s)G_{12}(s,\xi)ds=0, \ \xi\le x;\end{cases}\quad (95)$$

$$\begin{cases}B_{11}^-(x,y,\xi)+\int_{-\infty}^{x}B_{12}^+(x,y,s)F_{21}(s,\xi)ds=0, \ \xi\ge y,\\ B_{12}^+(x,y,\xi)+G_{12}(y,\xi)+\int_y^{+\infty}B_{11}^-(x,y,s)G_{12}(s,\xi)ds=0, \ \xi\le x;\end{cases}\quad (96)$$

Системи (95)–(96) теж є системами інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. За теоремою 5, у випадку вироджених даних розсіяння F_{12}, G_{21} (56) ядра усіх елементів оператора S та оберненого оператора S^{-1} будуть виродженими, зокрема ядра F_{21}, G_{12}. Тому системи інтегральних рівнянь (95)–(96) розв'язуються аналогічно до систем (93)–(94). З систем (93)–(96) у випадку вироджених даних розсіяння F_{12} та G_{21} (56) отримаємо такий вигляд ядер операторів перетворення:

$$B_{11}^{+}(x,y,\xi) = -p_1(y)\left(\int_{+\infty}^{x} q_1(\tau)^{\top} q_2(\tau) d\tau\right)\Delta_{2+}^{-1}(x,y) p_2^{\top}(\xi), \tag{97}$$

$$B_{12}^{+}(x,y,\xi) = p_1(y)\tilde{\Delta}_{2+}^{-1}(x,y)\tilde{\Delta}_{2+}(x,+\infty)\tilde{\Delta}_{2+}^{-1}(\xi,+\infty) q_1^{\top}(\xi), \tag{98}$$

$$B_{21}^{+}(x,y,\xi) = -q_2(x)\Delta_{2+}^{-1}(x,y) p_2^{\top}(\xi), \tag{99}$$

$$B_{22}^{+}(x,y,\xi) = -q_2(x)\Delta_{2+}^{-1}(x,y)\left(\int_{+\infty}^{y} p_2^{\top}(s) p_1(s) ds\right)\tilde{\Delta}_{2+}^{-1}(\xi,+\infty) q_1^{\top}(\xi), \tag{100}$$

$$B_{11}^{-}(x,y,\xi) = p_1(y)\tilde{\Delta}_{2+}^{-1}(x,y)\left(\int_{-\infty}^{x} q_1^{\top}(\tau) q_2(\tau) d\tau\right)\Delta_{1-}^{-1}(+\infty,\xi) p_2^{\top}(\xi), \tag{101}$$

$$B_{12}^{-}(x,y,\xi) = -p_1(y)\tilde{\Delta}_{2+}^{-1}(x,y) q_1^{\top}(\xi), \tag{102}$$

$$B_{21}^{-}(x,y,\xi) = q_2(x)\Delta_{2+}^{-1}(x,y)\Delta_{1-}(+\infty,y)\Delta_{1-}^{-1}(+\infty,\xi) p_2^{\top}(\xi), \tag{103}$$

$$B_{22}^{-}(x,y,\xi) = q_2(x)\Delta_{2+}^{-1}(x,y)\left(\int_{-\infty}^{y} p_2^{\top}(s) p_1(s) ds\right) q_1^{\top}(\xi). \tag{104}$$

Використавши ядра (97)–(104), запишемо оператори $B_{(+)}$ та $B_{(-)}$:

$$(B_{(+)})_{11} = -p_1(y)\left(\int_{+\infty}^{x} q_1(\tau)^{\top} q_2(\tau) d\tau\right)\Delta_{2+}^{-1}(x,y)\int_{-\infty}^{y} p_2^{\top}(\xi)\cdot d\xi, \tag{105}$$

$$(B_{(+)})_{12} = p_1(y)\tilde{\Delta}_{2+}^{-1}(x,y)\tilde{\Delta}_{2+}(x,+\infty)\int_{-\infty}^{x}\tilde{\Delta}_{2+}^{-1}(\xi,+\infty) q_1^{\top}(\xi)\cdot d\xi, \tag{106}$$

$$(B_{(+)})_{21} = -q_2(x)\Delta_{2+}^{-1}(x,y)\int_{-\infty}^{y} p_2^{\top}(\xi)\cdot d\xi, \tag{107}$$

$$(B_{(+)})_{22} = -q_2(x)\Delta_{2+}^{-1}(x,y)\left(\int_{+\infty}^{y} p_2^{\top}(s) p_1(s) ds\right)\int_{-\infty}^{x}\tilde{\Delta}_{2+}^{-1}(\xi,+\infty) q_1^{\top}(\xi)\cdot d\xi, \tag{108}$$

$$(B_{(-)})_{11} = p_1(y)\tilde{\Delta}_{2+}^{-1}(x,y)\left(\int_{-\infty}^{x} q_1^{\top}(\tau) q_2(\tau) d\tau\right)\int_{y}^{+\infty}\Delta_{1-}^{-1}(+\infty,\xi) p_2^{\top}(\xi)\cdot d\xi, \tag{109}$$

$$(B_{(-)})_{12} = -p_1(y)\tilde{\Delta}_{2+}^{-1}(x,y)\int_{x}^{+\infty} q_1^{\top}(\xi)\cdot d\xi, \tag{110}$$

$$(B_{(-)})_{21} = q_2(x)\Delta_{2+}^{-1}(x,y)\Delta_{1-}(+\infty,y)\int_{y}^{+\infty}\Delta_{1-}^{-1}(+\infty,\xi) p_2^{\top}(\xi)\cdot d\xi, \tag{111}$$

$$(B_{(-)})_{22} = q_2(x)\Delta_{2+}^{-1}(x,y)\left(\int_{-\infty}^{y} p_2^{\top}(s) p_1(s) ds\right)\int_{x}^{+\infty} q_1^{\top}(\xi)\cdot d\xi. \tag{112}$$

Аналогічно, з рівностей (16)–(17) знаходимо системи для ядер операторів $A_{(+)}$ та $A_{(-)}$:

$$\left\{\begin{array}{r} A_{12}^{+}(x,y,\xi) = F_{12}(y,\xi) + \int_{y}^{+\infty} A_{11}^{-}(x,y,s) F_{12}(s,\xi) ds + \int_{x}^{+\infty} A_{12}^{-}(x,y,s) F_{22}(s,\xi) ds, \xi \le x, \\ A_{11}^{+}(x,y,\xi) = F_{11}(y,\xi) + \int_{y}^{+\infty} A_{11}^{-}(x,y,s) F_{11}(s,\xi) ds + \int_{x}^{+\infty} A_{12}^{-}(x,y,s) F_{21}(s,\xi) ds, \xi \le y, \\ A_{11}^{-}(x,y,\xi) = -G_{11}(y,\xi) - \int_{-\infty}^{y} A_{11}^{+}(x,y,s) G_{11}(s,\xi) ds + \int_{-\infty}^{x} A_{12}^{+}(x,y,s) G_{21}(s,\xi) ds, \xi \ge y, \\ A_{12}^{-}(x,y,\xi) = G_{12}(y,\xi) + \int_{-\infty}^{y} A_{11}^{+}(x,y,s) G_{12}(s,\xi) ds - \int_{-\infty}^{x} A_{12}^{+}(x,y,s) G_{22}(s,\xi) ds, \xi \ge x; \end{array}\right. \tag{113}$$

$$\left\{\begin{array}{r} A_{22}^{+}(x,y,\xi) = F_{22}(x,\xi) + \int_{y}^{+\infty} A_{21}^{-}(x,y,s) F_{12}(s,\xi) ds + \int_{x}^{+\infty} A_{22}^{-}(x,y,s) F_{22}(s,\xi) ds, \xi \le x, \\ A_{21}^{+}(x,y,\xi) = F_{21}(x,\xi) + \int_{y}^{+\infty} A_{21}^{-}(x,y,s) F_{11}(s,\xi) ds + \int_{x}^{+\infty} A_{22}^{-}(x,y,s) F_{21}(s,\xi) ds, \xi \le y, \\ A_{21}^{-}(x,y,\xi) = G_{21}(x,\xi) - \int_{-\infty}^{y} A_{21}^{+}(x,y,s) G_{11}(s,\xi) ds + \int_{-\infty}^{x} A_{22}^{+}(x,y,s) G_{21}(s,\xi) ds, \xi \ge y, \\ A_{22}^{-}(x,y,\xi) = -G_{22}(x,\xi) + \int_{-\infty}^{y} A_{21}^{+}(x,y,s) G_{12}(s,\xi) ds - \int_{-\infty}^{x} A_{22}^{+}(x,y,s) G_{22}(s,\xi) ds, \xi \ge x. \end{array}\right. \tag{114}$$

Системи (113) та (114) є системами інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Оскільки згідно з теоремою 5 ядра операторів F та G вироджені, то системи (113) та (114) також можна розв'язати явно. У результаті отримаємо такі розв'язки систем:

$$A_{11}^{-}(x,y,\xi) = p_1(y)\left(\int_{+\infty}^{x} q_1(\tau)^{\top} q_2(\tau)d\tau\right)\Delta_{2+}^{-1}(x,y)p_2^{\top}(\xi), \tag{115}$$

$$A_{12}^{-}(x,y,\xi) = -p_1(y)\tilde{\Delta}_{2+}^{-1}(x,y)\tilde{\Delta}_{2+}(x,+\infty)\tilde{\Delta}_{2+}^{-1}(\xi,+\infty)q_1^{\top}(\xi), \tag{116}$$

$$A_{21}^{-}(x,y,\xi) = q_2(x)\Delta_{2+}^{-1}(x,y)p_2^{\top}(\xi), \tag{117}$$

$$A_{22}^{-}(x,y,\xi) = q_2(x)\Delta_{2+}^{-1}(x,y)\left(\int_{+\infty}^{y} p_2^{\top}(s)p_1(s)ds\right)\tilde{\Delta}_{2+}^{-1}(\xi,+\infty)q_1^{\top}(\xi), \tag{118}$$

$$A_{11}^{+}(x,y,\xi) = -p_1(y)\tilde{\Delta}_{2+}^{-1}(x,y)\left(\int_{-\infty}^{x} q_1^{\top}(\tau)q_2(\tau)d\tau\right)\Delta_{1-}^{-1}(+\infty,\xi)p_2^{\top}(\xi), \tag{119}$$

$$A_{12}^{+}(x,y,\xi) = p_1(y)\tilde{\Delta}_{2+}^{-1}(x,y)q_1^{\top}(\xi), \tag{120}$$

$$A_{21}^{+}(x,y,\xi) = -q_2(x)\Delta_{2+}^{-1}(x,y)\Delta_{1-}(+\infty,y)\Delta_{1-}^{-1}(+\infty,\xi)p_2^{\top}(\xi), \tag{121}$$

$$A_{22}^{+}(x,y,\xi) = -q_2(x)\Delta_{2+}^{-1}(x,y)\left(\int_{-\infty}^{y} p_2^{\top}(s)p_1(s)ds\right)q_1^{\top}(\xi). \tag{122}$$

Випишемо явний вигляд елементів операторів $A_{(+)}$, $A_{(-)}$, використавши вигляд їхніх ядер (115)–(122):

$$(A_{(-)})_{11} = p_1(y)\left(\int_{+\infty}^{x} q_1(\tau)^{\top} q_2(\tau)d\tau\right)\Delta_{2+}^{-1}(x,y)\int_{y}^{+\infty} p_2^{\top}(\xi)\cdot d\xi, \tag{123}$$

$$(A_{(-)})_{12} = -p_1(y)\tilde{\Delta}_{2+}^{-1}(x,y)\tilde{\Delta}_{2+}(x,+\infty)\int_{x}^{+\infty}\tilde{\Delta}_{2+}^{-1}(\xi,+\infty)q_1^{\top}(\xi)\cdot d\xi, \tag{124}$$

$$(A_{(-)})_{21} = q_2(x)\Delta_{2+}^{-1}(x,y)\int_{y}^{+\infty} p_2^{\top}(\xi)\cdot d\xi, \tag{125}$$

$$(A_{(-)})_{22} = q_2(x)\Delta_{2+}^{-1}(x,y)\left(\int_{+\infty}^{y} p_2^{\top}(s)p_1(s)ds\right)\int_{x}^{+\infty}\tilde{\Delta}_{2+}^{-1}(\xi,+\infty)q_1^{\top}(\xi)\cdot d\xi, \tag{126}$$

$$(A_{(+)})_{11} = -p_1(y)\tilde{\Delta}_{2+}^{-1}(x,y)\left(\int_{-\infty}^{x} q_1^{\top}(\tau)q_2(\tau)d\tau\right)\int_{-\infty}^{y}\Delta_{1-}^{-1}(+\infty,\xi)p_2^{\top}(\xi)\cdot ds, \tag{127}$$

$$(A_{(+)})_{12} = p_1(y)\tilde{\Delta}_{2+}^{-1}(x,y)\int_{-\infty}^{x} q_1^{\top}(\xi)\cdot d\xi, \tag{128}$$

$$(A_{(+)})_{21} = -q_2(x)\Delta_{2+}^{-1}(x,y)\Delta_{1-}(+\infty,y)\int_{-\infty}^{y}\Delta_{1-}^{-1}(+\infty,\xi)p_2^{\top}(\xi)\cdot d\xi, \tag{129}$$

$$(A_{(+)})_{22} = -q_2(x)\Delta_{2+}^{-1}(x,y)\left(\int_{-\infty}^{y} p_2^{\top}(s)p_1(s)ds\right)\int_{-\infty}^{x} q_1^{\top}(\xi)\cdot d\xi. \tag{130}$$

Скориставшись лемою 1 (див. формули (28)–(29)), отримаємо такі потенціали $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$ у випадку вироджених даних розсіяння F_{12}, G_{21} (56):

$$u_1(x,y) = p_1(y)\tilde{\Delta}_{2+}^{-1}(x,y)q_1^{\top}(x), \tag{131}$$

$$u_2(x,y) = -q_2(x)\Delta_{2+}^{-1}(x,y)p_2^{\top}(y). \tag{132}$$

Записавши $\Delta_{2+}(x,y)$ та $\tilde{\Delta}_{2+}(x,y)$ за формулами (81), (89), отримаємо явний вигляд потенціалів $u_1(x,y)$ та $u_2(x,y)$:

$$u_1(x,y) = p_1(y)\left\{I + \left(\int_{+\infty}^{x} q_1^{\top}(\tau)q_2(\tau)d\tau\right)\left(\int_{-\infty}^{y} p_2^{\top}(s)p_1(s)ds\right)\right\}^{-1} q_1^{\top}(x), \tag{133}$$

$$u_2(x,y) = -q_2(x)\left\{I + \left(\int_{-\infty}^{y} p_2^{\top}(s)p_1(s)ds\right)\left(\int_{+\infty}^{x} q_1^{\top}(\tau)q_2(\tau)d\tau\right)\right\}^{-1} p_2^{\top}(y). \tag{134}$$

Використавши формули (16)–(19) леми 1 та вигляд операторів $B_{(\pm)}$ (105)–(112) та $A_{(\pm)}$ (123)–(130) отримаємо зображення розв'язків системи Дірака (9) у випадку вироджених даних розсіяння F_{12} та G_{21}:

$$\begin{cases} Y_1(x,y) = a_1(y) + p_1(y)\tilde{\Delta}_{2+}^{-1}(x,y)\Big\{ -\Big(\int_{-\infty}^{x} q_1^\top q_2 d\tau\Big) \int_{-\infty}^{y} \Delta_{1-}^{-1}(+\infty, s) p_2^\top(s) a_1(s) ds + \\ + \int_{-\infty}^{x} q_1^\top(s) a_2(s) ds \Big\}, \\ Y_2(x,y) = a_2(x) - q_2(x)\Delta_{2+}^{-1}(x,y)\Big\{ \Delta_{1-}(+\infty, y) \int_{-\infty}^{y} \Delta_{1-}^{-1}(+\infty, s) p_2^\top(s) a_1(s) ds + \\ + \Big(\int_{-\infty}^{y} p_2^\top p_1 ds\Big) \int_{-\infty}^{x} q_1^\top(s) a_2(s) ds \Big\}, \end{cases} \tag{135}$$

$$\begin{cases} Y_1(x,y) = b_1(y) + p_1(y)\tilde{\Delta}_{2+}^{-1}(x,y)\Big\{ \Big(\int_{+\infty}^{x} q_1^\top q_2 d\tau\Big) \int_{y}^{+\infty} p_2^\top(s) b_1(s) ds - \\ -\tilde{\Delta}_{2+}(x, +\infty) \int_{x}^{+\infty} \tilde{\Delta}_{2+}^{-1}(s, +\infty) q_1^\top(s) b_2(s) ds \Big\}, \\ Y_2(x,y) = b_2(x) + q_2(x)\Delta_{2+}^{-1}(x,y)\Big\{ \int_{y}^{+\infty} p_2^\top(s) b_1(s) ds + \\ + \Big(\int_{+\infty}^{y} p_2^\top p_1 ds\Big) \int_{x}^{+\infty} \tilde{\Delta}_{2+}^{-1}(s, +\infty) q_1^\top(s) b_2(s) ds \Big\}, \end{cases} \tag{136}$$

$$\begin{cases} Y_1(x,y) = a_1(y) + p_1(y)\tilde{\Delta}_{2+}^{-1}(x,y)\Big\{ \Big(\int_{-\infty}^{x} q_1^\top q_2 d\tau\Big) \int_{y}^{+\infty} \Delta_{1-}^{-1}(+\infty, s) p_2^\top(s) a_1(s) ds + \\ +\tilde{\Delta}_{2+}(x, +\infty) \int_{-\infty}^{x} \tilde{\Delta}_{2+}^{-1}(s, +\infty) q_1^\top(s) b_2(s) ds \Big\}, \\ Y_2(x,y) = b_2(x) + q_2(x)\Delta_{2+}^{-1}(x,y)\Big\{ \Delta_{1-}(+\infty, y) \int_{y}^{+\infty} \Delta_{1-}^{-1}(+\infty, s) p_2^\top(s) a_1(s) ds - \\ - \Big(\int_{+\infty}^{y} p_2^\top p_1 ds\Big) \int_{-\infty}^{x} \tilde{\Delta}_{2+}^{-1}(s, +\infty) q_1^\top(s) b_2(s) ds \Big\}, \end{cases} \tag{137}$$

$$\begin{cases} Y_1(x,y) = b_1(y) + p_1(y)\tilde{\Delta}_{2+}^{-1}(x,y)\Big\{ -\Big(\int_{+\infty}^{x} q_1^\top q_2 d\tau\Big) \int_{-\infty}^{y} p_2^\top(s) b_1(s) ds - \\ - \int_{x}^{+\infty} q_1^\top(s) a_2(s) ds \Big\}, \\ Y_2(x,y) = a_2(x) + q_2(x)\Delta_{2+}^{-1}(x,y)\Big\{ -\int_{-\infty}^{y} p_2^\top(s) b_1(s) ds + \\ + \Big(\int_{-\infty}^{y} p_2^\top p_1 ds\Big) \int_{x}^{+\infty} q_1^\top(s) a_2(s) ds \Big\}. \end{cases} \tag{138}$$

Підсумуємо отримані результати стосовно операторів $A_{(\pm)}$, $B_{(\pm)}$ та потенціалів $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$ у вигляді теореми:

Теорема 7. *У випадку вироджених даних розсіяння F_{12} та G_{21} (56) оператори перетворень $A_{(\pm)}$ та $B_{(\pm)}$ матимуть вигляд (105)–(112) та (123)–(130) відповідно. Потенціали $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$ зображатимуться у вигляді (133)–(134)*

Теорема 8. [27, 3] *Для будь-яких даних розсіяння F_{12}, G_{21} і довільного $\varepsilon > 0$ існують вироджені дані розсіяння $F_{12,\varepsilon}(x,y) = \tilde{p}_1(y)\tilde{q}_1^\top(x)$, $G_{21,\varepsilon}(x,y) = \tilde{q}_2(x)\tilde{p}_2^\top(y)$, де $\tilde{p}_1(y) := (\tilde{p}_{11}(y), \ldots, \tilde{p}_{1n}(y))$, $\tilde{p}_2(y) := (\tilde{p}_{21}(y), \ldots, \tilde{p}_{2n}(y))$, $\tilde{q}_2(x) := (\tilde{q}_{21}(x), \ldots, \tilde{q}_{2n}(x))$, $\tilde{q}_1(x) := (\tilde{q}_{11}(x), \ldots, \tilde{q}_{1n}(x))$ – вектор-функції розмірності $(1 \times n)$, компоненти яких є лінійно незалежними, такі, що $\|F_{12}(x,y) - F_{12,\varepsilon}(x,y)\|_{\Im} < \varepsilon$, $\|G_{21}(x,y) - G_{21,\varepsilon}(x,y)\|_{\Im} < \varepsilon$, де*

$$\Im = \Big\{ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \Big| \\ ||f||^2 := \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,y)|^2 dxdy < +\infty \Big\} \tag{139}$$

□ *Доведення.* Слідує з загальної теорії апроксимації функцій в $L_2(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C})$ [27] ■

Теорема 9. *Нехай задана система вигляду (9) з коефіцієнтами $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$ і її допустимий розв'язок $Y_1(x,y)$, $Y_2(x,y)$. Тоді*

1. Для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться система (9), яка точно розв'язується, з коефіцієнтами $u_{1,\varepsilon}$, $u_{2,\varepsilon}$ вигляду (133), (134), які задовольняють умови $\|u_{1,\varepsilon} - u_1\|_{L_2} < \varepsilon$, $\|u_{2,\varepsilon} - u_2\|_{L_2} < \varepsilon$

2. Існують такі пари функцій $(a_1,\ a_2)$, $(b_1,\ b_2)$, $(a_1,\ b_2)$, $(b_1,\ a_2)$, де a_i, $b_j \in L_2(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$, $i,j = 1,2$, що розв'язок $Y_\varepsilon(x,y) := \begin{pmatrix} Y_{1,\varepsilon}(x,y) \\ Y_{2,\varepsilon}(x,y) \end{pmatrix}$ системи (1) з коефіцієнтами $u_{1,\varepsilon}, u_{2,\varepsilon}$, який задається однією з систем (135)–(138), близький до $Y(x,y) := \begin{pmatrix} Y_1(x,y) \\ Y_2(x,y) \end{pmatrix}$, тобто $\|Y_\varepsilon - Y\|_\Upsilon < \varepsilon$.

□ *Доведення.* Проводиться аналогічно до доведення відповідної теореми з роботи [27]. ■

Зауваження 4. Теорема 9 узагальнює відповідну теорему 6 з роботи [27], яка є її частковим випадком.

IV. Оператори бінарних перетворень

Далі ми наводимо необхідний мінімум позначень, які використовуються під час формулювання основної теореми – теореми про бінарні перетворення для загального інтегро-диференціального оператора (140). Доведення цієї теореми, а також її важливих наслідків, які дають можливість її застосування в теорії інтегровних лаксових рівнянь, наведено в роботі

[28] (див. також [29]).

Нехай функції φ та ψ є фіксованими $(N \times K)$- матричними розв'язками лінійної інтегро-диференціальної задачі

$$L\{\varphi\} := \alpha\varphi_y - \sum_{i=0}^{n} u_i\varphi^{(i)} + \mathbf{q}M_0\Omega[\mathbf{r},\varphi] = \varphi\Lambda, \quad (140)$$

та транспонованої задачі

$$\begin{gathered} L^\tau\{\psi\} := -\alpha\psi_y - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(u_i^\top\psi)^{(i)} - \\ -\mathbf{r}M_0^\top\Omega[\mathbf{q},\psi] = \psi\tilde{\Lambda}, \end{gathered} \quad (141)$$

з матричними $(N \times N)$ коефіцієнтами $u_i = u_i(x,y)$, $i = \overline{0,n}$ та $\alpha \in \mathbf{R} \cup i\mathbf{R}$. Λ, $\tilde{\Lambda}$ та M_0 – сталі матриці розмірності $(K \times K)$ та $(l \times l)$ відповідно; $q = q(x,y)$ та $r = r(x,y)$ – матричні функції розмірності $(N \times l)$; $\Omega[\mathbf{r},\varphi]$, $\Omega[\mathbf{q},\psi]$ – функції, що задовольняють умови: $\Omega_x[\mathbf{r},\varphi] = \mathbf{r}^\top\varphi$, $\Omega_x[\mathbf{q},\psi] = \mathbf{q}^\top\psi$.

Теорема 10. *Нехай функції f та g розмірності $(N \times 1)$ є розв'язками спектральних задач*

$$L\{f\} := \alpha f_y - \sum_{i=0}^{n} u_i f^{(i)} + \mathbf{q}M_0\Omega[\mathbf{r},f] = f\lambda\,, \quad (142)$$

$$\begin{gathered} L^\tau\{g\} := -\alpha g_y - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(u_i^\top g)^{(i)} - \\ -\mathbf{r}M_0^\top\Omega[\mathbf{q},g] = g\tilde{\lambda}\,, \end{gathered} \quad (143)$$

з власними значеннями λ, $\tilde{\lambda} \in \mathbf{C}$ відповідно, і функціями $\Omega[\mathbf{r},f]$ та $\Omega[\mathbf{q},g]$, де $\Omega_x[\mathbf{r},f] = \mathbf{r}^\top f$, $\Omega_x[\mathbf{q},g] = \mathbf{q}^\top g$.

Тоді

1. Функції $F := W\{f\} = f - \Phi\Omega[\psi,f]$ та $G := W^{-1,\tau}\{g\} = (W^\tau)^{-1}\{g\} = g - \Psi\Omega[\varphi,g]$ з операторами бінарних перетворень $W = I - \Phi\Omega[\psi,\cdot]$, $W^{-1} = I + \varphi\Omega[\Psi,\cdot]$, $W^{-1,\tau} = (W^\tau)^{-1} = I - \Psi\Omega[\varphi,\cdot]$ де

$$\Phi = \varphi(C + \Omega[\psi,\varphi])^{-1}, \;\; \Psi^\top = (C + \Omega[\psi,\varphi])^{-1}\psi^\top,$$

а C – деяка стала матриця розмірності $(K \times K)$, задовольняють спектральні задачі

$$\hat{L}\{F\} = F\lambda\,, \quad (144)$$

$$\hat{L}^\tau\{G\} = G\tilde{\lambda}\,, \quad (145)$$

з інтегро-диференціальними операторами $\hat{L}$, $\hat{L}^\tau$ такого вигляду:

$$\begin{gathered} \hat{L} := WLW^{-1} = \alpha\partial_y - \sum_{i=0}^{n}\hat{u}_iD^i + \\ +\Phi M\Omega[\Psi,\cdot] + \hat{\mathbf{q}}M_0\Omega[\hat{\mathbf{r}},\cdot], \end{gathered} \quad (146)$$

$$\begin{gathered} \hat{L}^\tau = W^{-1,\tau}L^\tau W^\tau = -\alpha\partial_y - \sum_{i=0}^{n}(-1)^iD^i\hat{u}_i - \\ -\Psi M^\top\Omega[\Phi,\cdot] - \hat{\mathbf{r}}M_0^\top\Omega[\hat{\mathbf{q}},\cdot], \end{gathered} \quad (147)$$

де

$$M = C\Lambda - \tilde{\Lambda}^\top C, \quad (148)$$

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \Phi\Omega[\psi,\mathbf{q}], \;\; \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \Psi\Omega[\varphi,\mathbf{r}], \quad (149)$$

$\Omega[\Psi,F]$ і $\Omega[\hat{\mathbf{r}},F]$, $\Omega[\Phi,G]$ і $\Omega[\hat{\mathbf{q}},G]$ – функції, для яких виконуються умови: $\Omega_x[\Psi,F] = \Psi^\top F$, $\Omega_x[\hat{\mathbf{r}},F] = \hat{\mathbf{r}}^\top F$, $\Omega_x[\Phi,G] = \Phi^\top G$, $\Omega_x[\hat{\mathbf{q}},G] = \hat{\mathbf{q}}^\top G$.

2. Коефіцієнти $\hat{u}_l$, $l = \overline{0,n}$ перетвореного оператора $\hat{L}$ мають вигляд:

$$\begin{gathered} \hat{u}_l = u_l - \Phi\sum_{i=l+1}^{n}(-1)^{i-l-1}(\psi^\top u_i)^{(i-l-1)} + \\ + \sum_{i=l+1}^{n}\sum_{j=0}^{i-l-1}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i-j-1 \\ i-j-l-1 \end{pmatrix}\cdot \\ \cdot u_i\varphi^{(j)}(\Psi^\top)^{(i-j-l-1)} - \\ \sum_{i=l+2}^{n}\sum_{j=0}^{i-l-2}\sum_{k=0}^{i-l-j-2}(-1)^j\begin{pmatrix} i-j-1 \\ k \end{pmatrix}\cdot \\ \cdot\begin{pmatrix} i-k-j-2 \\ i-k-j-l-2 \end{pmatrix}\Phi(\psi^\top u_i)^{(j)}\cdot \\ \cdot\varphi^{(k)}(\Psi^\top)^{(i-k-l-j-2)}, \quad l = \overline{0,n-2}\,, \end{gathered} \quad (150)$$

$$\hat{u}_{n-1} = u_{n-1} + u_n\varphi\Psi^\top - \Phi\psi^\top u_n, \quad (151)$$

$$\hat{u}_n = u_n. \quad (152)$$

Теорема 10 та деякі її важливі наслідки (див. [28], [29]) дозволяють інтегрувати широкі класи нелінійних рівнянь як з диференціальними, так і з інтегро-диференціальними зображеннями Лакса [13–25]. Крім того, оператори бінарних перетворень W допускають додаткові фізично важливі редукції типу ермітового спряження (що буде продемонстровано в розділі 9 на прикладі σ-косоермітової системи Дірака), які не "витримують"класичні перетворення Дарбу-Матвєєва [17–18].

V. Бінарні перетворення операторів Дірака. Лабораторні змінні

Розглянемо частковий випадок основної теореми (теорема 10). А саме, нехай

$$N = 2, \quad n = 1, \quad q = 0 = r, \quad \lambda = 0 = \tilde{\lambda},$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad u_1 = \sigma_3 = diag(1,-1), \quad (153)$$

$u_0 = u_0(x,y) := \begin{pmatrix} 0 & -u_1 \\ -u_2 & 0 \end{pmatrix}$ – матрична антидіагональна функція.

Тоді система (140)–(141) є системою нестаціонарних рівнянь Дірака (з просторовою змінною x і еволюційною змінною $y \in \mathbb{R}$).

$$L\{f\} = 0, \quad L = \begin{pmatrix} \alpha\partial_y - \partial_x & u_1(x,y) \\ u_2(x,y) & \alpha\partial_y + \partial_x \end{pmatrix}, \quad (154)$$

і транспонованою до неї відповідно

$$L^\tau\{g\} = 0, \quad L^\tau = \begin{pmatrix} -\alpha\partial_y + \partial_x & u_1(x,y) \\ u_2(x,y) & -\alpha\partial_y - \partial_x \end{pmatrix}. \quad (155)$$

Пряма та обернена задачі для системи Дірака (153) досліджувались вперше в роботі Л.П. Нижника [1]. Сформулюємо прямий наслідок теореми 10

Твердження 2. Під час перетворення подібності оператора Дірака L (154) отримуємо оператор Дірака $\hat{L} := WLW^{-1}$ з потенціалами

$$\hat{u}_1(x,y) = u_1(x,y) - 2\varphi_1(x,y)\Delta^{-1}(x,y)\psi_2^\top(x,y),$$

$$\hat{u}_2(x,y) = u_2(x,y) + 2\varphi_2(x,y)\Delta^{-1}(x,y)\psi_1^\top(x,y), \quad (156)$$

де вектор-функції $\varphi_i,\ \psi_j,\ i,j = 1,2$, є відповідними рядками фіксованих $(2\times K)$-матричних розв'язків φ та ψ лінійних систем (140)–(141) при обмеженнях (153) і тривіальних матрицях $\Lambda = \tilde{\Lambda} = 0$, а $\Delta(x,y) = C + \Omega[\psi,\varphi]$. $d\Omega[\psi,\varphi] = Pdx + Qdy$, $P = P[\psi,\varphi] = \psi^\top\varphi$, $Q = Q[\psi,\varphi] = \alpha^{-1}\psi^\top\sigma_3\varphi$.

За аналогічного перетворення стаціонарного оператора Дірака $L := L_0\ (u_1 \equiv 0,\ u_2 \equiv 0)$ отримаємо оператор $\hat{L} := L$ з потенціалами

$$\hat{u}_1 = -2\varphi_1(y+\alpha x)\Delta^{-1}(x,y)\psi_2^\top(y-\alpha x),$$

$$\hat{u}_2 = +2\varphi_2(y-\alpha x)\Delta^{-1}(x,y)\psi_1^\top(y+\alpha x). \quad (157)$$

У наступних розділах досліджуємо систему рівнянь Дірака (9), яку отримуємо з системи Дірака (154) після переходу від лабораторних змінних до конусних: $y + \alpha x \longrightarrow y, \quad y - \alpha x \longrightarrow x$.

VI. Бінарні перетворення системи Дірака. Конусні змінні

Нехай:

1) $Y = \begin{pmatrix} Y_1(x,y) \\ Y_2(x,y) \end{pmatrix}$ – довільний розв'язок (вектор-стовпець) системи

$$LY = 0 \quad (158)$$

з оператором Дірака

$$L = \begin{pmatrix} \partial_x & u_1 \\ u_2 & \partial_y \end{pmatrix}, \quad (159)$$

а $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,y) \\ \varphi_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1K} \\ \varphi_{21} & \dots & \varphi_{2K} \end{pmatrix}$ – деякий фіксований $(2\times K)$-матричний розв'язок системи (158).

2) $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x,y) \\ \psi_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \dots & \psi_{1K} \\ \psi_{21} & \dots & \psi_{2K} \end{pmatrix}$ – деякий фіксований $(2\times K)$-матричний розв'язок транспонованої системи рівнянь

$$L^\tau\psi = 0,\ \ L^\tau = \begin{pmatrix} -\partial_x & u_2 \\ u_1 & -\partial_y \end{pmatrix}.$$

Неважко перевірити, що $(K\times K)$-матричні функції

$$P[\psi,\varphi] := -\psi_2^\top\varphi_2,\ \ Q[\psi,\varphi] := \psi_1^\top\varphi_1$$

задовольняють співвідношення

$$P_y = Q_x. \quad (160)$$

Наслідком співвідношень (160) є існування $(K\times K)$-матричного потенціалу $\Omega := \Omega[\psi,\varphi]$:

$$d\Omega[\psi,\varphi] = P\,dx + Q\,dy. \quad (161)$$

Оскільки потенціал визначається з точністю до сталої $(K\times K)$-матриці, його завжди можна зробити невиродженим (локально) в околі довільної фіксованої точки (x_0,y_0). Оператор бінарних перетворень W визначається формулою

$$WY := Y - \varphi(C + \Omega[\psi,\varphi])^{-1}\Omega[\psi,Y] = \hat{Y}, \quad (162)$$

де потенціал реалізуємо так:

$$\Omega[\psi,\varphi] := \int_{M_0}^{M} (-\psi_2^\top\varphi_2)\,dx + \psi_1^\top\varphi_1\,dy, \quad (163)$$

$M_0 = (x_0,y_0) \in \bar{\mathbb{R}}^2,\ M = (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

Оператор W переводить оператор L в оператор $\hat{L} = WLW^{-1}$ вигляду

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} \partial_x & \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 & \partial_y \end{pmatrix}, \quad (164)$$

де

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= u_1 - \varphi_1(C + \Omega[\psi,\varphi])^{-1}\psi_2^\top, \\ \hat{u}_2 &= u_2 + \varphi_2(C + \Omega[\psi,\varphi])^{-1}\psi_1^\top. \end{aligned} \quad (165)$$

До того ж функція $\hat{Y} := WY$ є розв'язком системи Дірака (9) з коефіцієнтами (потенціалами) $\hat{u}_1$, $\hat{u}_2$ (165).

У роботі розглядається оператор Дірака L (9), (158) вигляду

$$L = \begin{pmatrix} \partial_x & u_1 \\ u_2 & \partial_y \end{pmatrix},\ \partial_x = \tfrac{\partial}{\partial x},\ \partial_y = \tfrac{\partial}{\partial y}, \quad u_1, u_2 \in L_2(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}), \quad (166)$$

Нехай $Y_0 = \begin{pmatrix} Y_1(y) \\ Y_2(x) \end{pmatrix}$ – довільний, а $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1(y) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix}$ – фіксований матричний розмірності $(2\times K)$ розв'язок незбуреної системи Дірака

$$L_0Y_0 = 0, \quad (167)$$

де $L_0 = \begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y \end{pmatrix}$; а $Z_0 = \begin{pmatrix} Z_1(y) \\ Z_2(x) \end{pmatrix}$ та $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(y) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}$ – довільний та фіксований розв'язки транспонованої системи Дірака

$$L_0^\tau Z_0 = 0, \quad (168)$$

Формули (162)–(165) для незбуреного оператора Дірака набувають такого вигляду:

$$Y = WY_0 = Y_0 - \varphi(C + \Omega[\psi,\varphi])^{-1}\Omega[\psi,Y_0]\ , \quad (169)$$

$$\Omega[\psi,\varphi] := \int_{M_0}^{M} \psi_1^\top\varphi_1\,dy + (-\psi_2^\top\varphi_2)dx, \quad (170)$$

$$L = WL_0W^{-1}, \quad (171)$$

$$
\begin{aligned}
&u_1 = -\varphi_1(C+\Omega[\psi,\varphi])^{-1}\psi_2^\top := -\varphi_1\Delta^{-1}\psi_2^\top,\\
&u_2 = \varphi_2(C+\Omega[\psi,\varphi])^{-1}\psi_1^\top := \varphi_2\Delta^{-1}\psi_1^\top.
\end{aligned}
\tag{172}
$$

За формулою (170) визначимо матричні потенціали $\Omega_1[\psi,\varphi]$ (прийнявши $x_0=-\infty$, $y_0=-\infty$) і $\Omega_2[\psi,\varphi]$ (прийнявши $x_0=+\infty$, $y_0=+\infty$):

$$
\begin{aligned}
\Omega_1[\psi,\varphi] &= \textstyle\int_{-\infty}^{y}\psi_1^\top(s)\varphi_1(s)\,ds+\\
&+(-1)\textstyle\int_{-\infty}^{x}\psi_2^\top(\tau)\varphi_2(\tau)\,d\tau,\\
\Omega_2[\psi,\varphi] &= \textstyle\int_{+\infty}^{y}\psi_1^\top(s)\varphi_1(s)\,ds+\\
&+(-1)\textstyle\int_{+\infty}^{x}\psi_2^\top(\tau)\varphi_2(\tau)\,d\tau.
\end{aligned}
\tag{173}
$$

Враховуючи визначення потенціалів у формі (173), розв'язки системи (9) можна зобразити різними виразами

$$
Y = W_1\tilde{a} = W_2\tilde{b},
\tag{174}
$$

де $\tilde{a}=\begin{pmatrix}\tilde{a}_1(y)\\ \tilde{a}_2(x)\end{pmatrix}$, $\tilde{b}=\begin{pmatrix}\tilde{b}_1(y)\\ \tilde{b}_2(x)\end{pmatrix}$ – деякі вектор-функції, компоненти яких належать $L_2(\mathbb{R}\to\mathbb{C})$, і які є розв'язками незбуреної системи (167),

$$
W_1 = I - \begin{pmatrix}\varphi_1(y)\Delta_1^{-1}\int_{-\infty}^{y}\psi_1^\top(s)\cdot\,ds; & -\varphi_1(y)\Delta_1^{-1}\int_{-\infty}^{x}\psi_2^\top(\tau)\cdot\,d\tau\\ \varphi_2(x)\Delta_1^{-1}\int_{-\infty}^{y}\psi_1^\top(s)\cdot\,ds; & -\varphi_2(x)\Delta_1^{-1}\int_{-\infty}^{x}\psi_2^\top(\tau)\cdot\,d\tau\end{pmatrix},
\tag{175}
$$

$$
\Delta_1 = C_1 + \int_{-\infty}^{y}\psi_1^\top(s)\varphi_1(s)\,ds - \int_{-\infty}^{x}\psi_2^\top(\tau)\varphi_2(\tau)\,d\tau,
\tag{176}
$$

C_1 – довільна стала $(K\times K)$-матриця, I – одиничний оператор;

$$
W_2 = I - \begin{pmatrix}\varphi_1(y)\Delta_2^{-1}\int_{+\infty}^{y}\psi_1^\top(s)\cdot\,ds; & -\varphi_1(y)\Delta_2^{-1}\int_{+\infty}^{x}\psi_2^\top(\tau)\cdot\,d\tau\\ \varphi_2(x)\Delta_2^{-1}\int_{+\infty}^{y}\psi_1^\top(s)\cdot\,ds; & -\varphi_2(x)\Delta_2^{-1}\int_{+\infty}^{x}\psi_2^\top(\tau)\cdot\,d\tau\end{pmatrix},
\tag{177}
$$

$$
\Delta_2 = C_2 + \int_{+\infty}^{y}\psi_1^\top(s)\varphi_1(s)\,ds - \int_{+\infty}^{x}\psi_2^\top(\tau)\varphi_2(\tau)\,d\tau,
\tag{178}
$$

C_2 – стала $(K\times K)$-матриця.

Згідно з основною теоремою 10 (див. п.1.) і формулами (169)–(171), (173) оператори W_1^{-1}, W_2^{-1} є операторами криволінійного інтегрування:

$$
W_1^{-1}Y = Y + \begin{pmatrix}\varphi_1(y)\int_{(-\infty,-\infty)}^{(x,y)}\Big(\Delta_1^{-1}(\tau,s)\psi_1^\top(s)Y_1(\tau,s)\,ds - \Delta_1^{-1}(\tau,s)\psi_2^\top(\tau)Y_2(\tau,s)\,d\tau\Big)\\ \varphi_2(x)\int_{(-\infty,-\infty)}^{(x,y)}\Big(\Delta_1^{-1}(\tau,s)\psi_1^\top(s)Y_1(\tau,s)\,ds - \Delta_1^{-1}(\tau,s)\psi_2^\top(\tau)Y_2(\tau,s)\,d\tau\Big)\end{pmatrix},
\tag{179}
$$

$$
W_2^{-1}Y = Y + \begin{pmatrix}\varphi_1(y)\int_{(+\infty,+\infty)}^{(x,y)}\Big(\Delta_1^{-1}(\tau,s)\psi_1^\top(s)Y_1(\tau,s)\,ds - \Delta_1^{-1}(\tau,s)\psi_2^\top(\tau)Y_2(\tau,s)\,d\tau\Big)\\ \varphi_2(x)\int_{(+\infty,+\infty)}^{(x,y)}\Big(\Delta_1^{-1}(\tau,s)\psi_1^\top(s)Y_1(\tau,s)\,ds - \Delta_1^{-1}(\tau,s)\psi_2^\top(\tau)Y_2(\tau,s)\,d\tau\Big)\end{pmatrix}.
\tag{180}
$$

Дія цих операторів не залежить від вибору кривих, що з'єднують точку $(-\infty,-\infty)\in\overline{\mathbb{R}}^2$ з точкою $(x,y)\in\overline{\mathbb{R}}^2$ та точку $(+\infty,+\infty)$ з точкою (x,y) відповідно. Наприклад, нехай шляхами інтегрування для інтегралів $W_1^{-1}Y-Y$ та $W_2^{-1}Y-Y$ є криві, що мають, відповідно, такий вигляд: $\Gamma_1=\Gamma_{11}\bigcup\Gamma_{12}$ та $\hat\Gamma_1=\hat\Gamma_{11}\bigcup\hat\Gamma_{12}$, де
$\Gamma_{11}=\Big\{(\eta,-\infty)\in\overline{\mathbb{R}}^2,\quad \eta\in[-\infty,x]\Big\}$, $\Gamma_{12}=\Big\{(x,\eta)\in\overline{\mathbb{R}}^2,\quad \eta\in[-\infty,y]\Big\}$,
$\hat\Gamma_{11}=\Big\{(\eta,+\infty)\in\overline{\mathbb{R}}^2,\quad \eta\in[+\infty,x]\Big\}$, $\hat\Gamma_{12}=\Big\{(x,\eta)\in\overline{\mathbb{R}}^2,\quad \eta\in[+\infty,y]\Big\}$.

Тоді оператори W_1^{-1} (179), W_2^{-1} (180) матимуть такий вигляд:

$$
W_1^{-1} = I + \begin{pmatrix}\varphi_1(y)\int_{-\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(x,s)\psi_1^\top(s)\cdot\,ds; & -\varphi_1(y)\int_{-\infty}^{x}\Delta_1^{-1}(\tau,-\infty)\psi_2^\top(\tau)L^-\cdot\,d\tau\\ \varphi_2(x)\int_{-\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(x,s)\psi_1^\top(s)\cdot\,ds; & -\varphi_2(x)\int_{-\infty}^{x}\Delta_1^{-1}(\tau,-\infty)\psi_2^\top(\tau)L^-\cdot\,d\tau\end{pmatrix},
\tag{181}
$$

$$
W_2^{-1} = I + \begin{pmatrix}\varphi_1(y)\int_{+\infty}^{y}\Delta_2^{-1}(x,s)\psi_1^\top(s)\cdot\,ds; & -\varphi_1(y)\int_{+\infty}^{x}\Delta_2^{-1}(\tau,+\infty)\psi_2^\top(\tau)L^+\cdot\,d\tau\\ \varphi_2(x)\int_{+\infty}^{y}\Delta_2^{-1}(x,s)\psi_1^\top(s)\cdot\,ds; & -\varphi_2(x)\int_{+\infty}^{x}\Delta_2^{-1}(\tau,+\infty)\psi_2^\top(\tau)L^+\cdot\,d\tau\end{pmatrix},
\tag{182}
$$

де оператори W_1^{-1}, W_2^{-1} діють на вектор-функцію $Y = \begin{pmatrix} Y_1(x,y) \\ Y_2(x,y) \end{pmatrix}$ так:

$$W_1^{-1}Y = Y+$$

$$+\begin{pmatrix} \varphi_1(y)\int_{-\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(x,s)\psi_1^\top(s)Y_1(x,s)\,ds - \varphi_1(y)\int_{-\infty}^{x}\Delta_1^{-1}(\tau,-\infty)\psi_2^\top(\tau)Y_2(\tau,-\infty)\,d\tau \\ \varphi_2(x)\int_{-\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(x,s)\psi_1^\top(s)Y_1(x,s)\,ds - \varphi_2(x)\int_{-\infty}^{x}\Delta_1^{-1}(\tau,-\infty)\psi_2^\top(\tau)Y_2(\tau,-\infty)\,d\tau \end{pmatrix}, \quad (183)$$

$$W_2^{-1}Y = Y+$$

$$+\begin{pmatrix} \varphi_1(y)\int_{+\infty}^{y}\Delta_2^{-1}(x,s)\psi_1^\top(s)Y_1(x,s)\,ds - \varphi_1(y)\int_{+\infty}^{x}\Delta_2^{-1}(\tau,+\infty)\psi_2^\top(\tau)Y_2(\tau,+\infty)\,d\tau \\ \varphi_2(x)\int_{+\infty}^{y}\Delta_2^{-1}(x,s)\psi_1^\top(s)Y_1(x,s)\,ds - \varphi_2(x)\int_{+\infty}^{x}\Delta_2^{-1}(\tau,+\infty)\psi_2^\top(\tau)Y_2(\tau,+\infty)\,d\tau \end{pmatrix}. \quad (184)$$

Якщо в матричному потенціалі $\Omega[\psi,\varphi]$ (170) прийняти $x_0 = +\infty$, $y_0 = -\infty$ ($x_0 = -\infty$, $y_0 = +\infty$), аналогічно до попередніх міркувань, отримаємо оператори бінарних перетворень Дарбу, які позначатимемо відповідно $\tilde{W}_1$ ($\tilde{W}_2$):

$$\tilde{W}_1 = I - \begin{pmatrix} \varphi_1(y)\tilde{\Delta}_1^{-1}\int_{-\infty}^{y}\psi_1^\top(s)\cdot\,ds; & -\varphi_1(y)\tilde{\Delta}_1^{-1}\int_{+\infty}^{x}\psi_2^\top(\tau)\cdot\,d\tau \\ \varphi_2(x)\tilde{\Delta}_1^{-1}\int_{-\infty}^{y}\psi_1^\top(s)\cdot\,ds; & -\varphi_2(x)\tilde{\Delta}_1^{-1}\int_{+\infty}^{x}\psi_2^\top(\tau)\cdot\,d\tau \end{pmatrix}, \quad (185)$$

$$\tilde{\Delta}_1 = \tilde{C}_1 + \int_{-\infty}^{y}\psi_1^\top(s)\varphi_1(s)\,ds - \int_{+\infty}^{x}\psi_2^\top(\tau)\varphi_2(\tau)\,d\tau, \quad (186)$$

$\tilde{C}_1$ – довільна стала $(2n \times 2n)$-матриця;

$$\tilde{W}_2 = I - \begin{pmatrix} \varphi_1(y)\tilde{\Delta}_2^{-1}\int_{+\infty}^{y}\psi_1^\top(s)\cdot\,ds; & -\varphi_1(y)\tilde{\Delta}_2^{-1}\int_{-\infty}^{x}\psi_2^\top(\tau)\cdot\,d\tau \\ \varphi_2(x)\tilde{\Delta}_2^{-1}\int_{+\infty}^{y}\psi_1^\top(s)\cdot\,ds; & -\varphi_2(x)\tilde{\Delta}_2^{-1}\int_{-\infty}^{x}\psi_2^\top(\tau)\cdot\,d\tau \end{pmatrix}, \quad (187)$$

$$\tilde{\Delta}_2 = \tilde{C}_2 + \int_{+\infty}^{y}\psi_1^\top(s)\varphi_1(s)\,ds - \int_{-\infty}^{x}\psi_2^\top(\tau)\varphi_2(\tau)\,d\tau, \quad (188)$$

$\tilde{C}_2$ – стала матриця.

Згідно з зображенням потенціалів u_1, u_2 (172) $\Delta_1 = \Delta_2 = \tilde{\Delta}_1 = \tilde{\Delta}_2 = \Delta$. З цієї рівності слідують такі співвідношення для сталих матриць C_1, C_2, $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$:

$$C_2 = C_1 + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1^\top(s)\varphi_1(s)\,ds - \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_2^\top(\tau)\varphi_2(\tau)\,d\tau, \quad (189)$$

$$\tilde{C}_1 = C_1 - \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_2^\top(\tau)\varphi_2(\tau)\,d\tau, \quad \tilde{C}_2 = C_1 + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1^\top(s)\varphi_1(s)\,ds. \quad (190)$$

Як і у випадку операторів W_1^{-1} та W_2^{-1} (181)-(182), $\tilde{W}_1^{-1}$ та $\tilde{W}_2^{-1}$ є операторами криволінійного інтегрування:

$$\tilde{W}_1^{-1}Y = Y + \begin{pmatrix} \varphi_1(y)\int_{(+\infty,-\infty)}^{(x,y)}\left(\Delta_1^{-1}(\tau,s)\psi_1^\top(s)Y_1(\tau,s)\,ds - \Delta_1^{-1}(\tau,s)\psi_2^\top(\tau)Y_2(\tau,s)\,d\tau\right) \\ \varphi_2(x)\int_{(+\infty,-\infty)}^{(x,y)}\left(\Delta_1^{-1}(\tau,s)\psi_1^\top(s)Y_1(\tau,s)\,ds - \Delta_1^{-1}(\tau,s)\psi_2^\top(\tau)Y_2(\tau,s)\,d\tau\right) \end{pmatrix}, \quad (191)$$

$$\tilde{W}_2^{-1}Y = Y + \begin{pmatrix} \varphi_1(y)\int_{(-\infty,+\infty)}^{(x,y)}\left(\Delta_1^{-1}(\tau,s)\psi_1^\top(s)Y_1(\tau,s)\,ds - \Delta_1^{-1}(\tau,s)\psi_2^\top(\tau)Y_2(\tau,s)\,d\tau\right) \\ \varphi_2(x)\int_{(-\infty,+\infty)}^{(x,y)}\left(\Delta_1^{-1}(\tau,s)\psi_1^\top(s)Y_1(\tau,s)\,ds - \Delta_1^{-1}(\tau,s)\psi_2^\top(\tau)Y_2(\tau,s)\,d\tau\right) \end{pmatrix}. \quad (192)$$

Нехай шляхами інтегрування для інтегралів $\tilde{W}_1^{-1}Y - Y$ та $\tilde{W}_2^{-1}Y - Y$ є криві, що мають, відповідно, такий вигляд:

$\tilde{\Gamma}_1 = \left\{(\eta, -\eta + x + y) \in \overline{\mathbb{R}}^2, \quad \eta \in [+\infty, x]\right\}$, $\hat{\tilde{\Gamma}}_1 = \left\{(\eta, -\eta + x + y) \in \overline{\mathbb{R}}^2, \quad \eta \in [-\infty, x]\right\}$.

Тоді оператори $\tilde{W}_1^{-1}$ (191), $\tilde{W}_2^{-1}$ (192) можна зобразити так:

$$\tilde{W}_1^{-1} = I + \begin{pmatrix} \varphi_1(y)\int_{-\infty}^{y}\tilde{\Delta}_1^{-1}(-s+x+y,s)\psi_1^\top(s)\cdot\,ds; & -\varphi_1(y)\int_{+\infty}^{x}\tilde{\Delta}_1^{-1}(\tau,-\tau+y+x)\psi_2^\top(\tau)\cdot\,d\tau \\ \varphi_2(x)\int_{-\infty}^{y}\tilde{\Delta}_1^{-1}(-s+x+y,s)\psi_1^\top(s)\cdot\,ds; & -\varphi_2(x)\int_{+\infty}^{x}\tilde{\Delta}_1^{-1}(\tau,-\tau+y+x)\psi_2^\top(\tau)\cdot\,d\tau \end{pmatrix}, \quad (193)$$

$$\tilde{W}_2^{-1} = I + \begin{pmatrix} \varphi_1(y)\int_{+\infty}^{y}\tilde{\Delta}_2^{-1}(-s+x+y,s)\psi_1^\top(s)\cdot\,ds; & -\varphi_1(y)\int_{-\infty}^{x}\tilde{\Delta}_2^{-1}(\tau,-\tau+y+x)\psi_2^\top(\tau)\cdot\,d\tau \\ \varphi_2(x)\int_{+\infty}^{y}\tilde{\Delta}_2^{-1}(-s+x+y,s)\psi_1^\top(s)\cdot\,ds; & -\varphi_2(x)\int_{-\infty}^{x}\tilde{\Delta}_2^{-1}(\tau,-\tau+y+x)\psi_2^\top(\tau)\cdot\,d\tau \end{pmatrix}, \quad (194)$$

де оператори $\tilde W_1^{-1}$, $\tilde W_2^{-1}$ діють на вектор-функцію $Y = \begin{pmatrix} Y_1(x,y) \\ Y_2(x,y) \end{pmatrix}$ так:

$$\tilde W_1^{-1} Y = Y +$$

$$+\begin{pmatrix} \varphi_1(y)\int_{-\infty}^{y} \tilde\Delta_1^{-1}(-s+x+y,s)\psi_1^\top(s)Y_1(-s+x+y,s)ds - \varphi_1(y)\int_{+\infty}^{x}\tilde\Delta_1^{-1}(\tau,-\tau+y+x)\psi_2^\top(\tau)Y_2(\tau,-\tau+y+x)d\tau \\ \varphi_2(x)\int_{-\infty}^{y} \tilde\Delta_1^{-1}(-s+x+y,s)\psi_1^\top(s)Y_1(-s+x+y,s)ds - \varphi_2(x)\int_{+\infty}^{x}\tilde\Delta_1^{-1}(\tau,-\tau+y+x)\psi_2^\top(\tau)Y_2(\tau,-\tau+y+x)d\tau \end{pmatrix},$$

$$\tilde W_2^{-1} Y = Y +$$

$$+\begin{pmatrix} \varphi_1(y)\int_{+\infty}^{y} \tilde\Delta_2^{-1}(-s+x+y,s)\psi_1^\top(s)Y_1(-s+x+y,s)ds - \varphi_1(y)\int_{-\infty}^{x}\tilde\Delta_2^{-1}(\tau,-\tau+y+x)\psi_2^\top(\tau)Y_2(\tau,-\tau+y+x)d\tau \\ \varphi_2(x)\int_{+\infty}^{y} \tilde\Delta_2^{-1}(-s+x+y,s)\psi_1^\top(s)Y_1(-s+x+y,s)\,ds - \varphi_2(x)\int_{-\infty}^{x}\tilde\Delta_2^{-1}(\tau,-\tau+y+x)\psi_2^\top(\tau)Y_2(\tau,-\tau+y+x)d\tau \end{pmatrix}.$$

Оператори $\tilde W_1^{-1}$, $\tilde W_2^{-1}$ аналогічно як і оператори W_1^{-1}, W_2^{-1} (183)–(184), діють з простору розв'язків збуреної системи Дірака (166) з потенціалами (172) у простір розв'язків незбуреної системи Дірака (167). Перевіримо це на прикладі оператора W_1^{-1}. Нехай $Y(x,y) := \begin{pmatrix} Y_1(x,y) \\ Y_2(x,y) \end{pmatrix}$ є розв'язком системи Дірака (166) з потенціалами (172), а $\tilde a = \begin{pmatrix} \tilde a_1(x,y) \\ \tilde a_2(x,y) \end{pmatrix} := W_1^{-1}Y$. Покажемо, що $\tilde a = \begin{pmatrix} \tilde a_1(y) \\ \tilde a_2(x) \end{pmatrix}$, тобто $\tilde a$ є розв'язком незбуреної системи Дірака (167). Обмежимось тільки першою компонентою $\tilde a_1(x,y)$:

$$\begin{aligned} &\partial_x(\tilde a_1(x,y)) = (Y_1(x,y))'_x + \varphi_1(y)\int_{-\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(x,s)\psi_2^\top(x)\varphi_2(x)\Delta_1^{-1}(x,s)\psi_1^\top(s)Y_1(x,s)ds+ \\ &+\varphi_1(y)\int_{-\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(x,s)\psi_1^\top(s)(Y_1(x,s))'_x ds - \varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(x,-\infty)\psi_2^\top(x)Y_2(x,-\infty) = \\ &= (Y_1(x,y))'_x - \varphi_1(y)\int_{-\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(x,s)\psi_2^\top(x)(Y_2(x,s))'_s ds + \varphi_1(y)\int_{-\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(x,s)\psi_1^\top(s)\varphi_1(s)\Delta_1^{-1}(x,s)\cdot \\ &\cdot\psi_2^\top(x)Y_2(x,s)ds - \varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(x,-\infty)\psi_2^\top(x)Y_2(x,-\infty) = (Y_1(x,y))'_x - \varphi_1(y)\int_{-\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(x,s)\psi_2^\top(x)\cdot \\ &\cdot(Y_2(x,s))'_s ds - \varphi_1(y)\int_{-\infty}^{y}(\Delta_1^{-1}(x,s))'_s\psi_2^\top(x)Y_2(x,s)ds - \varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(x,-\infty)\psi_2^\top(x)Y_2(x,-\infty) = \\ &= (Y_1(x,y))'_x - \varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(x,y)\psi_2^\top(x)Y_2(x,y) + \varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(x,-\infty)\psi_2^\top(x)Y_2(x,-\infty) - \\ &-\varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(x,-\infty)\psi_2^\top(x)Y_2(x,-\infty) = 0. \end{aligned} \tag{195}$$

Аналогічно виконується рівність $\partial_y(\tilde a_2(x,y)) = 0$. Отже, $\tilde a$ є розв'язком незбуреної системи Дірака.

VII. Інваріантні оператори (Оператори автоперетворень)

Із зображення розв'язків (174) у зв'язку з існуванням обернених операторів W_1^{-1}, W_2^{-1} (181)–(182) отримуємо взаємно однозначний зв'язок між вектор-функціями $\tilde a$, $\tilde b$. Цей зв'язок визначає оператор $\mathbf{S}$:

$$\tilde b = \mathbf{S}\tilde a, \;\; \mathbf{S} := W_2^{-1}W_1, \tag{196}$$

що діє інваріантно у просторі розв'язків незбуреної системи Дірака (167), тобто $[L_0, \mathbf{S}] = 0$.

Використавши формули (175), (182) отримаємо:

$$\mathbf{S} = I - \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(y)\Delta_2^{-1}(+\infty,+\infty)\psi_1^\top(s)\cdot\, ds; & -\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(y)\Delta_2^{-1}(+\infty,+\infty)\psi_2^\top(\tau)\cdot\, d\tau \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2(x)\Delta_2^{-1}(+\infty,+\infty)\psi_1^\top(s)\cdot\, ds; & -\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2(x)\Delta_2^{-1}(+\infty,+\infty)\psi_2^\top(\tau)\cdot\, d\tau \end{pmatrix}. \tag{197}$$

З формул (177), (181) знаходимо оператор $\mathbf{S}^{-1}$ в явному вигляді

$$\mathbf{S}^{-1} = W_1^{-1}W_2 = I +$$

$$+\begin{pmatrix} \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(-\infty,-\infty)\psi_1^\top(s)\cdot\, ds; & -\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(-\infty,-\infty)\psi_2^\top(\tau)\cdot\, d\tau \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2(x)\Delta_1^{-1}(-\infty,-\infty)\psi_1^\top(s)\cdot\, ds; & -\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2(x)\Delta_1^{-1}(-\infty,-\infty)\psi_2^\top(\tau)\cdot\, d\tau \end{pmatrix}. \tag{198}$$

Потенціали u_1 та u_2 оператора Дірака L (166) згідно з формулами (172) можна також подати у вигляді

$$\begin{aligned} u_1 &= -\varphi_1(C_1 + \Omega_1[\psi,\varphi])^{-1}\psi_2^\top, \\ u_2 &= \varphi_2(C_2 + \Omega_2[\psi,\varphi])^{-1}\psi_1^\top, \end{aligned} \tag{199}$$

де сталі C_1, C_2 зв'язані співвідношенням (189).

Аналогічно до формул (196)–(198) визначимо оператори $\tilde{\mathbf{S}}$, $\tilde{\mathbf{S}}^{-1}$:

$$\tilde b = \tilde{\mathbf{S}}\tilde a, \;\; \tilde{\mathbf{S}} := \tilde W_2^{-1}\tilde W_1, \;\; \tilde{\mathbf{S}}^{-1} := \tilde W_1^{-1}\tilde W_2. \tag{200}$$

Використовуючи формули (175), (177), (181), (182) отримуємо явний вигляд операторів (200):

$$\tilde{\mathbf{S}} = I-$$
$$-\begin{pmatrix} \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(y)\tilde{\Delta}_2^{-1}(-\infty,+\infty)\psi_1^\top(s)\cdot\, ds; & -\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(y)\tilde{\Delta}_2^{-1}(-\infty,+\infty)\psi_2^\top(\tau)\cdot\, d\tau \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2(x)\tilde{\Delta}_2^{-1}(-\infty,+\infty)\psi_1^\top(s)\cdot\, ds; & -\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2(x)\tilde{\Delta}_2^{-1}(-\infty,+\infty)\psi_2^\top(\tau)\cdot\, d\tau \end{pmatrix}. \tag{201}$$

$$\tilde{\mathbf{S}}^{-1} = I+$$
$$+\begin{pmatrix} \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(y)\tilde{\Delta}_1^{-1}(+\infty,-\infty)\psi_1^\top(s)\cdot\, ds; & -\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(y)\tilde{\Delta}_1^{-1}(+\infty,-\infty)\psi_2^\top(\tau)\cdot\, d\tau \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2(x)\tilde{\Delta}_1^{-1}(+\infty,-\infty)\psi_1^\top(s)\cdot\, ds; & -\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2(x)\tilde{\Delta}_1^{-1}(+\infty,-\infty)\psi_2^\top(\tau)\cdot\, d\tau \end{pmatrix}. \tag{202}$$

VIII. Оператори розсіяння

8.1. Розглянемо пари $(a_1(y), a_2(x))$, $(b_1(y), b_2(x))$ асимптотик (11) і визначимо оператор розсіяння S рівністю

$$\begin{pmatrix} b_1(y) \\ b_2(x) \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} a_1(y) \\ a_2(x) \end{pmatrix}. \tag{203}$$

У цьому розділі ми показуємо, що оператор розсіяння S для системи Дірака (9) є композицією трьох автоперетворень типу Дарбу, одне з яких задається інваріантним оператором $\mathbf{S} = W_2^{-1}W_1$.

Оператор розсіяння S побудуємо за допомогою бінарних перетворень (175), (177). Для цього в рівності (196) приймемо

$$\tilde{a} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1(y) \\ \tilde{a}_2(x) \end{pmatrix} = \mathbf{S}_1^{-1}\begin{pmatrix} a_1(y) \\ a_2(x) \end{pmatrix},$$
$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1(y) \\ \tilde{b}_2(x) \end{pmatrix} = \mathbf{S}_2^{-1}\begin{pmatrix} b_1(y) \\ b_2(x) \end{pmatrix}, \tag{204}$$

де оператори $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ задаємо так, щоб виконувались умови:

$$(W_1\mathbf{S}_1^{-1}a)_1 \xrightarrow[x\to-\infty]{} a_1(y),\ (W_1\mathbf{S}_1^{-1}a)_2 \xrightarrow[y\to-\infty]{} a_2(x),$$
$$(W_2\mathbf{S}_2^{-1}b)_1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} b_1(y),\ (W_2\mathbf{S}_2^{-1}b)_2 \xrightarrow[y\to+\infty]{} b_2(x).$$

Розпишемо перші дві умови для знаходження оператора $\mathbf{S}_1$:

$$\begin{aligned}
&(W_1\mathbf{S}_1^{-1}a)_1(x,y) = (\mathbf{S}_1^{-1}a)_1(y) - \varphi_1(y)\Delta_1^{-1}\int_{-\infty}^{y}\psi_1^\top(s)(\mathbf{S}_1^{-1}a)_1(s)\,ds-\\
&-\varphi_1(y)\Delta_1^{-1}\int_{-\infty}^{x}\psi_2^\top(\tau)(\mathbf{S}_1^{-1}a)_2(\tau)\,d\tau \xrightarrow[x\to-\infty]{} (\mathbf{S}_1^{-1}a)_1(y) - \varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(-\infty,y)\int_{-\infty}^{y}\psi_1^\top(s)(\mathbf{S}_1^{-1}a)_1(s)\,ds =\\
&= \Big(I - \varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(-\infty,y)\int_{-\infty}^{y}\psi_1^\top(s)\cdot\, ds\Big)\circ\left(\mathbf{S}_1^{-1}\right)_{11}\{a_1(y)\} = a_1(y),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(W_1\mathbf{S}_1^{-1}a)_2(x,y) = (\mathbf{S}_1^{-1}a)_2(x) - \varphi_2(x)\Delta_1^{-1}\int_{-\infty}^{y}\psi_1^\top(s)(\mathbf{S}_1^{-1}a)_1(s)\,ds-\\
&-\varphi_2(x)\Delta_1^{-1}\int_{-\infty}^{x}\psi_2^\top(\tau)(\mathbf{S}_1^{-1}a)_2(\tau)\,d\tau \xrightarrow[y\to-\infty]{} (\mathbf{S}_1^{-1}a)_2(x) - \varphi_2(x)\Delta_1^{-1}(x,-\infty)\int_{-\infty}^{x}\psi_2^\top(\tau)(\mathbf{S}_1^{-1}a)_2(\tau)\,d\tau =\\
&= \Big(I - \varphi_2(x)\Delta_1^{-1}(x,-\infty)\int_{-\infty}^{x}\psi_2^\top(\tau)\cdot\, d\tau\Big)\circ\left(\mathbf{S}_1^{-1}\right)_{22}\{a_2(x)\} = a_2(x).
\end{aligned}$$

Скориставшись теоремою 10, а саме, виглядом оператора $W = I - \Phi\Omega[\psi,\cdot]$ та оберненого $W^{-1} = I + \varphi\Omega[\Psi,\cdot]$, отримуємо оператори $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_1^{-1}$:

$$\mathbf{S}_1 = I + \begin{pmatrix} -\varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(-\infty,y)\int_{-\infty}^{y}\psi_1^\top(s)\cdot\, ds & 0 \\ 0 & \varphi_2(x)\Delta_1^{-1}(x,-\infty)\int_{-\infty}^{x}\psi_2^\top(\tau)\cdot\, d\tau \end{pmatrix}, \tag{205}$$

$$\mathbf{S}_1^{-1} = I + \begin{pmatrix} \varphi_1(y)\int_{-\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(-\infty,s)\psi_1^\top(s)\cdot\, ds & 0 \\ 0 & \varphi_2(x)\int_{-\infty}^{x}\Delta_1^{-1}(\tau,-\infty)\psi_2^\top(\tau)\cdot\, d\tau \end{pmatrix}, \tag{206}$$

Аналогічно отримуємо оператори $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_2^{-1}$:

$$\mathbf{S}_2 = I + \begin{pmatrix} -\varphi_1(y)\Delta_2^{-1}(+\infty,y)\int_{+\infty}^{y}\psi_1^\top(s)\cdot\, ds & 0 \\ 0 & \varphi_2(x)\Delta_1^{-1}(x,+\infty)\int_{+\infty}^{x}\psi_2^\top(\tau)\cdot\, d\tau \end{pmatrix}, \tag{207}$$

$$\mathbf{S}_2^{-1} = I + \begin{pmatrix} \varphi_1(y)\int_{+\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(+\infty,s)\psi_1^\top(s)\cdot\, ds & 0 \\ 0 & \varphi_2(x)\int_{-\infty}^{x}\Delta_2^{-1}(\tau,+\infty)\psi_2^\top(\tau)\cdot\, d\tau \end{pmatrix}. \tag{208}$$

Оператори $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ та їх обернені є операторами бінарних автоперетворень типу Дарбу в просторі розв'язків незбуреної системи Дірака (167). Визначення цих операторів дозволяє задовольнити умову (203), яка виділяє серед усіх операторів, що діють інваріантно у просторі розв'язків незбуреної системи (167), єдиний оператор розсіяння S. А саме, з рівностей (196), (203), (204) отримуємо

$$S = \mathbf{S}_2 \mathbf{S} \mathbf{S}_1^{-1}. \tag{209}$$

Безпосереднім обчисленням, використавши (175), (182), (207), (206) отримуємо оператор розсіяння S у явному вигляді:

$$S = I + \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}, \tag{210}$$

де

$$F_{11} = -\varphi_1(y)\Delta_2^{-1}(+\infty, y)\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2^\top \varphi_2 dx\right\}\int_{-\infty}^{y} \Delta_2^{-1}(-\infty, s)\psi_1^\top(s)\cdot ds; \tag{211}$$

$$F_{12} = \varphi_1(y)\Delta_2^{-1}(+\infty, y)\Delta_2(+\infty, -\infty)\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_2^{-1}(\tau, -\infty)\psi_2^\top(\tau)\cdot d\tau; \tag{212}$$

$$F_{21} = -\varphi_2(x)\Delta_2^{-1}(x, +\infty)\Delta_2(-\infty, +\infty)\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_2^{-1}(-\infty, s)\psi_1^\top(s)\cdot ds; \tag{213}$$

$$F_{22} = -\varphi_2(x)\Delta_2^{-1}(x, +\infty)\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^\top \varphi_1 dy\right\}\int_{-\infty}^{x} \Delta_2^{-1}(\tau, -\infty)\psi_2^\top(\tau)\cdot d\tau. \tag{214}$$

З формул (209) та (196) отримаємо:

$$S^{-1} = \mathbf{S}_1 W_1^{-1} W_2 \mathbf{S}_2^{-1}. \tag{215}$$

Шляхом безпосередніх обчислень знаходиться явний вигляд оператора S^{-1}:

$$S^{-1} = I + \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}, \tag{216}$$

де

$$G_{11} = \varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(-\infty, y)\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2^\top \varphi_2 dx\right\}\int_{+\infty}^{y} \Delta_1^{-1}(+\infty, s)\psi_1^\top(s)\cdot ds; \tag{217}$$

$$G_{12} = -\varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(-\infty, y)\Delta_1(-\infty, +\infty)\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_1^{-1}(\tau, +\infty)\psi_2^\top(\tau)\cdot d\tau; \tag{218}$$

$$G_{21} = \varphi_2(x)\Delta_1^{-1}(x, -\infty)\Delta_1(+\infty, -\infty)\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_1^{-1}(+\infty, s)\psi_1^\top(s)\cdot ds; \tag{219}$$

$$G_{22} = \varphi_2(x)\Delta_1^{-1}(x, -\infty)\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^\top \varphi_1 dy\right\}\int_{+\infty}^{x} \Delta_1^{-1}(\tau, +\infty)\psi_2^\top(\tau)\cdot d\tau. \tag{220}$$

Зауважимо, що рівність (209), враховуючи (204), можна записати так:

$$S = \mathbf{S}_2 W_2^{-1} W_1 \mathbf{S}_1^{-1} = \hat{W}_2^{-1}\hat{W}_1, \tag{221}$$

де

$$\hat{W}_1 = W_1\mathbf{S}_1^{-1},\ \ \hat{W}_2 = W_2\mathbf{S}_2^{-1} \tag{222}$$

є звичайними операторами перетворень, що перетворюють відповідні асимптотики в розв'язки рівнянь Дірака.

Оператори бінарних перетворень Дарбу $\hat{W}_1$, $\hat{W}_2$ мають, відповідно, вигляд:

$$\hat{W}_1 = I + \begin{pmatrix} A_{11}^+ & A_{12}^+ \\ A_{21}^+ & A_{22}^+ \end{pmatrix} := I + A_{(+)},\ \ \hat{W}_2 = I + \begin{pmatrix} A_{11}^- & A_{12}^- \\ A_{21}^- & A_{22}^- \end{pmatrix} := I + A_{(-)}, \tag{223}$$

де

$$A_{11}^+ = \varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(x, y)\left[-\int_{-\infty}^{x} \psi_2^\top \varphi_2\, d\tau\right]\int_{-\infty}^{y} \Delta_1^{-1}(-\infty, s)\psi_1^\top(s)\cdot\ ds, \tag{224}$$

$$A_{12}^+ = \varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(x, y)\Delta_1(x, -\infty)\int_{-\infty}^{x} \Delta_1^{-1}(\tau, -\infty)\psi_2^\top(\tau)\cdot\ d\tau, \tag{225}$$

$$A_{21}^+ = -\varphi_2(x)\Delta_1^{-1}(x, y)\Delta_1(-\infty, y)\int_{-\infty}^{y} \Delta_1^{-1}(-\infty, s)\psi_1^\top(s)\cdot\ ds, \tag{226}$$

$$A_{22}^+ = -\varphi_2(x)\Delta_1^{-1}(x, y)\left[\int_{-\infty}^{y} \psi_1^\top \varphi_1\, ds\right]\int_{-\infty}^{x} \Delta_1^{-1}(\tau, -\infty)\psi_2^\top(\tau)\cdot\ d\tau, \tag{227}$$

$$A_{11}^- = \varphi_1(y)\Delta_2^{-1}(x, y)\left[-\int_{+\infty}^{x} \psi_2^\top \varphi_2\, d\tau\right]\int_{+\infty}^{y} \Delta_2^{-1}(+\infty, s)\psi_1^\top(s)\cdot\ ds, \tag{228}$$

$$A_{12}^- = \varphi_1(y)\Delta_2^{-1}(x, y)\Delta_2(x, +\infty)\int_{+\infty}^{x} \Delta_2^{-1}(\tau, +\infty)\psi_2^\top(\tau)\cdot\ d\tau, \tag{229}$$

$$A_{21}^{-} = -\varphi_2(x)\Delta_2^{-1}(x,y)\Delta_2(+\infty,y)\int_{+\infty}^{y}\Delta_2^{-1}(+\infty,s)\psi_1^{\top}(s)\cdot\, ds, \tag{230}$$

$$A_{22}^{-} = -\varphi_2(x)\Delta_2^{-1}(x,y)\left[\int_{+\infty}^{y}\psi_1^{\top}\varphi_1\, ds\right]\int_{+\infty}^{x}\Delta_2^{-1}(\tau,+\infty)\psi_2^{\top}(\tau)\cdot\, d\tau. \tag{231}$$

Із зображень (222) отримуємо формули для знаходження обернених операторів $\hat{W}_1^{-1}$ та $\hat{W}_2^{-1}$:

$$\hat{W}_1^{-1} = \mathbf{S}_1 W_1^{-1},\ \ \hat{W}_2^{-1} = \mathbf{S}_2 W_2^{-1}. \tag{232}$$

Елементи матричних операторів $\hat{W}_1^{-1}$, $\hat{W}_2^{-1}$ матимуть такий вигляд:

$$(\hat{W}_1^{-1})_{11} = I + \varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(-\infty,y)\left(\int_{-\infty}^{x}\psi_2^{\top}\varphi_2 d\tau\right)\int_{-\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(x,s)\psi_1^{\top}(s)\cdot ds, \tag{233}$$

$$(\hat{W}_1^{-1})_{12} = -\varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(-\infty,y)\Delta_1(-\infty,-\infty)\int_{-\infty}^{x}\Delta_1^{-1}(\tau,-\infty)\psi_2^{\top}(\tau)L^{-}\cdot d\tau, \tag{234}$$

$$\begin{gathered}(\hat{W}_1^{-1})_{21} = \varphi_2(x)\Delta_1^{-1}(x,-\infty)\int_{-\infty}^{x}\psi_2^{\top}(\tau)\varphi_2(\tau)\left(\int_{-\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(\tau,s)\psi^{\top}(s)\cdot ds\right)d\tau+\\ +\varphi_2(x)\int_{-\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(x,s)\psi_1^{\top}(s)\cdot ds,\end{gathered} \tag{235}$$

$$(\hat{W}_1^{-1})_{22} = I + \varphi_2(x)\Delta_1^{-1}(x,-\infty)\left\{\int_{-\infty}^{x}\psi_2^{\top}(\tau)\cdot d\tau - \int_{-\infty}^{x}\psi_2^{\top}(\tau)L^{-}\cdot d\tau\right\}, \tag{236}$$

$$(\hat{W}_2^{-1})_{11} = I + \varphi_1(y)\Delta_2^{-1}(+\infty,y)\left(\int_{+\infty}^{x}\psi_2^{\top}\varphi_2 d\tau\right)\int_{+\infty}^{y}\Delta_2^{-1}(x,s)\psi_1^{\top}(s)\cdot ds, \tag{237}$$

$$(\hat{W}_2^{-1})_{12} = -\varphi_1(y)\Delta_2^{-1}(+\infty,y)\int_{+\infty}^{x}\Delta_2(+\infty,+\infty)\Delta_2^{-1}(\tau,+\infty)\psi_2^{\top}(\tau)L^{+}\cdot d\tau, \tag{238}$$

$$\begin{gathered}(\hat{W}_2^{-1})_{21} = \varphi_2(x)\Delta_2^{-1}(x,+\infty)\int_{+\infty}^{x}\psi_2^{\top}(\tau)\varphi_2(\tau)\left\{\int_{+\infty}^{y}\Delta_2^{-1}(\tau,s)\psi_1^{\top}(s)\cdot ds\right\}d\tau+\\ +\varphi_2(x)\int_{+\infty}^{y}\Delta_2^{-1}(x,s)\psi_1^{\top}(s)\cdot ds,\end{gathered} \tag{239}$$

$$(\hat{W}_2^{-1})_{22} = I + \varphi_2(x)\Delta_2^{-1}(x,+\infty)\left\{\int_{+\infty}^{x}\psi_2^{\top}(\tau)\cdot d\tau - \int_{+\infty}^{x}\psi_2^{\top}(\tau)L^{+}\cdot d\tau\right\}. \tag{240}$$

Оператори $\hat{W}_1^{-1}$, $\hat{W}_2^{-1}$ діють на функцію $Y(x,y) := \begin{pmatrix} Y_1(x,y) \\ Y_2(x,y)\end{pmatrix}$ так:

$$\hat{W}_1^{-1}Y(x,y) = \begin{pmatrix} (\hat{W}_1^{-1})_{11}Y_1(x,y) + (\hat{W}_1^{-1})_{12}Y_2(x,y) \\ (\hat{W}_1^{-1})_{21}Y_1(x,y) + (\hat{W}_1^{-1})_{22}Y_2(x,y)\end{pmatrix}, \tag{241}$$

$$\hat{W}_2^{-1}Y(x,y) = \begin{pmatrix} (\hat{W}_2^{-1})_{11}Y_1(x,y) + (\hat{W}_2^{-1})_{12}Y_2(x,y) \\ (\hat{W}_2^{-1})_{21}Y_1(x,y) + (\hat{W}_2^{-1})_{22}Y_2(x,y)\end{pmatrix}, \tag{242}$$

де

$$(\hat{W}_1^{-1})_{11}Y_1(x,y) = Y_1(x,y) + \varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(-\infty,y)\left(\int_{-\infty}^{x}\psi_2^{\top}\varphi_2 d\tau\right)\int_{-\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(x,s)\psi_1^{\top}(s)Y_1(x,s)ds, \tag{243}$$

$$(\hat{W}_1^{-1})_{12}Y_2(x,y) = -\varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(-\infty,y)\Delta_1(-\infty,-\infty)\int_{-\infty}^{x}\Delta_1^{-1}(\tau,-\infty)\psi_2^{\top}(\tau)Y_2(\tau,-\infty)d\tau, \tag{244}$$

$$\begin{gathered}(\hat{W}_1^{-1})_{21}Y_1(x,y) = \varphi_2(x)\Delta_1^{-1}(x,-\infty)\int_{-\infty}^{x}\psi_2^{\top}(\tau)\varphi_2(\tau)\left(\int_{-\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(\tau,s)\psi^{\top}(s)Y_1(\tau,s)ds\right)d\tau+\\ +\varphi_2(x)\int_{-\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(x,s)\psi_1^{\top}(s)Y_1(x,s)ds,\end{gathered} \tag{245}$$

$$(\hat{W}_1^{-1})_{22}Y_2(x,y) = Y_2(x,y) + \varphi_2(x)\Delta_1^{-1}(x,-\infty)\left\{\int_{-\infty}^{x}\psi_2^{\top}(\tau)Y_2(\tau,y)d\tau - \int_{-\infty}^{x}\psi_2^{\top}(\tau)Y_2(\tau,-\infty)d\tau\right\}, \tag{246}$$

$$(\hat{W}_2^{-1})_{11}Y_1(x,y) = Y_1(x,y) + \varphi_1(y)\Delta_2^{-1}(+\infty,y)\left(\int_{+\infty}^{x}\psi_2^{\top}\varphi_2 d\tau\right)\int_{+\infty}^{y}\Delta_2^{-1}(x,s)\psi_1^{\top}(s)Y_1(x,s)ds, \tag{247}$$

$$(\hat{W}_2^{-1})_{12}Y_2(x,y) = -\varphi_1(y)\Delta_2^{-1}(+\infty,y)\int_{+\infty}^{x}\Delta_2(+\infty,+\infty)\Delta_2^{-1}(\tau,+\infty)\psi_2^{\top}(\tau)Y_2(\tau,+\infty)d\tau, \tag{248}$$

$$\begin{gathered}(\hat{W}_2^{-1})_{21}Y_1(x,y) = \varphi_2(x)\Delta_2^{-1}(x,+\infty)\int_{+\infty}^{x}\psi_2^{\top}(\tau)\varphi_2(\tau)\left\{\int_{+\infty}^{y}\Delta_2^{-1}(\tau,s)\psi_1^{\top}(s)Y_1(\tau,s)ds\right\}d\tau+\\ +\varphi_2(x)\int_{+\infty}^{y}\Delta_2^{-1}(x,s)\psi_1^{\top}(s)Y_1(x,s)ds,\end{gathered} \tag{249}$$

$$(\hat{W}_2^{-1})_{22}Y_2(x,y) = Y_2(x,y) + \varphi_2(x)\Delta_2^{-1}(x,+\infty)\left\{\int_{+\infty}^{x}\psi_2^{\top}(\tau)Y_2(\tau,y)d\tau - \int_{+\infty}^{x}\psi_2^{\top}(\tau)Y_2(\tau,+\infty)d\tau\right\}. \tag{250}$$

Зауваження 5. Оператори $\hat W_1^{-1}$ (233)–(236) та $\hat W_2^{-1}$ (237)-(240) можна зобразити в іншому, простішому та симетричнішому вигляді:

$$\hat W_1^{-1} = \begin{pmatrix} I; & -\varphi_1(y)\int_{-\infty}^{x}\Delta_1^{-1}(\tau,y)\psi_2^{\top}(\tau)\cdot\, d\tau \\ \varphi_2(x)\int_{-\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(x,s)\psi_1^{\top}(s)\cdot\, ds; & I \end{pmatrix}, \tag{251}$$

$$\hat W_2^{-1} = \begin{pmatrix} I; & -\varphi_1(y)\int_{+\infty}^{x}\Delta_2^{-1}(\tau,y)\psi_2^{\top}(\tau)\cdot\, d\tau \\ \varphi_2(x)\int_{+\infty}^{y}\Delta_2^{-1}(x,s)\psi_1^{\top}(s)\cdot\, ds; & I \end{pmatrix}. \tag{252}$$

Доведемо, наприклад, еквівалентність зображень оператора $\hat W_1^{-1}$ (233)–(236) та (251):

$$\begin{aligned}
&(\hat W_1^{-1}Y(x,y))_1 = Y_1(x,y) + \varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(-\infty,y)\left(\int_{-\infty}^{x}\psi_2^{\top}\varphi_2 d\tau\right)\int_{-\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(x,s)\psi_1^{\top}(s)Y_1(x,s)ds-\\
&-\varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(-\infty,y)\Delta_1(-\infty,-\infty)\int_{-\infty}^{x}\Delta_1^{-1}(\tau,-\infty)\psi_2^{\top}(\tau)Y_2(\tau,-\infty)d\tau = Y_1(x,y)+\varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(-\infty,y)\cdot\\
&\cdot\int_{-\infty}^{x}\left\{\int_{-\infty}^{y}\left(\left(\int_{-\infty}^{\tau}\psi_2^{\top}\varphi_2 dr\right)\Delta_1^{-1}(\tau,s)\psi_1^{\top}(s)Y_1(\tau,s)\right)_{\tau}ds\right\}d\tau - \varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(-\infty,y)\Delta_1(-\infty,-\infty)\cdot\\
&\cdot\int_{-\infty}^{x}\Delta_1^{-1}(\tau,-\infty)\psi_2^{\top}(\tau)Y_2(\tau,-\infty)d\tau = Y_1(x,y)+\varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(-\infty,y)\int_{-\infty}^{x}\left\{\int_{-\infty}^{y}\left(\psi_2^{\top}(\tau)\varphi_2(\tau)\Delta_1^{-1}(\tau,s)\,\cdot\right.\right.\\
&\cdot\psi_1^{\top}(s)Y_1(\tau,s)\ +\left(\int_{-\infty}^{\tau}\psi_2^{\top}\varphi_2 dr\right)\Delta_1^{-1}(\tau,s)\psi_2^{\top}(\tau)\varphi_2(\tau)\Delta_1^{-1}(\tau,s)\psi_1^{\top}(s)Y_1(\tau,s)+\left(\int_{-\infty}^{\tau}\psi_2^{\top}\varphi_2 dr\right)\cdot\\
&\left.\left.\cdot\ \Delta_1^{-1}(\tau,s)\psi_1^{\top}(s)(Y_1(\tau,s))_{\tau}\right)ds\right\}d\tau = Y_1(x,y)+\varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(-\infty,y)\int_{-\infty}^{x}\left\{\int_{-\infty}^{y}\left(-\psi_2^{\top}(\tau)(Y_2(\tau,s))_s+\right.\right.\\
&-\left(\int_{-\infty}^{\tau}\psi_2^{\top}\varphi_2 dr\right)\Delta_1^{-1}(\tau,s)\psi_2^{\top}(\tau)(Y_2(\tau,s))_s+\left(\int_{-\infty}^{\tau}\psi_2^{\top}\varphi_2 dr\right)\Delta_1^{-1}(\tau,s)\psi_1^{\top}(s)\varphi_1(s)\Delta_1^{-1}(\tau,s)\cdot\\
&\left.\left.\cdot\psi_2^{\top}(\tau)Y_2(\tau,s)\right)ds\right\}d\tau - \varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(-\infty,y)\Delta_1(-\infty,-\infty)\int_{-\infty}^{x}\Delta_1^{-1}(\tau,-\infty)\psi_2^{\top}(\tau)Y_2(\tau,-\infty)d\tau = Y_1(x,y)+\\
&+\varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(-\infty,y)\int_{-\infty}^{x}\left\{\int_{-\infty}^{y}\left(-\psi_2^{\top}(\tau)(Y_2(\tau,s))_s-\left(\left(\int_{-\infty}^{\tau}\psi_2^{\top}\varphi_2 dr\right)\Delta_1^{-1}(\tau,s)\psi_2^{\top}(\tau)Y_2(\tau,s)\right)_s\right)ds\right\}d\tau-\\
&-\varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(-\infty,y)\Delta_1(-\infty,-\infty)\int_{-\infty}^{x}\Delta_1^{-1}(\tau,-\infty)\psi_2^{\top}(\tau)Y_2(\tau,-\infty)d\tau = Y_1(x,y)-\varphi_1(y)\int_{-\infty}^{x}\Delta_1^{-1}(\tau,y)\cdot\\
&\cdot\psi_2^{\top}(\tau)Y_2(\tau,y)d\tau;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\hat W_1^{-1}Y(x,y))_2 = Y_2(x,y)+\varphi_2(x)\Delta_1^{-1}(x,-\infty)\int_{-\infty}^{x}\psi_2^{\top}(\tau)\varphi_2(\tau)\left\{\int_{-\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(\tau,s)\psi_1^{\top}(s)Y_1(\tau,s)ds\right\}d\tau+\\
&+\varphi_2(x)\int_{-\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(x,s)\psi_1^{\top}(s)Y_1(x,s)ds+\varphi_2(x)\Delta_1^{-1}(x,-\infty)\left\{\int_{-\infty}^{x}\psi_2^{\top}(\tau)Y_2(\tau,y)d\tau-\int_{-\infty}^{x}\psi_2^{\top}(\tau)Y_2(\tau,-\infty)d\tau\right\}=\\
&=Y_2(x,y)+\varphi_2(x)\Delta_1^{-1}(x,-\infty)\int_{-\infty}^{x}\left\{\int_{-\infty}^{y}-\psi_2^{\top}(\tau)(Y_2(\tau,s))_s ds\right\}d\tau+\varphi_2(x)\Delta_1^{-1}(x,-\infty)\left\{\int_{-\infty}^{x}\psi_2^{\top}(\tau)Y_2(\tau,y)d\tau-\right.\\
&\left.-\int_{-\infty}^{x}\psi_2^{\top}(\tau)Y_2(\tau,-\infty)d\tau\right\}+\varphi_2(x)\int_{-\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(x,s)\psi_1^{\top}(s)Y_1(x,s)=Y_2(x,y)+\varphi_2(x)\int_{-\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(x,s)\psi_1^{\top}(s)Y_1(x,s).
\end{aligned}$$

Для оператора $(\hat W_2^{-1})$ доведення проводиться аналогічно.

8.2. Розглянемо пари $(b_1(y),a_2(x))$, $(a_1(y),b_2(x))$ асимптотик (11) і визначимо оператор $\hat S$ рівністю:

$$\begin{pmatrix} a_1(y)\\ b_2(x)\end{pmatrix} = \hat S\begin{pmatrix} b_1(y)\\ a_2(x)\end{pmatrix}. \tag{253}$$

Очевидно, оператор $\hat S$ (аналогічно оператору S (12)) можна вважати оператором розсіяння для системи Дірака (9), який зв'язує асимптотики припустимого розв'язку (11) на інших безмежностях.

У цьому підрозділі ми показуємо, що оператор $\hat S$ для системи Дірака (9) є композицією трьох автоперетворень типу Дарбу, одне з яких задається інваріантним оператором $\tilde{\mathbf S} = \tilde W_2^{-1}\tilde W_1$.

Оператор $\hat S$ побудуємо за допомогою бінарних перетворень Дарбу (185), (187). Для цього в рівності (200) приймемо

$$\tilde a = \begin{pmatrix}\tilde a_1(y)\\ \tilde a_2(x)\end{pmatrix} = \tilde{\mathbf S}_1^{-1}\begin{pmatrix} b_1(y)\\ a_2(x)\end{pmatrix},\ \ \tilde b = \begin{pmatrix}\tilde b_1(y)\\ \tilde b_2(x)\end{pmatrix} = \tilde{\mathbf S}_2^{-1}\begin{pmatrix} a_1(y)\\ b_2(x)\end{pmatrix}, \tag{254}$$

де оператори $\tilde{\mathbf S}_1$, $\tilde{\mathbf S}_2$ задаємо так, щоб виконувались умови:

$$\begin{aligned}
&(W_1\tilde{\mathbf S}_1^{-1}\hat a)_1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} b_1(y),\ \ (W_1\tilde{\mathbf S}_1^{-1}\hat a)_2 \xrightarrow[y\to-\infty]{} a_2(x),\\
&(W_2\tilde{\mathbf S}_2^{-1}\hat b)_1 \xrightarrow[x\to-\infty]{} a_1(y),\ \ (W_2\tilde{\mathbf S}_2^{-1}\hat b)_2 \xrightarrow[y\to+\infty]{} b_2(x).
\end{aligned}$$

Оператори $\tilde{\mathbf S}_1$, $\tilde{\mathbf S}_2$ та їх обернені знаходимо аналогічно до операторів $\mathbf S_1$ та $\mathbf S_1^{-1}$попереднього підрозділу. Вони мають такий вигляд:

$$\tilde{\mathbf S}_1^{-1} = I + \begin{pmatrix} \varphi_1(y)\int_{-\infty}^{y}\tilde\Delta_1^{-1}(+\infty,s)\psi_1^{\top}(s)\cdot\, ds; 0 & \\ 0; & -\varphi_2(x)\int_{+\infty}^{x}\tilde\Delta_1^{-1}(\tau,-\infty)\psi_2^{\top}(\tau)\cdot\, d\tau\end{pmatrix}, \tag{255}$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_2^{-1} = I + \begin{pmatrix} \varphi_1(y)\int_{+\infty}^{y} \tilde{\Delta}_2^{-1}(-\infty,s)\psi_1^\top(s)\cdot\, ds; 0 & \\ 0; & -\varphi_2(x)\int_{-\infty}^{x} \tilde{\Delta}_2^{-1}(\tau,+\infty)\psi_2^\top(\tau)\cdot\, d\tau \end{pmatrix}, \quad (256)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_1 = I - \begin{pmatrix} \varphi_1(y)\tilde{\Delta}_1^{-1}(+\infty,y)\int_{-\infty}^{y} \psi_1^\top(s)\cdot\, ds; 0 & \\ 0; & -\varphi_2(x)\tilde{\Delta}_1^{-1}(x,-\infty)\int_{+\infty}^{x} \psi_2^\top(\tau)\cdot\, d\tau \end{pmatrix}, \quad (257)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_2 = I - \begin{pmatrix} \varphi_1(y)\tilde{\Delta}_2^{-1}(-\infty,y)\int_{+\infty}^{y} \psi_1^\top(s)\cdot\, ds; 0 & \\ 0; & -\varphi_2(x)\tilde{\Delta}_2^{-1}(x,+\infty)\int_{-\infty}^{x} \psi_2^\top(\tau)\cdot\, d\tau \end{pmatrix}. \quad (258)$$

Оператори $\tilde{\mathbf{S}}_1$, $\tilde{\mathbf{S}}_2$ та їх обернені є операторами бінарних автоперетворень типу Дарбу в просторі розв'язків незбуреної системи Дірака (167). Визначення цих операторів дозволяє задовольнити умову (253), яка виділяє серед усіх операторів, що діють інваріантно у просторі розв'язків незбуреної системи (167), єдиний оператор $\hat{S}$. А саме, з рівностей (200), (253), (254) отримуємо:

$$\hat{S} = \tilde{\mathbf{S}}_2\tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{S}}_1^{-1}. \quad (259)$$

Безпосереднім обчисленням, використавши зображення (201), (255), (258) отримуємо оператор $\hat{S}$ у явному вигляді:

$$\hat{S} = I - \begin{pmatrix} \hat{S}_{11} & \hat{S}_{12} \\ \hat{S}_{21} & \hat{S}_{22} \end{pmatrix}, \quad (260)$$

де

$$\hat{S}_{11} = \varphi_1(y)\tilde{\Delta}_2^{-1}(-\infty,y)\left[-\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_2^\top\varphi_2\, d\tau\right]\int_{-\infty}^{y}\tilde{\Delta}_2^{-1}(+\infty,s)\psi_1^\top(s)\cdot\, ds; \quad (261)$$

$$\hat{S}_{12} = \varphi_1(y)\tilde{\Delta}_2^{-1}(-\infty,y)\tilde{\Delta}_2(-\infty,-\infty)\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\Delta}_2^{-1}(\tau,-\infty)\psi_2^\top(\tau)\cdot\, d\tau; \quad (262)$$

$$\hat{S}_{21} = \varphi_2(x)\tilde{\Delta}_2^{-1}(x,+\infty)\tilde{\Delta}_2(+\infty,+\infty)\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\Delta}_2^{-1}(+\infty,s)\psi_1^\top(s)\cdot\, ds; \quad (263)$$

$$\hat{S}_{22} = \varphi_2(x)\tilde{\Delta}_2^{-1}(x,+\infty)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1^\top\varphi_1\, dy\right]\int_{+\infty}^{x}\tilde{\Delta}_2^{-1}(\tau,-\infty)\psi_2^\top(\tau)\cdot\, d\tau. \quad (264)$$

З рівності (259), враховуючи формули (202), (256), (257), отримуємо обернений оператор S^{-1}:

$$\hat{S}^{-1} = \tilde{\mathbf{S}}_1\tilde{\mathbf{S}}^{-1}\tilde{\mathbf{S}}_2^{-1} = I + \begin{pmatrix} \hat{S}_{11}^{-1} & \hat{S}_{12}^{-1} \\ \hat{S}_{21}^{-1} & \hat{S}_{22}^{-1} \end{pmatrix}, \quad (265)$$

де

$$\hat{S}_{11}^{-1} = \varphi_1(y)\tilde{\Delta}_1^{-1}(+\infty,y)\left[-\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_2^\top\varphi_2\, dx\right]\int_{+\infty}^{y}\tilde{\Delta}_1^{-1}(-\infty,s)\psi_1^\top(s)\cdot\, ds; \quad (266)$$

$$\hat{S}_{12}^{-1} = \varphi_1(y)\tilde{\Delta}_1^{-1}(+\infty,y)\tilde{\Delta}_1(+\infty,+\infty)\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\Delta}_1^{-1}(\tau,+\infty)\psi_2^\top(\tau)\cdot\, d\tau; \quad (267)$$

$$\hat{S}_{21}^{-1} = \varphi_2(x)\tilde{\Delta}_1^{-1}(x,-\infty)\tilde{\Delta}_1(-\infty,-\infty)\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\Delta}_1^{-1}(-\infty,s)\psi_1^\top(s)\cdot\, ds; \quad (268)$$

$$\hat{S}_{22}^{-1} = \varphi_2(x)\tilde{\Delta}_1^{-1}(x,-\infty)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1^\top\varphi_1\, ds\right]\int_{-\infty}^{x}\tilde{\Delta}_1^{-1}(\tau,+\infty)\psi_2^\top(\tau)\cdot\, d\tau. \quad (269)$$

Зауважимо, що рівність (259), враховуючи зображення (200), можна записати так:

$$\hat{S} = \tilde{\mathbf{S}}_2\tilde{W}_2^{-1}\tilde{W}_1\tilde{\mathbf{S}}_1^{-1} = \hat{\tilde{W}}_2^{-1}\hat{\tilde{W}}_1, \quad (270)$$

де оператори

$$\hat{\tilde{W}}_1 = \tilde{W}_1\tilde{\mathbf{S}}_1^{-1},\ \ \hat{\tilde{W}}_2 = \tilde{W}_2\tilde{\mathbf{S}}_2^{-1} \quad (271)$$

є звичайними операторами перетворень, що переводять відповідні асимптотики в розв'язки рівнянь Дірака [27,3].

Оператори бінарних перетворень Дарбу $\hat{\tilde{W}}_1$, $\hat{\tilde{W}}_2$ мають, відповідно, вигляд:

$$\hat{\tilde{W}}_1 = \begin{pmatrix} (\hat{\tilde{W}}_1)_{11} & (\hat{\tilde{W}}_1)_{12} \\ (\hat{\tilde{W}}_1)_{21} & (\hat{\tilde{W}}_1)_{22} \end{pmatrix},\ \hat{\tilde{W}}_2 = \begin{pmatrix} (\hat{\tilde{W}}_2)_{11} & (\hat{\tilde{W}}_2)_{12} \\ (\hat{\tilde{W}}_2)_{21} & (\hat{\tilde{W}}_2)_{22} \end{pmatrix}, \quad (272)$$

де

$$(\hat{\tilde{W}}_1)_{11} = I + \varphi_1(y)\tilde{\Delta}_1^{-1}(x,y)\left[-\int_{+\infty}^{x}\psi_2^\top\varphi_2\,d\tau\right]\int_{-\infty}^{y}\tilde{\Delta}_1^{-1}(+\infty,s)\psi_1^\top(s)\cdot\,ds; \tag{273}$$

$$(\hat{\tilde{W}}_1)_{12} = \varphi_1(y)\tilde{\Delta}_1^{-1}(x,y)\tilde{\Delta}_1(x,-\infty)\int_{+\infty}^{x}\tilde{\Delta}_1^{-1}(\tau,-\infty)\psi_2^\top(\tau)\cdot\,d\tau; \tag{274}$$

$$(\hat{\tilde{W}}_1)_{21} = -\varphi_2(x)\tilde{\Delta}_1^{-1}(x,y)\tilde{\Delta}_1(+\infty,y)\int_{-\infty}^{y}\tilde{\Delta}_1^{-1}(+\infty,s)\psi_1^\top(s)\cdot\,ds; \tag{275}$$

$$(\hat{\tilde{W}}_1)_{22} = I - \varphi_2(x)\tilde{\Delta}_1^{-1}(x,y)\left[\int_{-\infty}^{y}\psi_1^\top\varphi_1\,ds\right]\int_{+\infty}^{x}\tilde{\Delta}_1^{-1}(\tau,-\infty)\psi_2^\top(\tau)\cdot\,d\tau, \tag{276}$$

$$(\hat{\tilde{W}}_2)_{11} = I + \varphi_1(y)\tilde{\Delta}_2^{-1}(x,y)\left[-\int_{-\infty}^{x}\psi_2^\top\varphi_2\,d\tau\right]\int_{+\infty}^{y}\tilde{\Delta}_2^{-1}(-\infty,s)\psi_1^\top(s)\cdot\,ds; \tag{277}$$

$$(\hat{\tilde{W}}_2)_{12} = \varphi_1(y)\tilde{\Delta}_2^{-1}(x,y)\tilde{\Delta}_2(x,+\infty)\int_{-\infty}^{x}\tilde{\Delta}_2^{-1}(\tau,+\infty)\psi_2^\top(\tau)\cdot\,d\tau; \tag{278}$$

$$(\hat{\tilde{W}}_2)_{21} = -\varphi_2(x)\tilde{\Delta}_2^{-1}(x,y)\tilde{\Delta}_2(-\infty,y)\int_{+\infty}^{y}\tilde{\Delta}_2^{-1}(-\infty,s)\psi_1^\top(s)\cdot\,ds; \tag{279}$$

$$(\hat{\tilde{W}}_2)_{22} = I - \varphi_2(x)\tilde{\Delta}_2^{-1}(x,y)\left[\int_{+\infty}^{y}\psi_1^\top\varphi_1\,ds\right]\int_{-\infty}^{x}\tilde{\Delta}_2^{-1}(\tau,+\infty)\psi_2^\top(\tau)\cdot\,d\tau. \tag{280}$$

Із зображень (271) отримуємо формули для знаходження обернених операторів $\hat{\tilde{W}}_1^{-1}$ та $\hat{\tilde{W}}_2^{-1}$:

$$\hat{\tilde{W}}_1^{-1} = \tilde{\mathbf{S}}_1\tilde{W}_1^{-1},\ \ \hat{\tilde{W}}_2^{-1} = \tilde{\mathbf{S}}_2\tilde{W}_2^{-1}. \tag{281}$$

Елементи матричних операторів $\hat{\tilde{W}}_1^{-1}$, $\hat{\tilde{W}}_2^{-1}$ матимуть такий вигляд:

$$(\hat{\tilde{W}}_1^{-1})_{11} = I + \varphi_1(y)\tilde{\Delta}_1^{-1}(+\infty,y)\left(\int_{+\infty}^{x}\psi_2^\top\varphi_2 d\tau\right)\int_{-\infty}^{y}\tilde{\Delta}_1^{-1}(x,s)\psi_1^\top(s)\cdot ds, \tag{282}$$

$$(\hat{\tilde{W}}_1^{-1})_{12} = -\varphi_1(y)\tilde{\Delta}_1^{-1}(+\infty,y)\tilde{\Delta}_1(+\infty,-\infty)\int_{+\infty}^{x}\tilde{\Delta}_1^{-1}(\tau,-\infty)\psi_2^\top(\tau)L^-\cdot d\tau, \tag{283}$$

$$\begin{aligned}(\hat{\tilde{W}}_1^{-1})_{21} = \varphi_2(x)\tilde{\Delta}_1^{-1}(x,-\infty)\int_{+\infty}^{x}\psi_2^\top(\tau)\varphi_2(\tau)\Big(\int_{-\infty}^{y}\tilde{\Delta}_1^{-1}(\tau,s)\psi_1^\top(s)\cdot ds\Big)d\tau+\\ +\varphi_2(x)\int_{-\infty}^{y}\tilde{\Delta}_1^{-1}(x,s)\psi_1^\top(s)\cdot ds,\end{aligned} \tag{284}$$

$$(\hat{\tilde{W}}_1^{-1})_{22} = I + \varphi_2(x)\tilde{\Delta}_1^{-1}(x,-\infty)\Big\{\int_{+\infty}^{x}\psi_2^\top(\tau)\cdot d\tau - \int_{+\infty}^{x}\psi_2^\top(\tau)L^-\cdot d\tau\Big\}, \tag{285}$$

$$(\hat{\tilde{W}}_2^{-1})_{11} = I + \varphi_1(y)\tilde{\Delta}_2^{-1}(-\infty,y)\left(\int_{-\infty}^{x}\psi_2^\top\varphi_2 d\tau\right)\int_{+\infty}^{y}\tilde{\Delta}_2^{-1}(x,s)\psi_1^\top(s)\cdot ds, \tag{286}$$

$$(\hat{\tilde{W}}_2^{-1})_{12} = -\varphi_1(y)\tilde{\Delta}_2^{-1}(-\infty,y)\int_{-\infty}^{x}\tilde{\Delta}_2(-\infty,+\infty)\tilde{\Delta}_2^{-1}(\tau,+\infty)\psi_2^\top(\tau)L^+\cdot d\tau, \tag{287}$$

$$\begin{aligned}(\hat{\tilde{W}}_2^{-1})_{21} = \varphi_2(x)\tilde{\Delta}_2^{-1}(x,+\infty)\int_{-\infty}^{x}\psi_2^\top(\tau)\varphi_2(\tau)\left\{\int_{+\infty}^{y}\tilde{\Delta}_2^{-1}(\tau,s)\psi_1^\top(s)\cdot ds\right\}d\tau+\\ +\varphi_2(x)\int_{+\infty}^{y}\tilde{\Delta}_2^{-1}(x,s)\psi_1^\top(s)\cdot ds,\end{aligned} \tag{288}$$

$$(\hat{\tilde{W}}_2^{-1})_{22} = I + \varphi_2(x)\tilde{\Delta}_2^{-1}(x,+\infty)\left\{\int_{-\infty}^{x}\psi_2^\top(\tau)\cdot d\tau - \int_{-\infty}^{x}\psi_2^\top(\tau)L^+\cdot d\tau\right\}. \tag{289}$$

Зауваження 6. Аналогічно до зауваження 5, оператори $\hat{\tilde{W}}_1^{-1}$ (282)–(285) та $\hat{\tilde{W}}_2^{-1}$ (286)–(289) можна зобразити в іншому, простішому та симетричнішому вигляді:

$$\hat{\tilde{W}}_1^{-1} = \begin{pmatrix} I; & -\varphi_1(y)\int_{+\infty}^{x}\tilde{\Delta}_1^{-1}(\tau,y)\psi_2^\top(\tau)\cdot\,d\tau \\ \varphi_2(x)\int_{-\infty}^{y}\tilde{\Delta}_1^{-1}(x,s)\psi_1^\top(s)\cdot\,ds; & I \end{pmatrix}, \tag{290}$$

$$\hat{\tilde{W}}_2^{-1} = \begin{pmatrix} I; & -\varphi_1(y)\int_{-\infty}^{x}\tilde{\Delta}_2^{-1}(\tau,y)\psi_2^\top(\tau)\cdot\,d\tau \\ \varphi_2(x)\int_{+\infty}^{y}\tilde{\Delta}_2^{-1}(x,s)\psi_1^\top(s)\cdot\,ds; & I \end{pmatrix}. \tag{291}$$

Зауваження 7. Враховуючи явний вигляд коефіцієнтів u_1, u_2 (172) і операторів $\hat{W}_1^{-1}$, $\hat{W}_2^{-1}$ (251)–(252) та $\hat{\tilde{W}}_1^{-1}$, $\hat{\tilde{W}}_2^{-1}$ (290)–(291), отримані нами співвідношення

$$a = \hat{W}_1^{-1}Y, \qquad b = \hat{W}_2^{-1}Y, \tag{292}$$

$$\begin{pmatrix} b_1(y) \\ a_2(x) \end{pmatrix} = \hat{\tilde{W}}_1^{-1}Y, \qquad \begin{pmatrix} a_1(y) \\ b_2(x) \end{pmatrix} = \hat{\tilde{W}}_2^{-1}Y \tag{293}$$

еквівалентні системам інтегральних рівнянь (30)–(31) та (33), (32) відповідно.

З факторизації (270) та означення оператора $\hat{S}$ отримуємо

$$\hat{\tilde{W}}_1 \begin{pmatrix} b_1(y) \\ a_2(x) \end{pmatrix} = \hat{\tilde{W}}_2 \begin{pmatrix} a_1(y) \\ b_2(x) \end{pmatrix}. \tag{294}$$

Відповідно, з формули (294) отримуємо таку рівність:

$$\begin{cases} (\hat{\tilde{W}}_1)_{11}b_1 - (\hat{\tilde{W}}_2)_{12}b_2 = \\ = (\hat{\tilde{W}}_2)_{11}a_1 - (\hat{\tilde{W}}_1)_{12}a_2, \\ \\ (\hat{\tilde{W}}_1)_{21}b_1 - (\hat{\tilde{W}}_2)_{22}b_2 = \\ = (\hat{\tilde{W}}_2)_{21}a_1 - (\hat{\tilde{W}}_1)_{22}a_2. \end{cases} \tag{295}$$

Зі співвідношень (295) отримуємо праву факторизацію оператора розсіяння S (12), (47):

$$S = (I + B_{(+)})^{-1}(I + B_{(-)}), \tag{296}$$

де

$$\begin{aligned} I + B_{(+)} &= \begin{pmatrix} (\hat{\tilde{W}}_1)_{11} & -(\hat{\tilde{W}}_2)_{12} \\ -(\hat{\tilde{W}}_1)_{21} & (\hat{\tilde{W}}_2)_{22} \end{pmatrix}, \\ I + B_{(-)} &= \begin{pmatrix} (\hat{\tilde{W}}_2)_{11} & -(\hat{\tilde{W}}_1)_{12} \\ -(\hat{\tilde{W}}_2)_{21} & (\hat{\tilde{W}}_1)_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{297}$$

Аналогічно з лівої факторизації оператора розсіяння S (221) отримуємо другу факторизацію оператора $\hat{S}$

$$\hat{S} = (I + A_1)^{-1}(I + A_2), \tag{298}$$

де

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} A_{11}^{+} & -A_{12}^{-} \\ -A_{21}^{+} & A_{22}^{-} \end{pmatrix}, \\ A_2 &= \begin{pmatrix} A_{11}^{-} & -A_{12}^{+} \\ -A_{21}^{-} & A_{22}^{+} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{299}$$

З факторизацій операторів $\tilde{\tilde{W}}_1$ та $\tilde{\tilde{W}}_2$ (271) отримуємо факторизацію операторів $I + B_{(\pm)}$:

$$I + B_{(+)} = W_{1-}\hat{\mathbf{S}}_1^{-1}, \quad I + B_{(-)} = W_{2-}\hat{\mathbf{S}}_2^{-1}, \tag{300}$$

де

$$W_{1-} = I - \begin{pmatrix} \varphi_1(y)\Delta_1^{-1}\int_{-\infty}^{y}\psi_1^{\top}(s)\cdot ds; & \varphi_1(y)\Delta_1^{-1}\int_{-\infty}^{x}\psi_2^{\top}(\tau)\cdot d\tau \\ -\varphi_2(x)\Delta_1^{-1}\int_{-\infty}^{y}\psi_1^{\top}(s)\cdot ds; & -\varphi_2(x)\Delta_1^{-1}\int_{-\infty}^{x}\psi_2^{\top}(\tau)\cdot d\tau \end{pmatrix}, \tag{301}$$

$$W_{2-} = I - \begin{pmatrix} \varphi_1(y)\Delta_2^{-1}\int_{+\infty}^{y}\psi_1^{\top}(s)\cdot ds; & \varphi_1(y)\Delta_2^{-1}\int_{+\infty}^{x}\psi_2^{\top}(\tau)\cdot d\tau \\ -\varphi_2(x)\Delta_2^{-1}\int_{+\infty}^{y}\psi_1^{\top}(s)\cdot ds; & -\varphi_2(x)\Delta_2^{-1}\int_{+\infty}^{x}\psi_2^{\top}(\tau)\cdot d\tau \end{pmatrix}, \tag{302}$$

$$\hat{\mathbf{S}}_1^{-1} = \begin{pmatrix} (\tilde{\mathbf{S}}_1^{-1})_{11} & 0 \\ 0 & (\tilde{\mathbf{S}}_2^{-1})_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} I + \varphi_1(y)\int_{-\infty}^{y}\tilde{\Delta}_1^{-1}(+\infty, s)\psi_1^{\top}(s)\cdot ds; & 0 \\ 0; & I - \varphi_2(x)\int_{-\infty}^{x}\tilde{\Delta}_1^{-1}(\tau, +\infty)\psi_2^{\top}(\tau)\cdot d\tau \end{pmatrix}, \tag{303}$$

$$\hat{\mathbf{S}}_2^{-1} = \begin{pmatrix} (\tilde{\mathbf{S}}_2^{-1})_{11} & 0 \\ 0 & (\tilde{\mathbf{S}}_1^{-1})_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} I + \varphi_1(y)\int_{+\infty}^{y}\tilde{\Delta}_2^{-1}(-\infty, s)\psi_1^{\top}(s)\cdot ds; & 0 \\ 0; & I - \varphi_2(x)\int_{-\infty}^{x}\tilde{\Delta}_2^{-1}(\tau, -\infty)\psi_2^{\top}(\tau)\cdot d\tau \end{pmatrix}. \tag{304}$$

Безпосередньо з факторизацій операторів $(I + B_{(\pm)})$ отримуємо факторизацію обернених операторів $(I + B_{(\pm)})^{-1}$:

$$(I + B_{(+)})^{-1} = \hat{\mathbf{S}}_1 W_{1-}^{-1}, \quad (I + B_{(-)})^{-1} = \hat{\mathbf{S}}_2 W_{2-}^{-1}, \tag{305}$$

з якої отримуємо явний вигляд операторів $(I + B_{\pm})^{-1}$:

$$(I + B_{(+)})_{11}^{-1} = I + \varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(+\infty, y)\left\{\int_{+\infty}^{x}\psi_2^{\top}\varphi_2 d\tau\right\}\int_{-\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(x, z)\psi_1^{\top}(z)\cdot dz, \tag{306}$$

$$(I + B_{(+)})_{12}^{-1} = \varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(+\infty, y)\Delta_1(+\infty, -\infty)\int_{-\infty}^{x}\Delta_1^{-1}(\tau, -\infty)\psi_2^{\top}(\tau)L^{-}\cdot d\tau, \tag{307}$$

$$(I+B_{(+)})^{-1}_{21} = -\varphi_2(x)\Delta_1^{-1}(x,+\infty)\int_{-\infty}^{x}\psi_2^{\top}(s)\varphi_2(s)\left\{\int_{-\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(\tau,s)\psi_1^{\top}(s)\cdot ds\right\}d\tau - \\ -\varphi_2(x)\int_{-\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(x,s)\psi_1^{\top}(s)\cdot ds, \tag{308}$$

$$(I+B_{(+)})^{-1}_{22} = I+\varphi_2(x)\Delta_1^{-1}(x,+\infty)\left\{\int_{-\infty}^{x}\psi_2^{\top}(\tau)\cdot d\tau - \int_{-\infty}^{x}\Delta_1(\tau,+\infty)\Delta_1^{-1}(\tau,-\infty)\psi_2^{\top}(\tau)L^{-}\cdot d\tau\right\}, \tag{309}$$

$$(I+B_{(-)})^{-1}_{11} = I+\varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(-\infty,y)\left\{\int_{-\infty}^{x}\psi_2^{\top}\varphi_2 d\tau\right\}\int_{+\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(x,z)\psi_1^{\top}(z)\cdot dz, \tag{310}$$

$$(I+B_{(-)})^{-1}_{12} = \varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(-\infty,y)\Delta_1(-\infty,+\infty)\int_{+\infty}^{x}\Delta_1^{-1}(\tau,+\infty)\psi_2^{\top}(\tau)L^{+}\cdot d\tau, \tag{311}$$

$$(I+B_{(-)})^{-1}_{21} = -\varphi_2(x)\Delta_1^{-1}(x,-\infty)\int_{+\infty}^{x}\psi_2^{\top}(\tau)\varphi_2(\tau)\left\{\int_{+\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(\tau,s)\psi_1^{\top}(s)\cdot ds\right\}d\tau - \\ -\varphi_2(x)\int_{+\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(x,s)\psi_1^{\top}(s)\cdot ds, \tag{312}$$

$$(I+B_{(-)})^{-1}_{22} = I+\varphi_2(x)\Delta_1^{-1}(x,-\infty)\left\{\int_{+\infty}^{x}\psi_2^{\top}(\tau)\cdot d\tau - \int_{+\infty}^{x}\Delta_1(\tau,-\infty)\Delta_1^{-1}(\tau,+\infty)\psi_2^{\top}(\tau)L^{+}\cdot d\tau\right\}. \tag{313}$$

IX. Оператори перетворень для σ-косоермітового оператора Дірака

У цьому розділі розглядається оператор Дірака L_1 вигляду [26]

$$L_1 = \begin{pmatrix} \partial_x & u_1 \\ u_2 & \partial_y \end{pmatrix}, \ \mu\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, \tag{314}$$

де

$$u_1 := u, \ u_2 := \mu\bar{u}, \ u\in L_2(\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}), \tag{315}$$

що допускає редукцію

$$L_1^{*} = -\sigma L_1\sigma^{-1}, \ L_1^{*} := \bar{L}_1^{\tau}, \tag{316}$$

а $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mu^{-1} \end{pmatrix}$, внаслідок чого між розв'язками лінійної системи

$$L_1Y = 0 \tag{317}$$

та транспонованої системи $L_1^{\tau}\tilde{Y}(x,y)=0$ існує співвідношення

$$\tilde{Y} = \sigma\bar{Y}. \tag{318}$$

Нехай $Y_0 = \begin{pmatrix} Y_1(y) \\ Y_2(x) \end{pmatrix}$ – довільний, а $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1(y) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix}$ – фіксований матричний розмірності $(2\times K)$ розв'язки незбуреної системи Дірака

$$L_0Y_0 = 0, \tag{319}$$

де $L_0 = \begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y \end{pmatrix}$.

Враховуючи редукційне співвідношення (318), яке, очевидно, задовольняють розв'язки рівнянь (319) та транспонованої системи, отримуємо, що формули (169)–(172) набувають вигляду:

$$Y = WY_0 = Y_0 - \varphi(C+\Omega[\sigma\bar{\varphi},\varphi])^{-1}\varphi_2^{*}, \ C^{*}=C, \tag{320}$$

$$\Omega[\sigma\bar{\varphi},\varphi] := \int_{M_0}^{M}\varphi_1^{*}\varphi_1\,dy + \mu^{-1}\varphi_2^{*}\varphi_2\,dx, \tag{321}$$

$$L_1 = WL_0W^{-1}, \tag{322}$$

$$u = \mu^{-1}\varphi_1(C+\Omega[\sigma\bar{\varphi},\varphi])^{-1}\varphi_2^{*}. \tag{323}$$

Оператори бінарних перетворень для σ-косоермітового оператора Дірака (175), (177) набудуть вигляду:

$$W_1 = I - \begin{pmatrix} \varphi_1(y)\Delta_1^{-1}\int_{-\infty}^{y}\varphi_1^{*}(s)\cdot ds; & \mu^{-1}\varphi_1(y)\Delta_1^{-1}\int_{-\infty}^{x}\varphi_2^{*}(\tau)\cdot d\tau \\ \varphi_2(x)\Delta_1^{-1}\int_{-\infty}^{y}\varphi_1^{*}(s)\cdot ds; & \mu^{-1}\varphi_2(x)\Delta_1^{-1}\int_{-\infty}^{x}\varphi_2^{*}(\tau)\cdot d\tau \end{pmatrix}, \tag{324}$$

$$W_2 = I - \begin{pmatrix} \varphi_1(y)\Delta_2^{-1}\int_{+\infty}^{y}\varphi_1^{*}(s)\cdot ds; & \mu^{-1}\varphi_1(y)\Delta_2^{-1}\int_{+\infty}^{x}\varphi_2^{*}(\tau)\cdot d\tau \\ \varphi_2(x)\Delta_2^{-1}\int_{+\infty}^{y}\varphi_1^{*}(s)\cdot ds; & \mu^{-1}\varphi_2(x)\Delta_2^{-1}\int_{+\infty}^{x}\varphi_2^{*}(\tau)\cdot d\tau \end{pmatrix}. \tag{325}$$

Оператори перетворення $\hat{W}_1$, $\hat{W}_2$ (223) виглядатимуть так:

$$\hat{W}_1 = I + \begin{pmatrix} A_{11}^{+} & A_{12}^{+} \\ A_{21}^{+} & A_{22}^{+} \end{pmatrix} := I + A_{(+)}, \ \hat{W}_2 = I + \begin{pmatrix} A_{11}^{-} & A_{12}^{-} \\ A_{21}^{-} & A_{22}^{-} \end{pmatrix} := I + A_{(-)}, \tag{326}$$

де

$$A_{11}^{+} = \mu^{-1}\varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(x,y)\left[\int_{-\infty}^{x}\varphi_2^{*}\varphi_2\,d\tau\right]\int_{-\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(-\infty,s)\varphi_1^{*}(s)\cdot ds, \tag{327}$$

$$A_{12}^{+} = -\mu^{-1}\varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(x,y)\Delta_1(x,-\infty)\int_{-\infty}^{x}\Delta_1^{-1}(\tau,-\infty)\varphi_2^{*}(\tau)\cdot d\tau, \tag{328}$$

$$A_{21}^{+} = -\varphi_2(x)\Delta_1^{-1}(x,y)\Delta_1(-\infty,y)\int_{-\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(-\infty,s)\varphi_1^{*}(s)\cdot ds, \tag{329}$$

$$A^+_{22} = \mu^{-1}\varphi_2(x)\Delta_1^{-1}(x,y)\left[\int_{-\infty}^{y}\varphi_1^*\varphi_1\, ds\right]\int_{-\infty}^{x}\Delta_1^{-1}(\tau,-\infty)\varphi_2^*(\tau)\cdot\, d\tau, \tag{330}$$

$$A^-_{11} = -\mu^{-1}\varphi_1(y)\Delta_2^{-1}(x,y)\left[-\int_{+\infty}^{x}\varphi_2^*\varphi_2\, d\tau\right]\int_{+\infty}^{y}\Delta_2^{-1}(+\infty,s)\varphi_1^*(s)\cdot\, ds, \tag{331}$$

$$A^-_{12} = -\mu^{-1}\varphi_1(y)\Delta_2^{-1}(x,y)\Delta_2(x,+\infty)\int_{+\infty}^{x}\Delta_2^{-1}(\tau,+\infty)\varphi_2^*(\tau)\cdot\, d\tau, \tag{332}$$

$$A^-_{21} = -\varphi_2(x)\Delta_2^{-1}(x,y)\Delta_2(+\infty,y)\int_{+\infty}^{y}\Delta_2^{-1}(+\infty,s)\varphi_1^*(s)\cdot\, ds, \tag{333}$$

$$A^-_{22} = \mu^{-1}\varphi_2(x)\Delta_2^{-1}(x,y)\left[\int_{+\infty}^{y}\varphi_1^*\varphi_1\, ds\right]\int_{+\infty}^{x}\Delta_2^{-1}(\tau,+\infty)\varphi_2^*(\tau)\cdot\, d\tau. \tag{334}$$

Оператор розсіяння S (210) та обернений S^{-1} (216) мають за умови σ-косоермітової редукції такий вигляд:

$$S = I + \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = I + \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}, \tag{335}$$

де

$$F_{11} = \mu^{-1}\varphi_1(y)\Delta_2^{-1}(+\infty,y)\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2^*\varphi_2 dx\right\}\int_{-\infty}^{y}\Delta_2^{-1}(-\infty,s)\varphi_1^*(s)\cdot ds; \tag{336}$$

$$F_{12} = -\mu^{-1}\varphi_1(y)\Delta_2^{-1}(+\infty,y)\Delta_2(+\infty,-\infty)\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta_2^{-1}(\tau,-\infty)\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau; \tag{337}$$

$$F_{21} = -\varphi_2(x)\Delta_2^{-1}(x,+\infty)\Delta_2(-\infty,+\infty)\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta_2^{-1}(-\infty,s)\varphi_1^*(s)\cdot ds; \tag{338}$$

$$F_{22} = \mu^{-1}\varphi_2(x)\Delta_2^{-1}(x,+\infty)\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1^*\varphi_1 dy\right\}\int_{-\infty}^{x}\Delta_2^{-1}(\tau,-\infty)\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau; \tag{339}$$

$$G_{11} = -\mu^{-1}\varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(-\infty,y)\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2^*\varphi_2 dx\right\}\int_{+\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(+\infty,s)\varphi_1^*(s)\cdot ds; \tag{340}$$

$$G_{12} = \mu^{-1}\varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(-\infty,y)\Delta_1(-\infty,+\infty)\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta_1^{-1}(\tau,+\infty)\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau; \tag{341}$$

$$G_{21} = \varphi_2(x)\Delta_1^{-1}(x,-\infty)\Delta_1(+\infty,-\infty)\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta_1^{-1}(+\infty,s)\varphi_1^*(s)\cdot ds; \tag{342}$$

$$G_{22} = -\mu^{-1}\varphi_2(x)\Delta_1^{-1}(x,-\infty)\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1^*\varphi_1 dy\right\}\int_{+\infty}^{x}\Delta_1^{-1}(\tau,+\infty)\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau. \tag{343}$$

Зауважимо, що компоненти операторів S, S^{-1} задовольняють співвідношення

$$G_{21} = -\mu F_{12}^*,\ \ G_{12} = -\mu^{-1}F_{21}^*,\ \ G_{11} = F_{11}^*,\ \ G_{22} = F_{22}^*.$$

Тобто, $S^{-1} = \sigma^{-1}S^*\sigma = (\sigma S\sigma^{-1})^*$, зокрема $S^{-1} = S^*$, при $\mu = -1$. Аналогічні співвідношення виконуються і для оператора $\tilde{S}$ (260) та оберненого $\tilde{S}^{-1}$ (265). Тобто, $\tilde{S}^{-1} = \sigma^{-1}\tilde{S}^*\sigma$. Використавши оператори перетворення $\hat{W}_1$, $\hat{W}_2$, а саме, їх антидіагональні елементи, отримуємо такі потенціали $u_1(x,y)$ та $u_2(x,y)$

$$u_1(x,y) = \mu^{-1}\varphi_1(y)\Delta_2^{-1}(x,y)\varphi_2^*(x), \tag{344}$$

$$u_2(x,y) = \varphi_2(x)\Delta_2^{-1}(x,y)\varphi_1^*(y)(=\mu\bar{u}_1(x,y)). \tag{345}$$

Зауважимо, також, що за додаткових симетрійних обмежень на загальну лінійну задачу (оператор Лакса) (140) оператори бінарних перетворень W витримують і більш "глибокі"редукції (див., наприклад [14,19,22,25]). Деякі з них використовувались нами для інтегрування нелінійних моделей Деві-Стюардсона, їх вищих потоків, а також просторово-двовимірних аналогів нелінійної моделі Кортевега де Вріза [20](зокрема і її просторово-симетричного узагальнення - рівняння Нижника [22]).

X. Про еквівалентність результатів, отриманих різними підходами

Зробимо заміну функцій $\varphi_1(y)$, $\psi_1(y)$, $\varphi_2(x)$, $\psi_2(x)$ на $p_1(y)$, $q_1(x)$, $p_2(y)$, $q_2(x)$ так, щоб для ядер $F_{12}(x,y)$ (212) та $G_{21}(x,y)$ (219) виконувалися рівності:

$$F_{12} = p_1(y)q_1^\top(x), \tag{346}$$

$$G_{21} = q_2(x)p_2^\top(y). \tag{347}$$

Для цього впровадимо функції $p_1(y)$, $q_1(x)$, $p_2(y)$, $q_2(x)$ так:

$$p_1(y) := \varphi_1(y)\Big\{c_1 - \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2^\top\psi_2 d\tau + \int_{-\infty}^{y}\varphi_1^\top\psi_1 ds\Big\}^{-1}, \tag{348}$$

$$q_1^\top(x) := \Big\{c_1 - \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_2^\top\varphi_2 d\tau\Big\}\cdot \Big\{c_1 - \int_{-\infty}^{x}\psi_2^\top\varphi_2 d\tau\Big\}^{-1}\psi_2^\top(x), \tag{349}$$

$$q_2(x) := \varphi_2(x)\Big\{c_1 - \int_{-\infty}^{x}\psi_2^\top\varphi_2 d\tau\Big\}^{-1}, \tag{350}$$

$$p_2^\top(y) := \Big\{c_1 - \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_2^\top\varphi_2 d\tau\Big\}\cdot$$
$$\cdot\Big\{c_1 - \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2^\top\psi_2 d\tau + \int_{-\infty}^{y}\varphi_1^\top\psi_1 ds\Big\}^{-1}\psi_1^\top(y). \tag{351}$$

Заміна (348)–(351) має обернену, яка виглядає так:

$$\varphi_1(y) = p_1(y)\Big\{I - c\textstyle\int_{-\infty}^{y} p_2^\top p_1 ds\Big\}^{-1} c, \tag{352}$$

$$\psi_2^\top(x) := c\Big(c + \textstyle\int_{+\infty}^{x} q_1^\top q_2 d\tau\Big)^{-1} q_1^\top(x), \tag{353}$$

$$\varphi_2(x) := q_2(x)\Big(c + \textstyle\int_{+\infty}^{x} q_1^\top q_2 d\tau\Big)^{-1} c, \tag{354}$$

$$\psi_1^\top(y) = \Big\{I - c\textstyle\int_{-\infty}^{y} p_2^\top p_1 ds\Big\}^{-1} c p_2^\top(y), \tag{355}$$

де в рівностях (352)-(355) введено таке позначення: $c := c_1 - \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_2^\top\varphi_2 d\tau$.

Теорема 11. *Після заміни змінних (348)–(351) оператори перетворення $\hat W_1$, $\hat W_2$ (223), $(I + B_{(\pm)})$ (297) та потенціали u_1, u_2 (172) співпадають з відповідними операторами $(I + A_{(\pm)})$ (123)–(130), $(I + B_{(\pm)})$ (105)–(112) та потенціалами u_1, u_2 (133), (134), отриманими в розділі 3 іншим методом, а саме, на основі аналізу основних рівнянь (рівнянь Марченка-Гельфанда-Левітана). Оператори F (211)–(214) та G (217)–(220) співпадають з відповідними операторами F та G (див. теорему 6) з розділу 2.*

□ *Доведення.* Проведемо заміну змінних (348)–(351) в ядрах елементів операторів перетворення $(\hat W_1)_{12}$ та $(\hat W_2)_{11}$, в потенціалах u_1 та u_2 і в ядрах операторів G_{22}, F_{21}. Для решти елементів операторів F, G, $\hat W_1$, $\hat W_2$ заміна проводиться аналогічно.

Безпосередньо з формул заміни змінних (348)–(351) слідують такі рівності:

$$1.\ \int_{-\infty}^{y} p_2^\top p_1 ds = c^{-1} - \left[c_1 - \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_2^\top\varphi_2 d\tau + \int_{-\infty}^{y}\psi_1^\top\varphi_1 ds\right]^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1 - \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_2^\top\varphi_2 d\tau + \int_{-\infty}^{y}\psi_1^\top\varphi_1 ds = \left[c^{-1} - \int_{-\infty}^{y} p_2^\top p_1 ds\right]^{-1}.$$

$$2.\ \int_{+\infty}^{x} q_1^\top q_2 d\tau = c\left[c_1 - \int_{-\infty}^{x}\psi_2^\top\varphi_2 d\tau\right]^{-1} c - c \Rightarrow \left[c_1 - \int_{-\infty}^{x}\psi_2^\top\varphi_2 d\tau\right] = c\left(c + \int_{+\infty}^{x} q_1^\top q_2 d\tau\right)^{-1} c.$$

$$3.\ \int_{+\infty}^{x}\psi_2^\top\varphi_2 d\tau = \int_{-\infty}^{x}\psi_2^\top\varphi_2 d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_2^\top\varphi_2 d\tau = c_1 - c\left(c + \int_{+\infty}^{x} q_1^\top q_2 d\tau\right)^{-1} c - c_1 + c =$$

$$= c\left(c + \int_{+\infty}^{x} q_1^\top q_2 d\tau\right)^{-1}\left(\int_{+\infty}^{x} q_1^\top q_2 d\tau\right).$$

Отже,

$$c_1 - \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_2^\top\varphi_2 d\tau + \int_{-\infty}^{y}\psi_1^\top\varphi_1 ds = \left(c^{-1} - \int_{-\infty}^{y} p_2^\top p_1 ds\right)^{-1}, \tag{356}$$

$$c_1 - \int_{-\infty}^{x}\psi_2^\top\varphi_2 d\tau = c\left(c + \int_{+\infty}^{x} q_1^\top q_2 d\tau\right)^{-1} c, \tag{357}$$

$$\int_{-\infty}^{y}\psi_1^\top\varphi_1 ds = \left(c^{-1} - \int_{-\infty}^{y} p_2^\top p_1 ds\right)^{-1} - c = \left(c^{-1} - \int_{-\infty}^{y} p_2^\top p_1 ds\right)^{-1}\left(\int_{-\infty}^{y} p_2^\top p_1 ds\right) c, \tag{358}$$

$$\int_{+\infty}^{x}\psi_2^\top\varphi_2 d\tau = c\left(c + \int_{+\infty}^{x} q_1^\top q_2 d\tau\right)^{-1}\left(\int_{+\infty}^{x} q_1^\top q_2 d\tau\right). \tag{359}$$

За допомогою формул (356), (357) обчислимо потенціал в термінах нових змінних:

$$\begin{gathered}\Delta_1(x,y) = c_1 - \textstyle\int_{-\infty}^{x}\psi_2^\top\varphi_2 d\tau + \int_{-\infty}^{y}\psi_1^\top\varphi_1 ds = c_1 - \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_2^\top\varphi_2 d\tau + \int_{-\infty}^{y}\psi_1^\top\varphi_1 ds + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_2^\top\varphi_2 d\tau - \\ - \textstyle\int_{-\infty}^{x}\psi_2^\top\varphi_2 d\tau = (c^{-1} - \int_{-\infty}^{y} p_2^\top p_1 ds)^{-1} + c_1 - c + c\left(c + \int_{+\infty}^{x} q_1^\top q_2 d\tau\right)^{-1} c - c_1 = \big(c^{-1} - \\ - \textstyle\int_{-\infty}^{y} p_2^\top p_1 ds\big)^{-1} - c + c\left(c + \int_{+\infty}^{x} q_1^\top q_2 d\tau\right)^{-1} c.\end{gathered} \tag{360}$$

З рівності (360) за допомогою технічних перетворень отримуємо два зображення потенціала $\Delta_1(x,y)$:

$$\Delta_1(x,y) = c\left\{c + \textstyle\int_{+\infty}^{x} q_1^\top q_2 d\tau\right\}^{-1}\left\{I + \left(\int_{+\infty}^{x} q_1^\top q_2 d\tau\right)\left(\int_{-\infty}^{y} p_2^\top p_1 ds\right)\right\}\left\{I - c\int_{-\infty}^{y} p_2^\top p_1 ds\right\}^{-1} c, \tag{361}$$

$$\begin{aligned}&\Delta_1(x,y)=c\left(\int_{-\infty}^{y}p_2^\top p_1ds\right)\left\{I-c\int_{-\infty}^{y}p_2^\top p_1ds\right\}^{-1}\left\{\left(\int_{+\infty}^{x}q_1^\top q_2d\tau\right)+\left(\int_{-\infty}^{y}p_2^\top p_1ds\right)^{-1}\right\}\cdot\\&\cdot\left\{c+\int_{+\infty}^{x}q_1^\top q_2d\tau\right\}^{-1}c.\end{aligned}\tag{362}$$

Відповідно, отримуємо два зображення для $\Delta_1^{-1}(x,y)$:

$$\Delta_1^{-1}(x,y)=c^{-1}\left\{I-c\int_{-\infty}^{y}p_2^\top p_1ds\right\}\left\{I+\left(\int_{+\infty}^{x}q_1^\top q_2d\tau\right)\left(\int_{-\infty}^{y}p_2^\top p_1ds\right)\right\}^{-1}\left\{c+\int_{+\infty}^{x}q_1^\top q_2d\tau\right\}c^{-1},\tag{363}$$

$$\Delta_1^{-1}(x,y)=c^{-1}\left\{c+\int_{+\infty}^{x}q_1^\top q_2d\tau\right\}\left\{\left(\int_{+\infty}^{x}q_1^\top q_2d\tau\right)+\left(\int_{-\infty}^{y}p_2^\top p_1ds\right)^{-1}\right\}^{-1}.\tag{364}$$

За допомогою формул оберненої заміни змінних (352)–(355) та (361) отримуємо такі зображення потенціалів u_1, u_2 (133), (134) в нових змінних:

$$\begin{aligned}&u_1=-\varphi_1(y)\left\{c_1-\int_{-\infty}^{x}\psi_2^\top\varphi_2d\tau+\int_{-\infty}^{y}\psi_1^\top\varphi_1ds\right\}^{-1}\psi_2^\top(x)=-p_1(y)\left\{I-c\int_{-\infty}^{y}p_2^\top p_1ds\right\}^{-1}cc^{-1}\left\{I-c\int_{-\infty}^{y}p_2^\top p_1ds\right\}\cdot\\&\cdot\left\{I+\left(\int_{+\infty}^{x}q_1^\top q_2d\tau\right)\left(\int_{-\infty}^{y}p_2^\top p_1ds\right)\right\}^{-1}\left\{c+\int_{+\infty}^{x}q_1^\top q_2d\tau\right\}c^{-1}\ c\left\{c+\int_{+\infty}^{x}q_1^\top q_2d\tau\right\}^{-1}\ q_1^\top(x)=\\&=-p_1(y)\left\{I+\left(\int_{+\infty}^{x}q_1^\top q_2d\tau\right)\left(\int_{-\infty}^{y}p_2^\top p_1ds\right)\right\}^{-1}q_1^\top(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&u_2=\varphi_2(x)\left\{c_1-\int_{-\infty}^{x}\psi_2^\top\varphi_2d\tau+\int_{-\infty}^{y}\psi_1^\top\varphi_1ds\right\}^{-1}\psi_1^\top(y)=q_2(y)\left\{I-c\int_{-\infty}^{y}p_2^\top p_1ds\right\}cc^{-1}\left\{I-c\int_{-\infty}^{y}p_2^\top p_1ds\right\}^{-1}\\&\left\{I+\left(\int_{+\infty}^{x}q_1^\top q_2d\tau\right)\left(\int_{-\infty}^{y}p_2^\top p_1ds\right)\right\}^{-1}\left\{c+\int_{+\infty}^{x}q_1^\top q_2d\tau\right\}c^{-1}\ c\left\{c+\int_{+\infty}^{x}q_1^\top q_2d\tau\right\}^{-1}p_2^\top(x).\ =\\&=q_2(y)\left\{I+\left(\int_{+\infty}^{x}q_1^\top q_2d\tau\right)\left(\int_{-\infty}^{y}p_2^\top p_1ds\right)\right\}^{-1}p_2^\top(x).\end{aligned}$$

Використавши формули (356)–(364), (348)–(351), знаходимо явний вигляд ядер операторів $(\hat{W}_1)_{12}$ (225), $(\hat{\tilde{W}}_1-I)_{11}$ (274), F_{21} (213), G_{22} (220):

$$\begin{aligned}&(\hat{W}_1)_{12}(x,y,\tau)=\varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(x,y)\Delta_1(x,-\infty)\Delta_1^{-1}(\tau,-\infty)\psi_2^\top(\tau)=\\&=\varphi_1(y)\left\{c_1-\int_{-\infty}^{x}\psi_2^\top\varphi_2d\tau+\int_{-\infty}^{y}\psi_1^\top\varphi_1ds\right\}^{-1}\left\{c_1-\int_{-\infty}^{x}\psi_2^\top\varphi_2d\tau\right\}\left\{c_1-\int_{-\infty}^{\tau}\psi_2^\top\varphi_2dr\right\}^{-1}\psi_2^\top(\tau)=p_1(y)\cdot\\&\cdot\left\{c_1-\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_2^\top\varphi_2d\tau+\int_{-\infty}^{y}\psi_1^\top\varphi_1ds\right\}\left\{c_1-\int_{-\infty}^{x}\psi_2^\top\varphi_2d\tau+\int_{-\infty}^{y}\psi_1^\top\varphi_1ds\right\}^{-1}\left\{c_1-\int_{-\infty}^{x}\psi_2^\top\varphi_2d\tau\right\}c^{-1}q_1^\top(\tau)=\\&p_1(y)\left\{I-c\int_{-\infty}^{y}p_2^\top p_1ds\right\}^{-1}cc^{-1}\left\{I-c\int_{-\infty}^{y}p_2^\top p_1ds\right\}\left\{I+\left(\int_{+\infty}^{x}q_1^\top q_2d\tau\right)\left(\int_{-\infty}^{y}p_2^\top p_1ds\right)\right\}^{-1}\cdot\\&\cdot\left\{c+\int_{+\infty}^{x}q_1^\top q_2d\tau\right\}c^{-1}c\left\{c+\int_{+\infty}^{x}q_1^\top q_2d\tau\right\}^{-1}q_1^\top(\tau)=p_1(y)\left\{I+\left(\int_{+\infty}^{x}q_1^\top q_2d\tau\right)\left(\int_{-\infty}^{y}p_2^\top p_1ds\right)\right\}^{-1}q_1^\top(\tau)=\\&=p_1(y)\tilde{\Delta}_{2+}^{-1}(x,y)q_1^\top(\tau).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(\hat{\tilde{W}}_1-I)_{11}(x,y,s)=\varphi_1(y)\tilde{\Delta}_1^{-1}(x,y)\left[-\int_{+\infty}^{x}\psi_2^\top\varphi_2\,d\tau\right]\tilde{\Delta}_1^{-1}(+\infty,s)\psi_1^\top(s)=\varphi_1(y)\cdot\\&\cdot\left\{c_1-\int_{-\infty}^{x}\psi_2^\top\varphi_2d\tau+\int_{-\infty}^{y}\psi_1^\top\varphi_1ds\right\}^{-1}\left[-\int_{+\infty}^{x}\psi_2^\top\varphi_2\,d\tau\right]\left\{c_1-\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_2^\top\varphi_2d\tau+\int_{-\infty}^{y}\psi_1^\top\varphi_1ds\right\}^{-1}\psi_1^\top(s)=\\&=p_1(y)\left\{c_1-\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_2^\top\varphi_2d\tau+\int_{-\infty}^{y}\psi_1^\top\varphi_1ds\right\}\left\{c_1-\int_{-\infty}^{x}\psi_2^\top\varphi_2d\tau+\int_{-\infty}^{y}\psi_1^\top\varphi_1ds\right\}^{-1}\left[-\int_{+\infty}^{x}\psi_2^\top\varphi_2\,d\tau\right]p_2^\top(s)=\\&=p_1(y)\left(I-c\int_{-\infty}^{y}p_2^\top p_1ds\right)^{-1}cc^{-1}\left\{I-c\int_{-\infty}^{y}p_2^\top p_1ds\right\}\left\{I+\left(\int_{+\infty}^{x}q_1^\top q_2d\tau\right)\left(\int_{-\infty}^{y}p_2^\top p_1ds\right)\right\}^{-1}\cdot\\&\cdot\left\{c+\int_{+\infty}^{x}q_1^\top q_2d\tau\right\}c^{-1}c\left(c+\int_{+\infty}^{x}q_1^\top q_2d\tau\right)^{-1}\left(\int_{+\infty}^{x}q_1^\top q_2d\tau\right)p_2^\top(s)=p_1(y)\cdot\\&\cdot\left\{I+\left(\int_{+\infty}^{x}q_1^\top q_2d\tau\right)\left(\int_{-\infty}^{y}p_2^\top p_1ds\right)\right\}^{-1}\left(\int_{+\infty}^{x}q_1^\top q_2d\tau\right)p_2^\top(s)=p_1(y)\left(\int_{+\infty}^{x}q_1^\top(\tau)q_2(\tau)d\tau\right)\Delta_{2+}^{-1}(x,y)p_2^\top(s).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&G_{22}(x,\tau)=\varphi_2(x)\Delta_1^{-1}(x,-\infty)\{\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1^\top\varphi_1ds\}\Delta_1^{-1}(\tau,+\infty)\psi_2^\top(\tau)=\\&=\varphi_2(x)\left\{c_1-\int_{-\infty}^{x}\psi_2^\top\varphi_2d\tau\right\}^{-1}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1^\top\varphi_1ds\right\}\left\{c_1-\int_{-\infty}^{\tau}\psi_2^\top\varphi_2d\tau+\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1^\top\varphi_1ds\right\}^{-1}\psi_2^\top(\tau)=\\&=\ q_2(x)c\left(c+\int_{+\infty}^{x}q_1^\top q_2d\tau\right)^{-1}c\ c^{-1}\left(c+\int_{+\infty}^{x}q_1^\top q_2d\tau\right)c^{-1}\left(c^{-1}-\int_{-\infty}^{+\infty}p_2^\top p_1ds\right)^{-1}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}p_2^\top p_1ds\right)c\\&c^{-1}\left\{I-c\int_{-\infty}^{+\infty}p_2^\top p_1ds\right\}\left\{I+\left(\int_{+\infty}^{\tau}q_1^\top q_2d\tau\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}p_2^\top p_1ds\right)\right\}^{-1}\left\{c+\int_{+\infty}^{\tau}q_1^\top q_2d\tau\right\}\cdot\\&\cdot c^{-1}\ c\left(c+\int_{+\infty}^{\tau}q_1^\top q_2d\tau\right)^{-1}\ q_1^\top(\tau)\ =\ q_2(x)\ \left(\int_{-\infty}^{+\infty}p_2^\top p_1ds\right)\left\{I+\left(\int_{+\infty}^{\tau}q_1^\top q_2d\tau\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}p_2^\top p_1ds\right)\right\}^{-1}\ q_1^\top(\tau)\ =\\&=q_2(x)\Delta_{2+}^{-1}(\tau,+\infty)(\int_{-\infty}^{+\infty}p_2^\top p_1ds)q_1^\top(\tau).\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&F_{21}(x,s) = -\varphi_2(x)\Delta_2^{-1}(x,+\infty)\Delta_2(-\infty,+\infty)\Delta_2^{-1}(-\infty,s)\psi_1^\top(s) = \\
&= -\varphi_2(x)\left\{c_1 - \int_{-\infty}^{x}\psi_2^\top\varphi_2 d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1^\top\varphi_1 ds\right\}^{-1}\left\{c_1 + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1^\top\varphi_1 ds\right\}\left\{c_1 - \int_{-\infty}^{s}\psi_1^\top\varphi_1 ds\right\}^{-1}\psi_1^\top(s) = \\
&\quad = -q_2(x)c^{-1}c\left(c + \int_{+\infty}^{x} q_1^\top q_2 d\tau\right)^{-1} cc^{-1}\left\{c + \int_{+\infty}^{x} q_1^\top q_2 d\tau\right\}\left\{\left(\int_{+\infty}^{x} q_1^\top q_2 d\tau\right) + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p_2^\top p_1 ds\right)^{-1}\right\}^{-1}\cdot \\
&\quad \cdot\left\{I - c\int_{-\infty}^{+\infty} p_2^\top p_1 ds\right\}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} p_2^\top p_1 ds\right)^{-1} c^{-1}c\left(\int_{-\infty}^{+\infty} p_2^\top p_1 ds\right)\left\{I - c\int_{-\infty}^{+\infty} p_2^\top p_1 ds\right\}^{-1}\cdot \\
&\quad \cdot\left\{-\left(\int_{-\infty}^{+\infty} q_1^\top q_2 d\tau\right) + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p_2^\top p_1 ds\right)^{-1}\right\}\left\{c - \int_{-\infty}^{+\infty} q_1^\top q_2 d\tau\right\}^{-1} cc^{-1}\left\{c - \int_{-\infty}^{+\infty} q_1^\top q_2 d\tau\right\}\cdot \\
&\quad \cdot\left\{-\left(\int_{-\infty}^{+\infty} q_1^\top q_2 d\tau\right) + \left(\int_{-\infty}^{s} p_2^\top p_1 ds\right)^{-1}\right\}^{-1}\left\{I - c\int_{-\infty}^{s} p_2^\top p_1 ds\right\}\left(\int_{-\infty}^{s} p_2^\top p_1 ds\right)^{-1} c^{-1}\left\{I - c\int_{-\infty}^{s} p_2^\top p_1 ds\right\}^{-1}\cdot \\
&\quad \cdot cp_2^\top(s) = -q_2(x)\left\{\left(\int_{+\infty}^{x} q_1^\top q_2 d\tau\right) + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p_2^\top p_1 ds\right)^{-1}\right\}^{-1}\left\{-\left(\int_{-\infty}^{+\infty} q_1^\top q_2 d\tau\right) + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p_2^\top p_1 ds\right)^{-1}\right\}\cdot \\
&\quad \cdot\left\{-\left(\int_{-\infty}^{+\infty} q_1^\top q_2 d\tau\right) + \left(\int_{-\infty}^{s} p_2^\top p_1 ds\right)^{-1}\right\}^{-1}\left(\int_{-\infty}^{s} p_2^\top p_1 ds\right)^{-1} p_2^\top(s) = \\
&\quad = -q_2(x)\Delta_{2+}^{-1}(x,+\infty)\Delta_{1-}(+\infty,+\infty)\Delta_{1-}^{-1}(+\infty,s)p_2^\top(s).
\end{aligned}
$$

■

Висновки

У випадку вироджених даних розсіяння знайдено в явному вигляді всі елементи операторів розсіяння S, $\hat{S}$ та обернених до них операторів S^{-1}, $\hat{S}^{-1}$. Також отримано в явному вигляді чотири пари операторів (дві пари з яких є операторами перетворень), що факторизують оператори розсіяння S та $\hat{S}$. За допомогою операторів перетворень знайдено зображення загального розв'язку нестаціонарної системи Дірака для відповідних асимптотик і спеціальних класів потенціалів (коефіцієнтів), всюди щільних в $L_2(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C})$. За допомогою методу бінарних перетворень та основної теореми про бінарні перетворення типу Дарбу для інтегро-диференціальних нестаціонарних операторів знайдено всі основні об'єкти оберненої задачі розсіяння та доведено їх еквівалентність з операторами, отриманими класичним підходом Марченка-Гельфанда-Левітана.

Один з авторів (Ю. Сидоренко) вдячний Австрійському бюро у Львові та Австрійській академічній службі (ÖAD) за фінансову підтримку під час його перебування у Віденському університеті, де було отримано частину результатів цієї статті.

Література

[1] Нижник Л.П. Обратная нестационарная задача рассеяния. – К.: Наук.думка, 1973. – 182 с.

[2] Фаддеев Л.Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики.– М.: ВИНИТИ, 1974. – С. 93–180.

[3] Нижник Л.П. Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений. – К.: Наук.думка, 1991. – 232 с.

[4] Захаров В.Е., Шабат А.Б. Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния // Функцион. анализ и его прил. – 1974. – Т. 8, №3. – С. 43–53.

[5] Zakharov V.Ye. Inverse scattering problem method - see in the book: Bullough R.K., Caudrey P.J. (ed.) Solitons, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980.

[6] Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. – М.: Наука, 1980. – 320 с.

[7] Марченко В.А. Нелинейные уравнения и операторные алгебры. – К.: Наук. думка, 1986. – 156 с.

[8] Matveev V. B., Salle M.A. Darboux transformations and solitons.- Berlin Heidelberg, Springer-Verlag. – 1991. – 120 p.

[9] Konopelchenko B., Sidorenko Yu., Strampp W. (1+1)-dimensional integrable systems as symmetry constraints of (2+1)-dimensional systems // Phys. Lett. A. – 1991. – V. 157. – P.17–21.

[10] Sidorenko Yu., Strampp W. Symmetry constraints of the KP-hierarchy // Inverse Problems. – 1991. – V. 7. – P.L37–L43.

[11] Konopelchenko B., Strampp W. New reductions of the Kadomtsev-Petviashvili hierarchy and two-dimensional Toda hierarchies via symmetry constraints // J. Math. Phys. – 1992. – V. 33, №11. – P. 3676–3684.

[12] Nimmo J.J.C. Darboux transformations for a two-dimensional Zakharov-Shabat AKNS spectral problem, Inverse Problems. – 1992. – V. 8. - P. 219–243.

[13] Cheng Yi. Constrained of the Kadomtsev-Petviashvili hierarchy // J. Math. Phys. – 1992. – V. 33. – P. 3774–3787.

[14] Oevel W., Sidorenko Yu., Strampp W. Hamiltonian structures of the Melnicov system and its Reductions // Inverse Problems. – 1993. – V.9. – P.737–747.

[15] Sidorenko Yu. KP–hierarchy and (1+1)-dimensional multicomponent integrable systems // Ukr. Math. Journ. – 1993. – V. 25, №1. – P.91-104.

[16] Sidorenko Yu., Strampp W. Multicomponent integrable reductions in Kadomtsev-Petviashvilli hierarchy // J. Math. Phys. – 1993. – V.34, №4. – P.1429–1446.

[17] Митропольський Ю.О., Самойленко В.Г., Сидоренко Ю.М. Просторово-двовимірне узагальнення ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в'язями // Доповіді НАН України. – 1999. – №8. – С.19–23.

[18] Самойленко А.М., Самойленко В.Г, Сидоренко Ю.М. Ієрархія рівнянь Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в'язями: Багатовимірні узагальнення та точні розв'язки редукованих систем // Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51, №1. – С.78–97.

[19] Беркела Ю.Ю., Сидоренко Ю.М. Теореми типу Дарбу і оператори перетворень для нелокально редукованої ермітової ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі (Hk-cKP) // Матем. Студії. – 2006. – Т. 25, No. 1. – С.38–64.

[20] Sydorenko Yu.M.Binary transformations and (2+1)-dimensional integrable systems // Ukr. Math. J.– 2002. – V.54, N11. – P.1531–1550.

[21] Sidorenko Yu.M. Factorization of matrix differential operators and Darboux-like transformations // Математичні студії. – 2003. – Т.19, №2. – С.181–192.

[22] Pochynayko M.D., Sydorenko Yu.M. Integrating of some (2+1)-dimentional integrable systems by methods of inverse scattering problem and binary Darboux transformation // Matematychni Studii. – 2003. – V.20, N2. – P. 119–132.

[23] Pochynayko M., Sydorenko Yu. Operators of binary Darboux transformations for Dirac's system // Proc of Inst. of Math. of NAS of Ukraine. – 2004.– V.50, Part 1. – P. 458–462.

[24] Sydorenko Yu. Generalized Binary Darboux-like Theorem for Constrained Kadomtsev-Petviashvili (cKP) Flows // Proc of Inst. of Math. of NAS of Ukraine. – 2004. – V.50, Part 1. – P. 470–477.

[25] Беркела Ю.Ю., Сидоренко Ю.М. Векторно-матричні узагальнення бігамільтонових динамічних систем та їх інтегрування // Матем. Студії.– 2005. – Т. 23, No. 1. – С. 31–51.

[26] Починайко М.Д., Сидоренко Ю.М. Побудова операторів розсіяння методом бінарних перетворень Дарбу // Укр. мат. журн. – 2006. – Т. 58, №8. – С. 1238–1260.

[27] Нижник Л.П., Починайко М.Д., Тарасов В.Г. Обратная задача рассеяния для системы Дирака в характеристических переменных.// Спектральная теория операторов в задачах математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1983. – С. 72–93.

[28] Сидоренко Ю.М., Чвартацький О.І. Бінарні перетворення просторово-двовимірних інтегро-диференціальних операторів і рівнянь Лакса // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. – 2009. – № 19: Серія математика та механіка. - Вип.22. С.32–35

[29] Сидоренко Ю. М., Чвартацький О.І. Бінарні перетворення просторово-двовимірних узагальнень матричної ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в'язями // Український математичний конгрес 2009 (до 100-річчя від дня народження Миколи М. Боголюбова) м. Київ, Інститут математики НАН України, 27–29 серпня 2009 р.: Тези доповідей. – Режим доступу: http://www.imath.kiev.ua/ congress2009/ /partUMC2009.html#H

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ДИРАКА И МЕТОД БИНАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Ю. Сидоренко[a], М. Починайко[b], О. Чвартацкий[a]

[a] *Львовский национальный университет имени Ивана Франко, ул. Университетская 1, 79000, Львов, Украина*
[b] *Национальный университет "Львивська политехника", ул. С. Бандеры 12, 79013, Львов, Украина*

Методом бинарних преобразований найдены все основные объекты (операторы) обратной задачи рассеяния для системы Дирака. Доказана их эквивалентность операторам, которые находятся при класическом подходе Марченка-Гельфанда-Левитана.

Ключевые слова: система Дирака, бинарные преобразования, обратная задача рассеяния.
2000 MSC: 3Q58, 37K10, 37K15
УДК: 517.9

THE INVERSE SCATTERING PROBLEM FOR SPATIALLY TWO-DIMENSIONAL DIRAC SYSTEM AND METHOD OF BINARY TRANSFORMATIONS

Yu. Sydorenko[a], M. Pochynayko[b], O. Chvartatskyy[a]

[a] *Ivan Franko Lviv National University,*
1 Universutets'ka Srt., Lviv, UA - 79000, Ukraine
y_ sydorenkofranko.lviv.ua[b]*National University "Lvivska Politechnika*
12 S. Bandera Str., Lviv, UA-79013, Ukraine

All main objects (operators) of the inverse scattering problem for the Dirac system are found by using the method of binary transformations. Their equivalence with the operators obtained under the classical Marchenko-Gelfand-Levitan approach is proved.

Keywords: Dirac's system, binary transformations, inverse scattering problem.

2000 MSC: 33Q58, 37K10, 37K15

УДК: 517.9