інформаційних систем, 2006, http: // www. microsoft. Com / Ukraine / Government / Analytics / Integration Technologies/Overview.msp 5. Кузнецов С. Пространства данных: исследовательский полигон или путь к новому поколению систем управления данными? http: // synthesis. ipi. ac. Ru /sigmod/seminar/s20060420. 6 Donald Kossmann, Jens-Peter Dittrich. Personal Data Spaces. http://www.inf.ethz.ch/news/focus/res_focus/feb_2006/index_DE. 7. Garretts Summary of Principles of Dataspace Systems, http: // aravaipa. eas. asu. edu/ wiki/ index.php /Garretts _ Summary _ of _ Principles _of_Dataspace_Systems#Overview 8. ETH - Databases and Information Systems – iMeMex, www.dbis.ethz.ch/research/current_projects/iMeMex 9. Processing of natural language queries to a relational database. Samsonova M, Pisarev A, Blagov M, http: // www. cs.dartmouth. edu/ ~brd/ Teaching/ AI/Lectures/Summaries/natlang.html 10. Основные концепции и подходы при создании контекстно-поисковых систем на основе реляционных баз данных. http: // www. citforum. ru/ database/ articles/ search_sys.shtml. 11. Особенности построения хранилищ данных. http: // citforum. uar.net/ seminars/ cis99/sch.shtml/ 12. Kacprzyk J., Ziolkowski A. Database Queries with Fuzzy Linguistic Quantifiers // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. SMC-16, 1996. – P. 512-529. 13. Fuzzy Grouping в Microsoft SQL Server 2005 http: // msdn. microsoft.com/ msdnmag/ issues/05/09/ SQLServer2005/ default.aspx. 14. Пелещишин А.М. Методи та алгоритми моделювання Web-систем // Вісник Держ. ун-ту "Львівська політехніка". 2000. – №406. – С.199–211. 15. Черняк Л. Машины для обработки событий. – Открытые системы #09/2006, http://www.osp.ru/os/2006/09/3776498/_p1.html 16. Гіпертекстові Технології, http://moodle.ukma.kiev.ua/mod/resource/view.php?id=1120

УДК 519.15:621.372

В.В. Різник, М.Т. Соломко*
Національний університет “Львівська політехніка”,
*Європейський університет (Рівненська філія),
Технологічно-природничий університет, м. Бидгощ (Польща)

СИНТЕЗ КОМБІНАТОРНИХ СИСТЕМ ЗА ДОПОМОГОЮ БАГАТОВИМІРНИХ В’ЯЗАНОК

Розглянуто методи синтезу комбінаторних конфігурацій (BIB-схем) за допомогою багатовимірних числових конструкцій – ідеальних кільцевих в’язанок (ІКВ). Запропоновано алгоритми перетворення багатовимірних ІКВ в класичні комбінаторні конфігурації. Розкриваються нові можливості застосування ІКВ у сучасній комбінаториці.

Methods for synthesis of combinatorial configurations (BIB-designs) by means of multi-dimensional numerical constructions – so-called Ideal Ring Bundles (IRB)s has been considered. There are proposed algorithms of transition the multi-dimensional IRBs into classic combinatorial configurations. The methods discovers new possibilities for apply of the IRBs into modern combinatorial theory.

Вступ

Комбінаторні моделі та системи широко застосовуються в технічній кібернетиці, інформаційно-вимірювальній та обчислювальній техніці, радіотехніці, зв’язку, електротехніці, машинобудуванні, а комбінаторні методи використовуються в теорії кодування, математичній логіці, програмуванні, теорії планування експерименту, технічній та статистичній фізиці, економіці, кристалографії, біології. Тому актуальними є дослідження властивостей існуючих і пошук нових комбінаторних моделей, способів їхньої побудови, класифікація, визначення умов існування, виявлення взаємних зв'язків та інтерпретацій.

Для синтезу комбінаторних систем застосовують здебільшого класичні методи комбінаторного аналізу, основані на положеннях комбінаторного аналізу з використанням табличних, теоретико-числових та матричних інтерпретацій, методи апарату скінченних груп перестановок, теорії чисел, схеми відношень, а також методи, пов'язані з використанням апарату теорії полів Галуа [1].

Методи побудови комбінаторних моделей із застосуванням впорядкованих сукупностей елементів – чисел, векторів чи будь-яких інших математичних величин або функцій, зв'язаних між собою деякою операцією, яка здійснюється над відповідними елементами даної сукупності, приводить до загального поняття "в'язанки" як математичного об'єкта, що відіграє роль базової структури у побудові оптимальних комбінаторних систем [2]. Математичні конструкції на впорядкованих елементах, організовані у вигляді в'язанок, виявилися зручним інструментом для синтезу та дослідження комбінаторних конфігурацій. Відношення інцидентності, що існують у більшості класичних комбінаторних конфігурацій, не завжди піддаються відносно простому математичному опису, тоді як у в'язанках ці відношення часто постають у вигляді звичайних числових послідовностей. Тому послідовності-в'язанки дають змогу спрощувати синтез комбінаторних конфігурацій, а відтак побудову комбінаторних систем і розширити теоретичні дослідження в області комбінаторики.

Аналіз проблеми та постановка задачі

Найпростішою структурною організацією елементів, що утворює математичний об`єкт під назвою "в'язанка", є одновимірна упорядкована послідовність K_n чисел $k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots, k_n$:

$$K_n = (k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots, k_n).$$

З погляду постановки задачі синтезу та дослідження оптимальних комбінаторних моделей особливий інтерес викликають в'язанки з кільцевою структурою, елементами яких є цілі додатні числа, а суми на кільцевій послідовності вичерпують значення чисел натурального ряду від 1 до суми $S_n = k_1 + k_2 + \ldots + k_i + \ldots + k_n$ усіх чисел цієї послідовності. Така числова конструкція називається "ідеальною кільцевою в'язанкою", або скорочено ІКВ.

Наприклад, якщо обрати упорядкований ряд (1,4,2) як кільцеву послідовність чисел, то легко перевірити, що всі кільцеві суми цієї послідовності вичерпують натуральний ряд чисел від 1 до S_n=7:

1=1, 2=2, 3=2+1, 4=4, 5=1+4, 6=4+2, 7=1+4+2.

За допомогою в'язанок можна будувати блок-схеми. Під блок-схемою розуміють розміщення елементів множини $\{b_i\}$, j=1,2, …, v в a підмножинах B_j , j =1,2, …, a, які називаються блоками, з однаковою кількістю елементів $k_j=k$ у кожному блоці, причому елемент b_i належить до r_i різних блоків, а кожна p-та пара різних елементів (b_i, b_j), $i \neq j$, p=1,2, …, $v(v$-1)/2 повторюється в λ_p блоках [1].

До основного виду блок-схем належать зрівноважені неповні блок-схеми (*balanced incomplete block design*), або BIB-схеми [1]. BIB-схеми утворені на множині v різних елементів ($i \neq j \Rightarrow b_i{}^{1} b_j$) з кількістю елементів $k < v$ у кожному блоці, причому елементи у блоках розміщуються так:

а) всі елементи одного блоку різні;

б) кожний елемент розміщується точно в r різних блоках ($r_i=r$), i=1, 2, …, v;

в) кожна p-та пара різних елементів (b_i, b_j), p=1,2, …, $v(v$-1)/2 трапляється точно в λ різних блоках $\lambda_p = \lambda$.

Між параметрами v, a, k, r, l BIB-схеми існують залежності

$$ak = v\,r \qquad (1)$$

$$r(k-1) = \lambda(v-1)$$

Числову в'язанку можна розглядати як структурований код, за допомогою якого зручно синтезувати відповідну комбінаторну систему. Методи побудови BIB-схем за допомогою одновимірних числових в'язанок розглядаються в [1,2].

Перехід від одновимірних до багатовимірних числових конструкцій є логічним продовженням дослідження організації комбінаторних систем. У багатовимірних числових конструкціях-в'язанках відповідні ланцюжки операцій здійснюють над векторами багатовимірного простору. При перенесенні дій на послідовності векторів аналогами одновимірних послідовностей постають багатовимірні числові послідовності.

Багатовимірні в'язанки ще мало вивчені. На практиці особливий інтерес становлять методи побудови як самих двовимірних в'язанок, так і похідних конфігурацій за допомогою двовимірних в'язанок. Один з методів побудови двовимірних в'язанок ґрунтується на використанні одновимірних в'язанок [2].

Синтез зрівноважених блок-схем

Нехай задана одновимірна ідеальна кільцева в'язанка ($k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots, k_n$) з параметрами S_n, n, де $S_n = l_1 \cdot l_2$, $(l_1, l_2) = 1$. Алгоритм побудови двовимірної ІКВ з такими самими параметрами на прямокутнику $l_1 \times l_2$ містить виконання таких операцій:

• на послідовності $K_n = (k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots, k_n)$ знайти елементи першого рядка таблиці кільцевих сум одновимірної ІКВ:

$$\{S_j\},\ j = 1, 2, \ldots, n;\quad S_j = \sum_{i=1}^{j} k_i\,; \qquad (2)$$

• на множині елементів $\{S_j\}$ знайти пари чисел $\{(a_j, b_j)\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$;

$$a_j \equiv S_j (\operatorname{mod} l_1),\quad b_j \equiv S_j (\operatorname{mod} l_2)\,; \qquad (3)$$

• упорядкувати пари чисел $\{(a_j, b_j)\}$ у зростаючому порядку числових значень їх елементів, починаючи з b_j, а потім – a_j, причому (0,0) записати в кінці упорядкованої послідовності; утворена послідовність $((a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n))$ з відповідно перейменованими індексами $j = 1, 2, \ldots, n$ становить перший рядок таблиці кільцевих вектор-сум на n-послідовності елементів шуканої ІКВ;

• визначити елементи двовимірної ІКВ за формулами:

$$k_{1j} \equiv a_j - a_{j-1} (\operatorname{mod} l_1),\quad k_{2j} \equiv b_j - b_{j-1} (\operatorname{mod} l_2) \qquad (4)$$

$$j = 2, 3, \ldots, n;\ k_{11} = a_1,\ k_{21} = b_1$$

Наприклад, одновимірна (21,5,1)-ІКВ (2,5,1,3,10) перетворюється у двовимірну на прямокутній матриці 3 × 7 після здійснення передбачених розглянутим алгоритмом операцій:

• на послідовності K_n = (2,5,1,3,10) знаходять елементи першого рядка таблиці кільцевих сум одновимірної ІКВ – {2,7,8,11,21};

• на множині елементів записаного рядка за допомогою співвідношень (3) знаходять послідовність ((2,2), (1,0), (2,1), (2,4), (0,0));

• після упорядкування отримують перший рядок таблиці кільцевих сум двовимірної ІКВ:

((1,0), (2,1), (2,2), (2,4), (0,0)); (5)

• за допомогою залежностей (4) визначають елементи двовимірної ІКВ:

((1,0), (1,1), (0,1), (0,2), (1,3)). (6)

Побудована за цією послідовністю таблиця кільцевих вектор-сум має такий вигляд:

1, 0	2, 1	2, 2	2, 4	0, 0
0, 0	1, 1	1, 2	1, 4	2, 0
2, 6	0, 0	0, 1	0, 3	1, 6
2, 5	0, 6	0, 0	0, 2	1, 5
2, 3	0, 4	0, 5	0, 0	1, 3

Тут кожен із упорядкованих 2-наборів елементів, крім (0,0), трапляється точно по одному разу, де перший елемент набуває значення числового ряду {0, 1, 2}, другий – {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}. Отже, знайдена послідовність утворює двовимірну ІКВ п'ятого (n=5) порядку на прямокутнику 3 × 7.

Синтез BIB-схем за допомогою двовимірної в'язанки здійснюють у два етапи.

На першому етапі будується ВІВ-схема за алгоритмом, який викладено в [1]. Для цього двовимірним елементам ІКВ $((a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_m, b_m), \ldots, (a_n, b_n))$ ставиться у відповідність $S_n = \dfrac{n(n-1)}{R} + 1$ послідовностей:

$$B^{(1)} = \left(\begin{pmatrix} a_1^{(1)} \\ b_1^{(1)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2^{(1)} \\ b_2^{(1)} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_m^{(1)} \\ b_m^{(1)} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_n^{(1)} \\ b_n^{(1)} \end{pmatrix} \right);$$

$$B^{(2)} = \left(\begin{pmatrix} a_1^{(2)} \\ b_1^{(2)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2^{(2)} \\ b_2^{(2)} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_m^{(2)} \\ b_m^{(2)} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_n^{(2)} \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix} \right);$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$B^{(j)} = \left(\begin{pmatrix} a_1^{(j)} \\ b_1^{(j)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2^{(j)} \\ b_2^{(j)} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_m^{(j)} \\ b_m^{(j)} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_n^{(j)} \\ b_n^{(j)} \end{pmatrix} \right);$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$B^{(S_n)} = \left(\begin{pmatrix} a_1^{(S_n)} \\ b_1^{(S_n)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2^{(S_n)} \\ b_2^{(S_n)} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_m^{(S_n)} \\ b_m^{(S_n)} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_n^{(S_n)} \\ b_n^{(S_n)} \end{pmatrix} \right);$$

елементи яких визначаються за формулами:

$$a_m^{(j)} \equiv j + \sum_{i=1}^{m} a_i - 1 (\mathrm{mod}\, l_1) \quad m = 1,2,\ldots,n; \quad j = 1,2,\ldots,S_n \tag{7}$$

$$b_m^{(j)} \equiv j + \sum_{i=1}^{m} b_i - 1 (\mathrm{mod}\, l_2) \quad m = 1,2,\ldots,n; \quad j = 1,2,\ldots,S_n, \tag{8}$$

де n, R, l_1, l_2 – параметри двовимірної ІКВ.

Наприклад, з двовимірної ІКВ ((1,0),(1,1),(0,1),(0,2),(1,3)) за допомогою формул (7), (8) легко отримати таку конфігурацію:

$$\begin{aligned}
&B^{(1)} = \begin{pmatrix} 1\,2\,2\,2\,0 \\ 0\,1\,2\,4\,0 \end{pmatrix}, && B^{(8)} = \begin{pmatrix} 2\,0\,0\,0\,1 \\ 0\,1\,2\,4\,0 \end{pmatrix}, && B^{(15)} = \begin{pmatrix} 0\,1\,1\,1\,2 \\ 0\,1\,2\,4\,0 \end{pmatrix}, \\
&B^{(2)} = \begin{pmatrix} 2\,0\,0\,0\,1 \\ 1\,2\,3\,5\,1 \end{pmatrix}, && B^{(9)} = \begin{pmatrix} 0\,1\,1\,1\,2 \\ 1\,2\,3\,5\,1 \end{pmatrix}, && B^{(16)} = \begin{pmatrix} 1\,2\,2\,2\,0 \\ 1\,2\,3\,5\,1 \end{pmatrix}, \\
&B^{(3)} = \begin{pmatrix} 0\,1\,1\,1\,2 \\ 2\,3\,4\,6\,2 \end{pmatrix}, && B^{(10)} = \begin{pmatrix} 1\,2\,2\,2\,0 \\ 2\,3\,4\,6\,2 \end{pmatrix}, && B^{(17)} = \begin{pmatrix} 2\,0\,0\,0\,1 \\ 2\,3\,4\,6\,2 \end{pmatrix}, \\
&B^{(4)} = \begin{pmatrix} 1\,2\,2\,2\,0 \\ 3\,4\,5\,0\,3 \end{pmatrix}, && B^{(11)} = \begin{pmatrix} 2\,0\,0\,0\,1 \\ 3\,4\,5\,0\,3 \end{pmatrix}, && B^{(18)} = \begin{pmatrix} 0\,1\,1\,1\,2 \\ 3\,4\,5\,0\,3 \end{pmatrix}, \\
&B^{(5)} = \begin{pmatrix} 2\,0\,0\,0\,1 \\ 4\,5\,6\,1\,4 \end{pmatrix}, && B^{(12)} = \begin{pmatrix} 0\,1\,1\,1\,2 \\ 4\,5\,6\,1\,4 \end{pmatrix}, && B^{(19)} = \begin{pmatrix} 1\,2\,2\,2\,0 \\ 4\,5\,6\,1\,4 \end{pmatrix}, \\
&B^{(6)} = \begin{pmatrix} 0\,1\,1\,1\,2 \\ 5\,6\,0\,2\,5 \end{pmatrix}, && B^{(13)} = \begin{pmatrix} 1\,2\,2\,2\,0 \\ 5\,6\,0\,2\,5 \end{pmatrix}, && B^{(20)} = \begin{pmatrix} 2\,0\,0\,0\,1 \\ 5\,6\,0\,2\,5 \end{pmatrix}, \\
&B^{(7)} = \begin{pmatrix} 1\,2\,2\,2\,0 \\ 6\,0\,1\,3\,6 \end{pmatrix}, && B^{(14)} = \begin{pmatrix} 2\,0\,0\,0\,1 \\ 6\,0\,1\,3\,6 \end{pmatrix}, && B^{(21)} = \begin{pmatrix} 0\,1\,1\,1\,2 \\ 6\,0\,1\,3\,6 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{9}$$

У цьому випадку побудована конфігурація з двовимірними елементами $\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$ на множинах $\{a_i\}=\{0,1,2\}$ та $\{b_i\}=\{0,1,2,3,4,5,6\}$. Ця конструкція є двовимірною блок-схемою з параметрами $S_n=21$, $n=5$, $R=1$, $l_1=3$ та $l_2=7$, причому вона є циклічною, бо кожний її блок можна отримати з попереднього блоку при збільшенні його двовимірних елементів на одиницю в полі чисел за відповідним модулем l_1 та l_2.

На другому етапі здійснюють перетворення конфігурації (9) в класичну блок-схему. Оскільки елементами конфігурації (9) є двовимірні вектори, то для відображення цієї конфігурації на множині елементів одновимірної блок-схеми з параметрами $S_n=21$, $n=5$ достатньо замінити двовимірні елементи одновимірними відповідниками і так отримати блок-схему з одновимірними елементами. Така заміна є правомірною, бо комбінаторні властивості блок-схем з фіксованими параметрами, описані залежностями (1), для обох конфігурацій залишаються незмінними. Тому існує взаємно однозначна відповідність між класичними (одновимірними) та новоутвореними (двовимірними) комбінаторними конфігураціями. Це дає змогу легко перетворювати класичні блок-схеми на багатовимірні блок-схеми на векторних ІКВ, або навпаки шляхом простої заміни елементів однієї конфігурації відповідними елементами іншої. Взаємно однозначну відповідність елементів класичної та векторної конфігурацій зручно ілюструвати таблицею відповідності. Нижче наведена таблиця відповідності двовимірних елементів схеми (9) одновимірним елементам (натуральним числам).

Таблиця 1

Таблиця відповідності одно - та двовимірних елементів для схеми (9)

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Після заміни двовимірних елементів схеми (9) натуральними числами згідно з табл. 1 та їх упорядкування всередині блоків у зростаючому порядку отримаємо:

$$B^{(1)}=(0,7,15,16,18),\quad B^{(8)}=(1,2,4,7,8),\quad B^{(15)}=(0,8,9,10,12),$$
$$B^{(2)}=(2,3,5,9,15),\quad B^{(9)}=(1,10,11,13,15),\quad B^{(16)}=(1,9,16,17,19),$$
$$B^{(3)}=(2,11,12,14,16),\quad B^{(10)}=(2,10,17,18,20),\quad B^{(17)}=(3,4,6,10,16),$$
$$B^{(4)}=(3,8,11,18,19),\quad B^{(11)}=(0,4,5,11,17),\quad B^{(18)}=(3,7,12,13,17),$$
$$B^{(5)}=(1,5,6,12,18),\quad B^{(12)}=(4,9,13,14,18),\quad B^{(19)}=(4,12,15,19,20),$$
$$B^{(6)}=(5,7,10,14,19),\quad B^{(13)}=(5,8,13,16,20),\quad B^{(20)}=(0,2,6,13,19),$$
$$B^{(7)}=(6,8,14,15,17),\quad B^{(14)}=(0,1,3,14,20),\quad B^{(21)}=(6,7,9,11,20).$$

Упорядкувавши блоки в лексикографічному порядку, отримуємо завершальну блок-схему:

$$B^{(1)}=(0,1,3,14,20),\quad B^{(8)}=(1,9,16,17,19),\quad B^{(15)}=(3,8,11,18,19),$$
$$B^{(2)}=(0,2,6,13,19),\quad B^{(9)}=(1,10,11,13,15),\quad B^{(16)}=(4,9,13,14,18),$$
$$B^{(3)}=(0,4,5,11,17),\quad B^{(10)}=(2,3,5,9,15),\quad B^{(17)}=(4,12,15,19,20),$$
$$B^{(4)}=(0,7,15,16,18),\quad B^{(11)}=(2,10,17,18,20),\quad B^{(18)}=(5,7,10,14,19),$$
$$B^{(5)}=(0,8,9,10,12),\quad B^{(12)}=(2,11,12,14,16),\quad B^{(19)}=(5,8,13,16,20),$$
$$B^{(6)}=(1,2,4,7,8),\quad B^{(13)}=(3,4,6,10,16),\quad B^{(20)}=(6,7,9,11,20),$$
$$B^{(7)}=(1,5,6,12,18),\quad B^{(14)}=(3,7,12,13,17),\quad B^{(21)}=(6,8,14,15,17).$$

Синтезована блок-схема є зрівноваженою симетричною блок-схемою з параметрами:

$$v = a = S_n = 21, \quad k = r = n = 5, \ \lambda = R = 1 \tag{10}$$

Порівняно з одновимірними ідеальними кільцевими в'язанками багатовимірним ІКВ властива значно більша різновидність ізоморфних перетворень за допомогою ряду операцій: зміщення, інверсії, перестановки, доповнення, множення на вектор-коефіцієнти [1]. Це дає можливість будувати нові конфігурації, використовуючи вищезгадані операції, зокрема операцію „доповнення”, суть якої зводиться до заміни всіх елементів $\{a_i\}$, (i=1, 2, ..., t) у кожному з наборів t-вимірної ІКВ, заданої на t-вимірному паралелепіпеді $l_1 \times l_2 \times ... \times l_i \times ... \times l_t$, відповідними різницями $\{l_i - a_i\}$ за модулем l_i [1].

Наприклад, двовимірна ІКВ ((1,0),(1,1),(0,1),(0,2),(1,3)) при l_1=3, l_2=7 після операції доповнення перетворюється на послідовність

$$((2,0),(2,6),(0,6),(0,5),(2,4)), \tag{11}$$

елементи яких обчислюються за вищезгаданими правилами.

Легко перевірити, що послідовність (11) є одним із варіантів двовимірної ІКВ п'ятого (n=5) порядку з параметрами базової ІКВ (6). За цією послідовністю за допомогою формул (7) і (8) знаходимо двовимірну блок-схему з параметрами S_n = 21, n=5, R=1, l_1=3, l_2=7:

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} 2\,1\,1\,1\,0 \\ 0\,6\,5\,3\,0 \end{pmatrix}, \quad B^{(8)} = \begin{pmatrix} 0\,2\,2\,2\,1 \\ 0\,6\,5\,3\,0 \end{pmatrix}, \quad B^{(15)} = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0\,2 \\ 0\,6\,5\,3\,0 \end{pmatrix},$$

$$B^{(2)} = \begin{pmatrix} 0\,2\,2\,2\,1 \\ 1\,0\,6\,4\,1 \end{pmatrix}, \quad B^{(9)} = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0\,2 \\ 1\,0\,6\,4\,1 \end{pmatrix}, \quad B^{(16)} = \begin{pmatrix} 2\,1\,1\,1\,0 \\ 1\,0\,6\,4\,1 \end{pmatrix},$$

$$B^{(3)} = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0\,2 \\ 2\,1\,0\,5\,2 \end{pmatrix}, \quad B^{(10)} = \begin{pmatrix} 2\,1\,1\,1\,0 \\ 2\,1\,0\,5\,2 \end{pmatrix}, \quad B^{(17)} = \begin{pmatrix} 0\,2\,2\,2\,1 \\ 2\,1\,0\,5\,2 \end{pmatrix},$$

$$B^{(4)} = \begin{pmatrix} 2\,1\,1\,1\,0 \\ 3\,2\,1\,6\,3 \end{pmatrix}, \quad B^{(11)} = \begin{pmatrix} 0\,2\,2\,2\,1 \\ 3\,2\,1\,6\,3 \end{pmatrix}, \quad B^{(18)} = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0\,2 \\ 3\,2\,1\,6\,3 \end{pmatrix},$$

$$B^{(5)} = \begin{pmatrix} 0\,2\,2\,2\,1 \\ 4\,3\,2\,0\,4 \end{pmatrix}, \quad B^{(12)} = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0\,2 \\ 4\,3\,2\,0\,4 \end{pmatrix}, \quad B^{(19)} = \begin{pmatrix} 2\,1\,1\,1\,0 \\ 4\,3\,2\,0\,4 \end{pmatrix},$$

$$B^{(6)} = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0\,2 \\ 5\,4\,3\,1\,5 \end{pmatrix}, \quad B^{(13)} = \begin{pmatrix} 2\,1\,1\,1\,0 \\ 5\,4\,3\,1\,5 \end{pmatrix}, \quad B^{(20)} = \begin{pmatrix} 0\,2\,2\,2\,1 \\ 5\,4\,3\,1\,5 \end{pmatrix},$$

$$B^{(7)} = \begin{pmatrix} 2\,1\,1\,1\,0 \\ 6\,5\,4\,2\,6 \end{pmatrix}, \quad B^{(14)} = \begin{pmatrix} 0\,2\,2\,2\,1 \\ 6\,5\,4\,2\,6 \end{pmatrix}, \quad B^{(21)} = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0\,2 \\ 6\,5\,4\,2\,6 \end{pmatrix}.$$

Виконуючи операцію множення двовимірних елементів цієї схеми на вектор-коефіцієнт (1,3) в полі чисел за відповідними модулями l_1 =3, l_2.= 7 та розмістивши блоки в лексикографічному порядку, отримаємо кінцеву блок-схему:

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{B}^{(1)} = (\mathbf{1,2,12,18,21}), & B^{(8)} = (\mathbf{2,5,7,9,17}), & B^{(15)} = (\mathbf{5,8,10,12,20}), \\
\mathrm{B}^{(2)} = (\mathbf{1,3,11,17,20}), & B^{(9)} = (\mathbf{2,8,11,13,15}), & B^{(16)} = (\mathbf{5,11,14,16,18}), \\
B^{(3)} = (\mathbf{1,4,8,9,16}), & B^{(10)} = (\mathbf{3,4,5,15,21}), & B^{(17)} = (\mathbf{6,9,10,11,21}), \\
B^{(4)} = (\mathbf{1,5,6,13,19}), & B^{(11)} = (\mathbf{3,6,7,8,18}), & B^{(18)} = (\mathbf{6,12,15,16,17}), \\
B^{(5)} = (\mathbf{1,7,10,14,15}), & B^{(12)} = (\mathbf{3,9,12,13,14}), & B^{(19)} = (\mathbf{7,13,16,20,21}), \\
B^{(6)} = (\mathbf{2,3,10,16,19}), & B^{(13)} = (\mathbf{4,7,11,12,19}), & B^{(20)} = (\mathbf{8,14,17,19,21}), \\
B^{(7)} = (\mathbf{2,4,6,14,20}), & B^{(14)} = (\mathbf{4,10,13,17,18}), & B^{(21)} = (\mathbf{9,15,18,19,20}).
\end{array} \tag{12}$$

Блок-схема (12) є ще одним варіантом ВІВ-схеми з параметрами S_n=21, n=5, R=1, що утворена за допомогою двовимірної ІКВ. Ця схема є зрівноваженою симетричною ВІВ-схемою. На відміну від циклічної блок-схеми, яка відповідає одновимірній ІКВ (2,5,1,3,10) з параметрами S_n=21, n=5, R=1, блок-схема (12) позбавлена циклічного автоморфізму. Описаний метод можна застосовувати не лише для синтезу зрівноважених комбінаторних конфігурацій, але й для побудови частково зрівноважених ВІВ- схем [1].

Синтез частково зрівноважених блок-схем

На відміну від зрівноважених блок-схем частково зрівноважені схеми дають змогу утворювати конфігурації з параметрами, що відрізняються від параметрів базових блок-схем. У таких конфігураціях кількість пар елементів у різних блоках може відрізнятися. Однак порушення рівноваги між кількістю окремих пар, що трапляються у блоках схеми, не зменшує їхнього практичного значення, а у деяких випадках має свої переваги. Цю властивість можна застосовувати, наприклад, для побудови частково зрівноважених планів експерименту з двома асоціативними класами, коли деякі пари умов експерименту будуть порівнюватися точніше, ніж інші [3].

Для побудови частково зрівноваженої блок-схеми оберемо за основу послідовність двовимірних елементів (1.1)–(1.4), яка утворює ІКВ з параметрами n=4, R=1 на прямокутнику 4 × 5 [1]. Перетворюючи цю послідовність на блок-схему за допомогою формул (7) і (8), знаходимо:

$B^{(1)}=\begin{pmatrix}1230\\1320\end{pmatrix},$	$B^{(6)}=\begin{pmatrix}2301\\1320\end{pmatrix},$	$B^{(11)}=\begin{pmatrix}3012\\1320\end{pmatrix},$	$B^{(16)}=\begin{pmatrix}0123\\1320\end{pmatrix},$
$B^{(2)}=\begin{pmatrix}2301\\2431\end{pmatrix},$	$B^{(7)}=\begin{pmatrix}3012\\2431\end{pmatrix},$	$B^{(12)}=\begin{pmatrix}0123\\2431\end{pmatrix},$	$B^{(17)}=\begin{pmatrix}1230\\2431\end{pmatrix},$
$B^{(3)}=\begin{pmatrix}3012\\3042\end{pmatrix},$	$B^{(8)}=\begin{pmatrix}0123\\3042\end{pmatrix},$	$B^{(13)}=\begin{pmatrix}1230\\3042\end{pmatrix},$	$B^{(18)}=\begin{pmatrix}2301\\3042\end{pmatrix},$ (13)
$B^{(4)}=\begin{pmatrix}0123\\4103\end{pmatrix},$	$B^{(9)}=\begin{pmatrix}1230\\4103\end{pmatrix},$	$B^{(14)}=\begin{pmatrix}2301\\4103\end{pmatrix},$	$B^{(19)}=\begin{pmatrix}3012\\4103\end{pmatrix},$
$B^{(5)}=\begin{pmatrix}1230\\0214\end{pmatrix},$	$B^{(10)}=\begin{pmatrix}2301\\0214\end{pmatrix},$	$B^{(15)}=\begin{pmatrix}3012\\0214\end{pmatrix},$	$B^{(20)}=\begin{pmatrix}0123\\0214\end{pmatrix},$

Система (13) є частково зрівноважена конфігурація з двовимірними елементами $\begin{pmatrix}a_i\\b_i\end{pmatrix}$ на множині $\{a_i\}=\{0,1,2,3\},\{b_i\}=\{0,1,2,3,4\}$ і параметрами b=20, k=4, причому вона є циклічною, бо кожний її блок можна отримати з попереднього блоку при збільшенні його двовимірних елементів на одиницю в полі чисел за модулем l_1 = 4 та l_2 =5.

Перехід від двовимірних елементів до одновимірних зручно здійснити за допомогою таблиці відповідності (табл. 2).

Таблиця 2

Таблиця відповідності одно - та двовимірних елементів схеми (13)

$\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{3}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{4}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{3}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{4}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{3}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{4}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{3}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{4}\end{pmatrix}$
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Після заміни елементів згідно з табл. 2 і розміщення блоків в лексикографічному порядку отримаємо таку конфігурацію:

$B^{(1)}=(\mathbf{1,9,16,18})$	$B^{(6)}=(\mathbf{2,7,12,18})$	$B^{(11)}=(3,\mathbf{8,9},17)$	$B^{(16)}=(\mathbf{4,9,15,20})$
$B^{(2)}=(\mathbf{1,10,13,20})$	$B^{(7)}=(\mathbf{2,8,11,15})$	$B^{(12)}=(\mathbf{3,12,14,16})$	$B^{(17)}=(\mathbf{5,6,14,15})$
$B^{(3)}=(\mathbf{1,11,14,17})$	$B^{(8)}=(\mathbf{2,10,17,19})$	$B^{(13)}=(\mathbf{4,6,17,18})$	$B^{(18)}=(\mathbf{5,7,9,19})$ (14)
$B^{(4)}=(\mathbf{1,12,15,19})$	$B^{(9)}=(\mathbf{3,6,13,19})$	$B^{(14)}=(\mathbf{4,7,10,14})$	$B^{(19)}=(\mathbf{5,8,10,16})$
$B^{(5)}=(\mathbf{2,6,16,20})$	$B^{(10)}=(\mathbf{3,7,11,20})$	$B^{(15)}=(\mathbf{4},8,\mathbf{12,13})$	$B^{(20)}=(\mathbf{5,11,13,18})$

Схема (14) є частково зрівноваженою блок - схемою з параметрами v = 20, n = 4, λ =12/19, що відрізняються від параметрів відповідної зрівноваженої блок-схеми, для якої, як відомо, v = 21, n = 5, λ =1. Дробове значення параметра λ вказує на те, що не всі пари елементів в блоках цієї схеми представлені в однаковій кількості [4]. У побудованій конфігурації різні пари елементів трапляються у блоках не більше одного разу, але деякі пари не трапляються жодного разу. Різниця між кількістю усіх присутніх та відсутніх пар становить мінімальну можливу величину, завдяки чому цю блок-схему доцільно використати для синтезу частково зрівноважених планів експерименту [3].

Висновки

Використання багатовимірних ідеальних кільцевих в'язанок (ІКВ) для синтезу класичних комбінаторних конфігурацій розширює сферу вживання нетрадиційних методів дослідження систем різного призначення та їх практичного застосування у багатьох галузях науки та народного господарства. Описані методи та алгоритми демонструють можливість побудови математичних моделей систем з відповідними комбінаторними властивостями, що можуть знайти застосування в теорії та практиці планування експерименту. Ідеальні в'язанки дають змогу спрощувати синтез комбінаторних конфігурацій, а відтак побудову комбінаторних систем і розширити теоретичні дослідження в області комбінаторики.

1. Холл М. Комбінаторика. – М., 1970. – 470 с. 2. Різник В.В. Синтез оптимальних комбінаторних систем. – Львів, 1989. – 168 с. 3. Таблицы планов эксперимента для факторных и полиномиальных моделей / В.З. Бродский, Л.И. Бродский, Т.И. Голикова и др. – М.: Металлургия, 1982. – 752 с. 4. Соломко М.Т. Синтез комбінаторних конфігурацій на рівні блок-схем за допомогою числових в'язанок: Дисертація …канд. техн. наук. – Львів, 2000.