ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.687 № 687, (2010) с. 156–163

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.687 No 687, (2010) 156–163

ОДИН ПІДХІД ДО РЕАЛІЗАЦІЇ ТРИТОЧКОВИХ РІЗНИЦЕВИХ СХЕМ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ

Л.Б. Гнатів[a], М.В. Кутнів[a], М.М. Круль[b]

[a] *Національний університет "Львівська політехніка"*
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна
[b] *Жешувська Політехніка*
вул. Повстанців Варшави 8, 35-959, Жешув, Польща

(Отримано 2 листопада 2010 р.)

Запропоновано новий підхід до реалізації триточкових різницевих схем, який ґрунтується на використанні однокрокового методу рядів Тейлора для чисельного розв'язування допоміжних задач Коші та побудові рекурентних алгоритмів для обчислення похідних.

Ключові слова: нелінійна крайова задача, триточкова різницева схема, рекурентний алгоритм, ітераційний метод послідовних наближень.

2000 MSC: 65L10; 65L12

УДК: 519.6

Вступ

У роботах [1–3] для нелінійної крайової задачі

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right] = -f\left(x,u,\frac{du}{dx}\right),\ x\in(0,1),$$
$$u(0)=\mu_1,\ \ u(1)=\mu_2, \tag{1}$$

на нерівномірній сітці побудована точна триточкова різницева схема (ТТРС), досліджено існування та єдиність її розв'язку, розроблено алгоритмічну реалізацію ТТРС через триточкові різницеві схеми (ТРС) рангу $\bar{m} = 2\left[(m+1)/2\right]$ ($[.]$ – ціла частина), досліджено існування та єдиність розв'язку таких схем, встановлено оцінки їх точності. Запропоновані ТРС для своєї побудови вимагають для кожного вузла $x_j,\ j=1,2,...,N-1$ сітки розв'язування двох нелінійних задач Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь на відрізку $[x_{j-1},x_j]$(вперед) і $[x_j,x_{j+1}]$(назад), що здійснюється за один крок за допомогою будь-якого однокрокового методу. У цій статті для розв'язування допоміжних задач Коші використовується метод рядів Тейлора. Для обчислення коефіцієнтів ряду Тейлора розроблено рекурентний алгоритм.

I. Триточкові різницеві схеми високого порядку точності

Виберемо нерівномірну сітку

$$\left.\begin{aligned}\hat{\omega}_h = \{x_j\in(0,1),\quad j=1,2,...,N-1,\\ h_j = x_j - x_{j-1} > 0,\quad \sum_{j=1}^{N} h_j = 1\end{aligned}\right\}$$

так, щоб точки розриву функцій $k(x),\ f\left(x,u,\dfrac{du}{dx}\right)$ співпадали з вузлами сітки $\hat{\omega}_h$. Множину всіх точок розриву позначимо через ρ і вважатимемо, що N таке, що $\rho\subseteq\hat{\omega}_h$. У точках розриву зв'яжемо розв'язок задачі (1) умовами неперервності

$$u(x_i-0)=u(x_i+0),$$

$$k(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_i-0} = \ k(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_i+0},\forall x_i\in\rho.$$

Введемо функції

$$Y_\alpha^j(x,u) = \hat{u}(x) + w_\alpha^j(x,u) - \frac{V_\alpha^j(x)}{V_\alpha^j(x_j)}w_\alpha^j(x_j,u),$$

$$x\in[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}],\ \alpha=1,2,\ j=1,2,...,N-1,$$

де

$$\hat{u}(x) = \left[u(x_j)V_1^j(x) + u(x_{j-1})V_2^{j-1}(x)\right]\ \left[V_1^j(x_j)\right]^{-1},$$

$$x\in[x_{j-1},x_j]\,,\ V_1^j(x) = \int\limits_{x_{j-1}}^{x}\frac{dt}{k(t)},\ V_2^j(x) = \int\limits_{x}^{x_{j+1}}\frac{dt}{k(t)},$$

а функції $w_\alpha^j(x,u), l_\alpha^j(x,u),\ \alpha=1,2-$розв'язки задач Коші:

$$\frac{dw_\alpha^j(x,u)}{dx} = \frac{l_\alpha^j(x,u)}{k(x)},$$

$$\frac{dl_\alpha^j(x,u)}{dx} = -f\left(x, Y_\alpha^j(x,u), \frac{dY_\alpha^j(x,u)}{dx}\right),$$

$$x_{j-2+\alpha} < x < x_{j-1+\alpha}, \tag{2}$$

$$w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u) = l_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u) = 0,$$

$$\alpha = 1,2, \quad j = 1,2,...,N-1.$$

Задача (2) має єдиний розв'язок (див. [2,3]), причому для розв'язку нелінійної крайової задачі (1) буде справджуватись представлення

$$u(x) = Y_\alpha^j(x,u) =$$

$$= \hat{u}(x) + w_\alpha^j(x,u) - \frac{V_\alpha^j(x)}{V_\alpha^j(x_j)} w_\alpha^j(x_j,u), \tag{3}$$

$$x \in [x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}], \quad \alpha = 1,2, \quad j = 1,2,...,N-1.$$

Для задачі (1) існує ТТРС

$$(au_{\bar{x}})_{\hat{x}} = -\varphi(x,u), \ x \in \hat{\omega}_h,$$

$$u(0) = \mu_1, \quad u(1) = \mu_2, \tag{4}$$

яка має єдиний розв'язок $u(x)$, $\forall x \in \hat{\omega}_h$, який є також розв'язком задачі (1) в вузлах сітки $\hat{\omega}_h$, де

$$u_{\bar{x},j} = \frac{u_j - u_{j-1}}{h_j}, \ u_{\hat{x},j} = \frac{u_{j+1} - u_j}{\hbar_j},$$

$$\hbar_j = \frac{h_j + h_{j+1}}{2}, \ a(x_j) = \left[\frac{1}{h_j} V_1^j(x_j)\right]^{-1},$$

$$\varphi(x_j,u) = \hat{T}^{x_j}(w(\xi)) =$$

$$= [\hbar_j V_1^j(x_j)]^{-1} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} V_1^j(\xi) w(\xi) d\xi + \tag{5}$$

$$+ [\hbar_j V_2^j(x_j)]^{-1} \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} V_2^j(\xi) w(\xi) d\xi.$$

Функція $u(x)$ в правій частині (4) визначається згідно з формулою (3) і залежить тільки від $u(x_j)$ $j = 0,1,...,N$.

Оскільки

$$(-1)^{\alpha+1} \int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^{x_j} V_\alpha^j(\xi) f\left(\xi, u(\xi), \frac{du}{d\xi}\right) d\xi =$$

$$= (-1)^\alpha V_\alpha^j(x_j) l_\alpha^j(x_j,u) + w_\alpha^j(x_j,u), \ \alpha = 1,2,$$

то

$$\varphi(x_j,u) =$$

$$= \hbar_j^{-1} \sum_{\alpha=1}^{2} (-1)^\alpha \left[l_\alpha^j(x_j,u) + (-1)^\alpha \frac{w_\alpha^j(x_j,u)}{V_\alpha^j(x_j)}\right]. \tag{6}$$

Зауважимо, що функції $w_\alpha^j(x,u)$, $l_\alpha^j(x,u), \alpha = 1,2$, які є розв'язками системи (2), залежать від параметрів $b_\alpha \equiv b_\alpha^j(u) \equiv w_\alpha^j(x_j,u)$, тобто $w_\alpha^j(x,u) \equiv w_\alpha^j(x,u,b_\alpha)$, $l_\alpha^j(x,u) \equiv l_\alpha^j(x,u,b_\alpha), \alpha = 1,2$.

Задачу (2) розв'язуватимемо чисельно за допомогою однокрокового методу рядів Тейлора. Алгоритм її розв'язування матиме такий вигляд:

1. Послідовно диференціюючи (2), знайдемо похідні

$$\frac{d^p w_\alpha^j(x,u,b_\alpha)}{dx^p}, p = 2,3,...,\bar{m},$$

$$\frac{d^p l_\alpha^j(x,u,b_\alpha)}{dx^p}, p = 2,3,...m.$$

2. Визначимо наближене значення параметрів $b_\alpha, \ \alpha = 1,2$

$$b_\alpha^{(1)} = 0, \quad b_\alpha^{(s-1)} \equiv b_\alpha^{(s-1)j}(u) = w_\alpha^{(s-1)j}(x_j,u) =$$

$$= \sum_{p=2}^{s-1} \frac{\left[(-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}\right]^p}{p!} \frac{d^p w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u, b_\alpha^{(s-2)})}{dx^p}, \tag{7}$$

$$s = 3,4,...,\bar{m}.$$

3. Обчислимо наближений розв'язок задачі (3)

$$w_\alpha^{(\bar{m})j} = w_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j,u) =$$

$$= \sum_{p=2}^{\bar{m}} \frac{\left[(-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}\right]^p}{p!} \frac{d^p w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u, b_\alpha^{(\bar{m}-1)})}{dx^p},$$

$$l_\alpha^{(m)j} = l_\alpha^{(m)j}(x_j,u) = \tag{8}$$

$$\sum_{p=1}^{m} \frac{\left[(-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}\right]^p}{p!} \frac{d^p l_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u, b_\alpha^{(\bar{m}-1)})}{dx^p}.$$

Отже, замість ТТРС (4), (6) можна скористатись ТРС рангу $\bar{m}$ вигляду

$$(a^{(\bar{m})} y_{\bar{x}}^{(\bar{m})})_{\hat{x}} = -\varphi^{(\bar{m})}(x, y^{(\bar{m})}), \ x \in \hat{\omega}_h,$$

$$y^{(\bar{m})}(0) = \mu_1, \ y^{(\bar{m})}(1) = \mu_2, \tag{9}$$

$$a^{(\bar{m})}(x_j) = \left[\frac{1}{h_j} V_1^{(\bar{m})j}(x_j)\right]^{-1},$$

$$\varphi^{(\bar{m})}(x_j,u) =$$

$$= \hbar_j^{-1} \sum_{\alpha=1}^{2} (-1)^\alpha \left[l_\alpha^{(m)j}(x_j,u) + (-1)^\alpha \frac{w_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j,u)}{V_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j)}\right].$$

Доведено (див. [2,3]), що існує стала $h_0 > 0$ така, що для $\forall \{h_j\}_{j=1}^N : |h| = \max\limits_{1 \le j \le N} h_j \le h_0$ ТРС (9) має порядок точності $\bar{m}$, причому для розв'язку цієї схеми справджується оцінка

$$\left\| y^{(\bar m)} - u \right\|^{*}_{1,2,\hat\omega_h} =$$

$$= \left[\left\| y^{(\bar m)} - u \right\|^{2}_{0,2,\hat\omega_h} + \left\| k\frac{dy^{(\bar m)}}{dx} - k\frac{du}{dx} \right\|^{2}_{0,2,\hat\omega_h} \right]^{1/2} \le$$

$$\le M\left|h\right|^{\bar m},$$

де

$$\|u\|_{0,2,\hat\omega_h} = (u,u)^{1/2}_{\hat\omega_h},\ \|u,v\|_{\hat\omega_h} = \sum_{\xi\in\hat\omega_h} \hbar(\xi)u(\xi)v(\xi),$$

$$k(x_j)\frac{dy^{(\bar m)}(x_j)}{dx} =$$

$$= \frac{hy^{(\bar m)}_{\bar x,j} - w_1^{(\bar m)j}\left(x_j, y^{(\bar m)}\right)}{V_1^{(\bar m)j}(x_j)} + l_1^{(m)j}\left(x_j, y^{(\bar m)}\right),$$

константа M не залежить від $|h|$.

Розв'язок нелінійної ТРС (9) може бути знайдений, наприклад, за допомогою методу послідовних наближень

$$\left(a^{(\bar m)} y^{(\bar m,n)}_{\bar x}\right)_{\hat x} = -\varphi^{(\bar m)}\left(x, y^{(\bar m,n-1)}\right),\ x\in\hat\omega_h$$

$$y^{(\bar m,n)}(0) = \mu_1,\ y^{(\bar m,n)}(1) = \mu_2,\ n = 1,2,...,$$

$$y_j^{(\bar m,0)} = \frac{V_2^{(\bar m)}(x_j)}{V_1^{(\bar m)}(1)}\mu_1 + \frac{V_1^{(\bar m)}(x_j)}{V_1^{(\bar m)}(1)}\mu_2, \quad j = 0,1,...,N.$$

Для обчислення правої частини різницевої схеми (9) $\varphi^{(\bar m)}(x_j,u)$ у вузлах сітки розроблено рекурентний алгоритм, який застосуємо до розв'язування тестових прикладів.

II. Чисельні приклади

Приклад 1. Розглянемо крайову задачу

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{du}{dx}\right), \tag{10}$$

$$u(0) = 0,\ u(1) = arctg\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{5}{4}\right), \tag{11}$$

з точним розв'язком

$$u(x) = x\cdot arctg\left(\frac{1}{2}x\right) - \ln\left|1 + \frac{1}{4}x^2\right|.$$

Для чисельного розв'язання задачі (10)–(11) використаємо ТРС порядку точності $\bar m$ вигляду

$$\begin{gathered} y^{(\bar m)}_{\bar x\hat x,j} = -\varphi^{(\bar m)}\left(x_j, y^{(\bar m)}\right), \quad j = \overline{1, N-1}, \\ y_0^{(\bar m)} = \mu_1, \quad y_N^{(\bar m)} = \mu_2, \end{gathered} \tag{12}$$

де

$$\mu_1 = 0,\ \mu_2 = arctg\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{5}{4}\right),$$

$$\varphi^{(\bar m)}(x_j,u) =$$

$$\hbar_j^{-1}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^\alpha\left[l_\alpha^{(m)j}(x_j,u) + \frac{(-1)^\alpha}{h_{j-1+\alpha}} w_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u)\right],$$

$w_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u)$, $l_\alpha^{(m)j}(x_j,u)$– значення в точках сітки чисельного розв'язку (8) задач Коші

$$\begin{gathered} \frac{dw_\alpha^j(x,u)}{dx} = l_\alpha^j(x,u),\ \frac{dl_\alpha^j(x,u)}{dx} = \\ = \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{dY_\alpha^j}{dx}\right), x_{j-2+\alpha} < x < x_{j-1+\alpha}, \\ w_\alpha^j\left(x_{j+(-1)^\alpha}, u\right) = l_\alpha^j\left(x_{j+(-1)^\alpha}, u\right) = 0, \\ \alpha = 1,2, \quad j = 1,2,...,N-1. \end{gathered} \tag{13}$$

Коефіцієнти ряду Тейлора (8) можна знайти послідовним диференціюванням (13), використовуючи засоби комп'ютерної алгебри (наприклад, Maple) або за допомогою рекурентного обчислення коефіцієнтів ряду Тейлора [4].

Враховуючи, що

$$\frac{dY_\alpha^j}{dx} = y_{\bar x,j-1+\alpha} + l_\alpha^j\left(x, y^{(\bar m)}\right) + \frac{(-1)^\alpha}{h_{j-1+\alpha}} w_\alpha^j\left(x_j, y^{(\bar m)}\right),$$

на основі (13) побудуємо алгоритм рекурентного обчислення коефіцієнтів ряду Тейлора

$$\frac{1}{p!}\frac{d^p w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u, b_\alpha)}{dx^p},$$

$$\frac{1}{p!}\frac{d^p l_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u, b_\alpha)}{dx^p}, \quad p = 1,2...$$

Нехай

$$L_{p,\alpha} = \frac{1}{p!}\frac{d^p l_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u, b_\alpha)}{dx^p},$$

$$W_{p,\alpha} = \frac{1}{p!}\frac{d^p w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u, b_\alpha)}{dx^p},$$

$$F_p = \frac{1}{p!}\frac{d^p}{dx^p}\left[\frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{dY_\alpha^j}{dx}\right)\right]_{x=x_{j+(-1)^\alpha}},$$

тоді з (13) отримаємо $L_{p+1,\alpha} = \dfrac{1}{p+1}F_p$.

Функцію $\dfrac{1}{2}\cos^2\left(\dfrac{dY_\alpha^j}{dx}\right)$ розглядатимемо як послідовність елементарних функцій та алгебраїчних операцій вигляду

$$\frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{dY_\alpha^j}{dx}\right) = \frac{1}{2}rr,\ r = \cos\left(\frac{dY_\alpha^j}{dx}\right),\ s = \sin\left(\frac{dY_\alpha^j}{dx}\right),$$

тоді згідно з [4, с. 51–52] коефіцієнти рядів Тейлора матимуть такі зображення:

$$R_p = -\frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}(p-j)S_j L_{p-j,\alpha},$$

$$S_j = \frac{1}{j}\sum_{m=0}^{j-1}(j-m)R_m L_{j-m,\alpha},$$

$$F_p = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{p}R_j R_{p-j}, \quad p=1,2,..., \quad j=\overline{1,p-1},$$

$$R_0 = \cos\left(\frac{dY_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha})}{dx}\right),\ S_0 = \sin\left(\frac{dY_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha})}{dx}\right),$$

$$L_{1,\alpha} = \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{dY_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha})}{dx}\right).$$

Оскільки $L_{p,\alpha}$ та $W_{p,\alpha}$ залежать від параметрів $b_\alpha \equiv w_\alpha^j(x_j,u)$, які обчислюються згідно з (7), то алгоритм рекурентного обчислення коефіцієнтів ряду Тейлора матиме вигляд

$$b_\alpha^{(1)j} = 0, \quad \alpha = 1,2, \quad j=\overline{1,N-1},$$

$$R_0\left(b_\alpha^{(1)j}\right) = \cos\left(y_{\bar{x},j-1+\alpha}\right),$$

$$S_0\left(b_\alpha^{(1)j}\right) = \sin\left(y_{\bar{x},j-1+\alpha}\right),$$

$$L_{1,\alpha}\left(b_\alpha^{(1)j}\right) = \frac{1}{2}\cos^2\left(y_{\bar{x},j-1+\alpha}\right),$$

$$b_\alpha^{(i)j} = \sum_{s=2}^{i}\frac{1}{s}\left[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right]^s L_{s-1,\alpha}\left(b_\alpha^{(i-1)j}\right),$$

$$i=\overline{2,5},$$

$$R_0\left(b_\alpha^{(i)j}\right) = \cos\left(y_{\bar{x},j-1+\alpha} + \frac{(-1)^\alpha b_\alpha^{(i)j}}{h_{j-1+\alpha}}\right),$$

$$S_0\left(b_\alpha^{(i)j}\right) = \sin\left(y_{\bar{x},j-1+\alpha} + \frac{(-1)^\alpha b_\alpha^{(i)j}}{h_{j-1+\alpha}}\right),$$

$$L_{p+1,\alpha}\left(b_\alpha^{(i)j}\right) = \frac{1}{2(p+1)}\sum_{z=0}^{p}R_z\left(b_\alpha^{(i)j}\right)R_{p-z}\left(b_\alpha^{(i)j}\right),$$

$$p=\overline{1,i-1},$$

$$R_1\left(b_\alpha^{(i)j}\right) = -S_0\left(b_\alpha^{(i)j}\right)\ L_{1,\alpha}\left(b_\alpha^{(i)j}\right),$$

$$R_p\left(b_\alpha^{(i)j}\right) = -S_0\left(b_\alpha^{(i)j}\right)\ L_{p,\alpha}\left(b_\alpha^{(i)j}\right) -$$

$$-\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1}(p-k)\ L_{p-k,\alpha}\left(b_\alpha^{(i)j}\right)\times$$

$$\times\left[\frac{1}{k}\sum_{m=0}^{k-1}(k-m)R_m\left(b_\alpha^{(i)j}\right)\ L_{k-m,\alpha}\left(b_\alpha^{(i)j}\right)\right],$$

$$p=\overline{2,i-1},$$

$$W_{p,\alpha}\left(b_\alpha^{(i)j}\right) = \frac{1}{p}L_{p-1,\alpha}\left(b_\alpha^{(i)j}\right), \quad p=\overline{2,i+1}.$$

Для знаходження розв'язку нелінійної різницевої схеми (12) використовували метод послідовних наближень

$$\begin{gathered} y_{\bar{x}\hat{x}}^{(\bar{m},n)} = -\varphi^{(\bar{m})}\left(x, y^{(\bar{m},n-1)}\right),\ x\in\hat{\omega}_h, \\ y^{(\bar{m},n)}(0)=\mu_1,\ y^{(\bar{m},n)}(1)=\mu_2, \\ n=1,2,..., \\ y^{(\bar{m},0)}(x) = (1-x)\mu_1 + x\mu_2,\ x\in\hat{\omega}_h. \end{gathered} \tag{14}$$

Для розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь (14) застосовували метод прогонки.

Результати розрахунків для методу 6-го ($m=5$) порядку точності на рівномірній сітці $\omega_h = \left\{x_i = ih,\ i=1,2,...,N-1,\ h=\frac{1}{N}\right\}$ наведені в табл. 1.

Для практичної оцінки швидкості збіжності використовувались величини

$$er = \left\|z^{(6)}\right\|_{1,2,\omega_h}^{*} = \left\|y^{(6)}-u\right\|_{1,2,\omega_h}^{*},$$

$$p = \log_2\frac{\left\|z^{(6)}\right\|_{1,2,\omega_h}^{*}}{\left\|z^{(6)}\right\|_{1,2,\omega_{h/2}}^{*}}.$$

Таблиця 1

Результати, отримані методом 6-го порядку точності

N	er	p
8	.5765E-08	
16	.1078E-09	.57E+01
32	.1825E-11	.59E+01
64	.2899E-13	.60E+01

Застосувавши наведений алгоритм для методу 8-го ($m=7$) порядку точності, отримаємо результати, наведені в табл. 2.

Таблиця 2

Результати, отримані методом 8-го порядку точності

N	er	p
10	.3433E-11	
20	.1371E-13	.80E+01

Отже, результати розрахунків (див. табл. 1 і табл. 2) повністю підтверджують теоретичні висновки стосовно порядків точності відповідних методів.

Приклад 2. Розглянемо тест Трьоша [5]

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \lambda sh(\lambda u),\ u(0) = 0,\ u(1) = 1, \tag{15}$$

і застосуємо для його чисельного розв'язування різницеву схему (12), (7–9) з $f(x,u) \equiv -\lambda sh(\lambda u),\ \mu_1{=}0,\ \mu_2 = 1$.

Врахуємо, що

$$\left.\frac{d^p l_\alpha^j(x,u,b_\alpha)}{dx^p}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}} = \left.\frac{d^{p+1} w_\alpha^j(x,u,b_\alpha)}{dx^{p+1}}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}},$$

а функції $w_\alpha^j(x,u),\ \alpha = 1,2$ є розв'язками задач Коші

$$\frac{d^2 w_\alpha^j(x,u,b_\alpha)}{dx^2} = \lambda sh\left\{\lambda[\hat{u}(x) + w_\alpha^j(x,u) + (-1)^\alpha(x - x_{j+(-1)^\alpha})b_\alpha/h_{j-1+\alpha}]\right\}, \tag{16}$$

$$x \in [x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}],$$

$$w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u) = 0,\ \frac{dw_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u)}{dx} = 0,\ \alpha = 1,2,$$

де

$$\hat{u}(x) = (u_j(x - x_{j-1}) + u_{j-1}(x_j - x))/h_j,$$

$$x \in [x_{j-1}, x_j].$$

Опишемо рекурентний алгоритм обчислення $\varphi^{(\bar{m})}(x,y^{(\bar{m})})$для задачі Трьоша (15). Введемо позначення $w_{\alpha,p}(u,b_\alpha) = \frac{1}{p!}\left.\frac{d^p w_\alpha^j(x,u,b_\alpha)}{dx^p}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}$, тоді

$$\frac{1}{p!}\left.\frac{d^p l_\alpha^j(x,u,b_\alpha)}{dx^p}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{p!}\left.\frac{d^{p+1} w_\alpha^j(x,u,b_\alpha)}{dx^{p+1}}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}} = (p{+}1)w_{\alpha,p+1}(u,b_\alpha).$$

Отже, достатньо знайти коефіцієнти Тейлора $w_{\alpha,p}(u,b_\alpha)$. Функції $w_\alpha^j(x,u),\ \alpha = 1,2$ є розв'язками задач Коші (16).

Нехай

$$r_\alpha(x,u,b_\alpha) =$$

$$sh\{\lambda[\hat{u}(x){+}w_\alpha^j(x,u){+}(-1)^\alpha(x{-}x_{j+(-1)^\alpha})b_\alpha/h_{j-1+\alpha}]\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}[(-1)^{\alpha+1}(x - x_{j+(-1)^\alpha})]^i R_{\alpha,i}(u,b_\alpha).$$

Тоді після підстановки цього ряду в диференціальне рівняння (15) одержимо

$$w_{\alpha,i+2}(u,b_\alpha) = \frac{\lambda R_{\alpha,i}(u,b_\alpha)}{(i+1)(i+2)}.$$

Позначаючи

$$p_\alpha(x,\ u,b_\alpha) =$$

$$= \lambda[\hat{u}(x){+}w_\alpha^j(x,u){+}(-1)^\alpha(x{-}x_{j+(-1)^\alpha})b_\alpha/h_{j-1+\alpha}] =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}[(-1)^{\alpha+1}(x - x_{j+(-1)^\alpha})]^i P_{\alpha,i}(\ u,b_\alpha),$$

будемо мати

$$r_\alpha(x,u,b_\alpha) = sh\{p_\alpha(x,u,b_\alpha)\},$$

$$s_\alpha(x,u,b_\alpha) = ch\{p_\alpha(x,u,b_\alpha)\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}[(-1)^{\alpha+1}(x - x_{j+(-1)^\alpha})]^i S_{\alpha,i}(u,b_\alpha).$$

Оскільки $r'_\alpha = ch\{p_\alpha\}p'_\alpha = p'_\alpha s_\alpha,\ s'_\alpha = sh\{p_\alpha\}p'_\alpha = p'_\alpha r_\alpha$, то застосуємо формули (8.20в) з [4], тоді одержимо рекурентні співвідношення

$$R_{\alpha,i}(u,b_\alpha) = \tfrac{1}{i}\sum_{k=0}^{i-1}(i-k)S_{\alpha,k}(u,b_\alpha)P_{\alpha,i-k}(u,b_\alpha),$$

$$S_{\alpha,i}(u,b_\alpha) = \tfrac{1}{i}\sum_{k=0}^{i-1}(i-k)R_{\alpha,k}(u,b_\alpha)P_{\alpha,i-k}(u,b_\alpha),$$

$$i = 1,2,...,$$

$$P_{\alpha,i}(u,b_\alpha) = \lambda w_{\alpha,i},\quad i = 2,3,...,\quad \alpha = 1,2,$$

з початковими умовами

$$P_{\alpha,0}(u,b_\alpha) = \lambda u_{j+(-1)^\alpha},$$

$$P_{\alpha,1}(u,b_\alpha) = \lambda[u_{\bar{x},j-1+\alpha} + (-1)^\alpha b_\alpha/h_{j-1+\alpha}],$$

$$R_{\alpha,0}(u,b_\alpha) = sh(\lambda u_{j+(-1)^\alpha}),$$

$$S_{\alpha,0}(u,b_\alpha) = ch(\lambda u_{j+(-1)^\alpha}).$$

Для знаходження розв'язку різницевої схеми використаємо ітераційний метод Ньютона

$$\nabla y_{\bar{x}\hat{x}}^{(\bar{m},n)} + \frac{\partial\varphi^{(\bar{m})}(x,y^{(\bar{m},n-1)})}{\partial u}\nabla y^{(\bar{m},n)} =$$

$$= -\varphi^{(\bar{m})}(x,y^{(\bar{m},n-1)}) - y_{\bar{x}\hat{x}}^{(\bar{m},n-1)},\ x \in \hat{\omega}_h,$$

$$\nabla y^{(\bar{m},n)}(0) = 0,\ \nabla y^{(\bar{m},n)}(1) = 0,\ n = 1,2,...,$$

$$y^{(\bar{m},0)}(x) = (1-x)\mu_1 + x\mu_2,\ x \in \hat{\bar{\omega}}_h,$$

$$y^{(\bar{m},n)} = y^{(\bar{m},n-1)} + \nabla y^{(\bar{m},n)},\quad x \in \hat{\bar{\omega}}_h,\ n = 1,2,...$$

Обчислимо частинну похідну

$$\frac{\partial \varphi^{(\bar m)}(x_j,u)}{\partial u}=$$

$$=\hbar_j^{-1}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^\alpha\left[l_{\alpha,u}^{(m)}(x_j,u)+(-1)^\alpha\frac{w_{\alpha,u}^{(\bar m)}(x_j,u)}{h_{j-1+\alpha}}\right],$$

де

$$l_{\alpha,u}^{(m)}(x_j,u)=\frac{\partial l_\alpha^{(m)j}(x_j,u)}{\partial u}=$$

$$=\sum_{p=2}^{m}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^p}{p!}(p+1)w_{\alpha,p,u}(u,b_\alpha),$$

$$w_{\alpha,u}^{(\bar m)}(x_j,u)=\frac{\partial w_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u)}{\partial u}=$$

$$-\frac{h_{j-1+\alpha}^2}{2}\lambda^2 ch(\lambda u_{j+(-1)^\alpha})+$$

$$+\sum_{p=3}^{\bar m}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^p}{p!}w_{\alpha,p,u}(u,b_\alpha),$$

$$w_{\alpha,p,u}(u,b_\alpha)=\frac{\partial w_{\alpha,p}(x_j,u,b_\alpha)}{\partial u}$$

Оскільки функції $w_{\alpha,u}(x,u),\ \alpha=1,2$ задовольняють диференціальне рівняння

$$\frac{d^2w_{\alpha,u}(x,u)}{dx^2}=\lambda^2 ch[p_\alpha(x,u,b_\alpha)](1+w_{\alpha,u}(x,u)),$$

$$\alpha=1,2,$$

то для обчислення $w_{\alpha,p,u}(u,b_\alpha),\ \alpha=1,2$ отримаємо рекурентний алгоритм

$$w_{\alpha,i+2,u}(u,b_\alpha)=\frac{\lambda^2}{(i+1)(i+2)}\times$$

$$\times\left[S_{\alpha,i}(u,b_\alpha)+\sum_{k=2}^{i}w_{\alpha,k,u}(u,b_\alpha)S_{\alpha,i-k}(u,b_\alpha)\right],$$

$$i=2,3,...,$$

$$w_{\alpha,2,u}(u,b_\alpha)=\lambda^2S_{\alpha,0}(u,b_\alpha)/2,$$

$$w_{\alpha,3,u}(u,b_\alpha)=\lambda^2S_{\alpha,1}(u,b_\alpha)/6,\quad \alpha=1,2$$

Враховуючи поведінку розв'язку теста Трьоша використаємо квазірівномірну сітку (див. [6, с.79]), яка згущується біля правого кінця інтервалу $[0,1]$:

$$\hat\omega_h=\left\{x_j=\frac{\exp(j\alpha/N)-1}{\exp(\alpha)-1},\ j=0,1,...,N\right\},\qquad (17)$$

де параметр $\alpha<0$. Кроки такої сітки можна обчислити за формулами $h_1=x_1,\ h_{j+1}=h_j\exp(\alpha/N),\ j=1,2,...,N-1$. Зауважимо, що при $j\to N$ та великих $|\alpha|$ (наприклад, $\alpha=-26$) використання формули $h_j=x_j-x_{j-1},\ j=1,2,...,N$ призведе до великих абсолютних похибок заокруглень, тому що x_{j-1},x_j лежать близько один від одного.

Для практичної оцінки точності застосуємо правило Рунге (екстраполяцію Річардсона), тобто, якщо виконується умова

$$\max\left\{\left\|\frac{y_N^{(\bar m)}-y_{2N}^{(\bar m)}}{\max\left(\left|y_{2N}^{(\bar m)}\right|,1\right)}\right\|_{0,\infty,\hat\omega_h},\right.$$

$$\left.\left\|\frac{\frac{dy_N^{(\bar m)}}{dx}-\frac{dy_{2N}^{(\bar m)}}{dx}}{\max\left(\left|\frac{dy_{2N}^{(\bar m)}}{dx}\right|,1\right)}\right\|_{0,\infty,\hat\omega_h}\right\}\le(2^{\bar m}-1)\varepsilon,$$

то точність ε, з якою необхідно розв'язати задачу, вважали досягнутою, інакше потрібно збільшувати кількість точок сітки N в два рази. Тут $y_N^{(\bar m)}$– розв'язок різницевої схеми порядку точності $\bar m$ на сітці $\{x_0,x_1,...,x_N\}$, а $y_{2N}^{(\bar m)}$ – розв'язок різницевої схеми порядку точності $\bar m$ на сітці $\{x_0,x_1,...,x_{2N}\}$. Якщо точність досягнута, то можна уточнити розв'язок $y_{2N}^{(\bar m)}$, використовуючи екстраполяцію Річардсона

$$\hat y_N^{(\bar m)}(x_j)=y_N^{(\bar m)}(x_j)+\frac{y_N^{(\bar m)}(x_j)-y_{2N}^{(\bar m)}(x_{2j})}{2^{\bar m}-1},$$

$$j=1,2,...,N-1.$$

Ітерації в методі Ньютона припинялися, якщо

$$\max\left\{\left\|\frac{y^{(\bar m,n)}-y^{(\bar m,n-1)}}{\max\left(\left|y^{(\bar m,n)}\right|,1\right)}\right\|_{0,\infty,\hat\omega_h},\right.$$

$$\left.\left\|\frac{\frac{dy^{(\bar m,n)}}{dx}-\frac{dy^{(\bar m,n-1)}}{dx}}{\max\left(\left|\frac{dy^{(\bar m,n)}}{dx}\right|,1\right)}\right\|_{0,\infty,\hat\omega_h}\right\}\le 0.25\varepsilon$$

де $n=1,2,...,10$ – номер ітерації. Прийнявши $u'(0)$=s, одержимо точний розв'язок теста Трьоша (див., напр., [7, с. 556]) вигляду

$$u(x,s)=\frac{2}{\lambda}arcsh\left(\frac{s\cdot sh(\lambda x,k)}{2\cdot ch(\lambda x,k)}\right),\quad k=1-\frac{s^2}{4},$$

де $sn(\lambda x,k),\ cn(\lambda x,k)$–еліптичні функції Якобі, а параметр s визначається з рівняння

$$\frac{2}{\lambda}arcsh\left(\frac{s\cdot sh(\lambda x,k)}{2\cdot ch(\lambda x,k)}\right)=1.$$

Для $\lambda=5$ параметр $s=0,457504614063\cdot10^{-1}$, а при $\lambda=10$, $s=0{,}35833778463\ \cdot10^{-3}$. Результати чисельного розв'язування задачі (15) на сітці (17) з

$\alpha = -10$ різницевою схемою 6-го порядку ($m = 5$) точності наведені в табл.3, де

$$Error = \max\left\{\left\|\frac{y^{(\bar m)} - u}{\max\left(\left|y^{(\bar m)}\right|, 1\right)}\right\|_{0,\infty,\hat\omega_h},\right.$$

$$\left.\left\|\frac{\frac{dy^{(\bar m)}}{dx} - \frac{du}{dx}}{\max\left(\left|\frac{dy^{(\bar m)}}{dx}\right|, 1\right)}\right\|_{0,\infty,\hat\omega_h}\right\}.$$

Проводився також розрахунок для λ від 10 до 62 з кроком $\Delta\lambda = 1$, причому результат розрахунку одного варіанта брали за початкове наближення для наступного. Параметр сітки α вибирали $\alpha = -26$. Тоді обчислений точний розв'язок на сітці (17) і значення параметра $s = 0.2577072228793720338185 \cdot 10^{-25}$ задовольняє умову $|u(1,s) - 1| < 0,17 \cdot 10^{-10}$. Для $\lambda = 61$ результати наведені в табл.4.

Таблиця 3

Похибка при $m = 5,\ \lambda \le 10$

λ	ε	N	$Error$
5	10^{-2}	32	$0,591{\cdot}10^{-4}$
5	10^{-4}	32	$0,739{\cdot}10^{-5}$
5	10^{-6}	64	$0,347{\cdot}10^{-7}$
10	10^{-2}	32	$0,489{\cdot}10^{-2}$
10	10^{-4}	64	$0,356{\cdot}10^{-6}$
10	10^{-6}	128	$0,955{\cdot}10^{-9}$

Таблиця 4

Похибка при $m = 5,\ \lambda = 61$

λ	ε	N	$Error$
61	10^{-2}	81920	$0,219 \cdot 10^{-2}$
61	10^{-4}	131072	$0,232 \cdot 10^{-4}$
61	10^{-6}	327680	$0,269 \cdot 10^{-7}$

Література

[1] Гнатів Л.Б., Кутнів М.В., Чухрай А.І. Узагальнені триточкові різницеві схеми високого порядку точності для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 4. – С. 59–69.

[2] Гнатів Л.Б., Кутнів М.В. Модифіковані триточкові різницеві схеми високого порядку точності для монотонних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з похідною у правій частині // Доп. НАН України. – 2004. – № 2. – С. 23–29.

[3] Gnativ L. B., Kutniv M. V. Modified of three-point difference schemes of high-accuracy order for second order monotone ordinary differential equations with derivative in right-hand side // Журнал обчисл. прикл. матем. – 2003. – Вип. 1, – С. 43–65.

[4] Э. Хайрер, С. Нерсетт, Г. Ваннер. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.

[5] Troesch B. A. A simple approach to a sensitive two-point boundary value problem // Journal of Computational Physics. – 1976. – Vol. 21, № 3. – С. 279–290.

[6] Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

[7] Stoer J., Bulirsch R. Introduction to Numerical Analysis. – New York, Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2002.

ОДИН ПОДХОД К РЕАЛИЗАЦИИ ТРЕХТОЧЕЧНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

Л.Б. Гнатив[a], М.В. Кутнив[a], М.М. Круль[b]

[a] *Национальный университет “Львівська політехніка”,*
ул. С. Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина
[b] *Жешовская политехника*
ул. Повстанцев Варшавы 8, 35-959, Жешов, Польша

В статье предложен новый подход к реализации трехточечных разностных схем, основанный на использовании одношагового метода рядов Тейлора для численного решения вспомогательных задач Коши и построению рекуррентных алгоритмов для вычисления производных.

Ключевые слова: нелинейная краевая задача, трехточечная разностная схема, рекуррентный алгоритм, итерационный метод последовательных приближений.

2000 MSC: 65L10; 65L12

УДК: 519.6

ONE APPROACH TO THREE-POINT DIFFERENCE SCHEMES OF HIGH-ORDER ACCURACY

L.B. Gnativ[a], M.V. Kutniv[a], M.M. Krul[b]

[a] *National University "Lvivska Politechnika"*
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine
[b] *Rzeszow University of Technology"*
8 Powstancow Warszawy str., 35-959, Rzeszow, Polska

This article proposes a new approach to the implementation of three-point difference schemes based on a one-use method of Taylor series for the numerical solution of auxiliary Cauchy problems and build recurrent algorithms for calculating derivatives.

Keywords: nonlinear boundary value problem, three-point difference scheme, recurrent algorithm, iterative method of successive approximations.

2000 MSC: 65L10; 65L12

УДК: 519.6