

ПОБУДОВА ПОКРАЩЕНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПОВЕДІНКИ НАТОВПУ, ЩО ПАНІКУЄ, ПІД ЧАС ВТЕЧІ З ПРИМІЩЕННЯ

Я. Андрусик^a, П. Черняк^a, А. Андрусик^b

^a Національний університет “Львівська політехніка”
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

^b Інститут фізики конденсованих систем НАН України
вул. Свенціцького, 1, 79011, Львів, Україна

(Отримано 7 жовтня 2010 р.)

Побудована покращена математична модель поведінки натовпу, що панікує, на основі методів фізики складних систем. Сформульована модель дозволить розробити рекомендації організаторам масових заходів та архітекторам і будівельникам під час проектування та будівництва громадських будівель та споруд.

Ключові слова: складні системи, натовп, що панікує, модель поведінки.

2000 MSC: 91F99

УДК: 519.711.8

I. Актуальність досліджень

Часто, в місцях скупчення великої кількості людей, через ті чи інші причини їхня поведінка перетворюється в некерований процес, який за своїм станом називають панікою. Тому колектив людей, охоплених панікою, по своїй суті перестає бути колективом, втрачає його ознаки, стає натовпом, поведінка якого ґрунтується на почутті страху та інстинкті самозбереження. У мирний час паніка може виникати під час масових заходів (свята, похорони, музичні події, спортивні заходи), в результаті розгону демонстрацій та мітингів, релігійного паломництва, у разі виникнення пожежі в переповнених приміщеннях тощо.

Під час руху натовпу в стані паніки виникає тиснява. На деяких ділянках рухомого потоку може виникати великий тиск, який здатний призвести до смертельних наслідків або до важких травм. Травмувальним фактором для учасників паніки можуть виступати також різноманітні перешкоди, що заважають вільному переміщенню людей.

З історії відомо багато прикладів того, до яких людських трагедій може призвести паніка натовпу. Так, наприклад, одна з найвідоміших тисняв, яка відзначена в літописі, відбулась в 1887р., коли у Великобританії відзначалось 50-річчя вступу на трон королеви Вікторії. Тоді загинуло близько 4000 людей. За аналогічних обставин під час народних гулянь у Москві (1896р.) в дні коронації Миколи II загинуло 1389 людей і близько 1300 було покалічено.

Велика кількість загиблих була зафіксована у 1990р. в м. Мекка (Саудівська Аравія) під час хаджу — 1425 людей. Напевно у багатьох збереглась в пам'яті тиснява на станції метро в Мінську (Білорусія, 1999р.) коли загинуло 53 особи, або "армагедон" в кінотеатрі м. Червоноград, Львівської області.

На превеликий жаль, в ЗМІ і надалі продовжу-

ють надходити повідомлення про загибель та каліцтва людей, отримані в тисняві під час паніки, що не змогло залишитися поза увагою дослідників з різних галузей знань (психологів, соціологів, математиків, фізиків, механіків). Вони пробують математично описати людську панічну масу, щоб виробити рекомендації, які дадуть змогу запобігти трагедіям або зменшати кількість жертв.

Оскільки відомі моделі поведінки натовпу, який панікує, ще далекі від своєї досконалості, тому пошуки способів їх вдосконалення є актуальною задачею.

II. Аналіз останніх досліджень та публікацій

Відомо багато різних підходів у побудові моделей поведінки скупчення людей. Так, у роботі [1] сформульована і досліджується математична модель колективної поведінки у людському суспільстві. Але результати цієї роботи більше підходять для прогнозування відносин у колективі або ж психологічного впливу на людські індивідууми.

У деяких випадках, для дослідження напрямленого потоку сильного скупчення людей, використовують математичні моделі, побудовані на основі механіки суспільного середовища (газодинаміки, гідродинаміки) [2, 3]. Проте вони більше придатні для опису людських потоків великої густини. В ідеальному випадку до рівнянь таких моделей повинні прямувати рівняння руху людських потоків, побудовані на основі методів фізики складних систем [4, 5].

III. Формування мети досліджень

Автори статті здійснили спробу провести своє дослідження поведінки натовпу, який панікує і намага-

ється покинути приміщення, використовуючи закони механіки для систем, що складаються з великої кількості об'єктів. За основу дослідження було взято підхід, висвітлений в роботах [4, 5]. Для поставленої задачі вдалося адекватніше спрогнозувати поведінку натовпу в стані паніки, ніж це було отримано в роботах [4, 5, 6, 7]. Також було знайдено деякі особливості у побудові алгоритмів числового розрахунку, які не містяться в цих публікаціях. Тому автори статті прагнуть детально показати побудову та обґрунтування визначальних рівнянь, щоб у майбутньому у користувачів такою моделлю були готові аналітичні співвідношення для проведення відповідних досліджень.

IV. Постановка задачі та викладення основного матеріалу

Розглянемо прямокутне приміщення розмірами $L = 25$ м, $h = 10$ м. Двері шириною b розташовані так, як показано на рис. 1. Відповідно введемо для цього приміщення осі координат XOY . До початку паніки в залі перебуває N людей, швидкості яких приймемо такими, що дорівнюють нулю. Розміщення всіх людей при $t = 0$ і коли $N = 88$ показано на рис. 1 кружками.

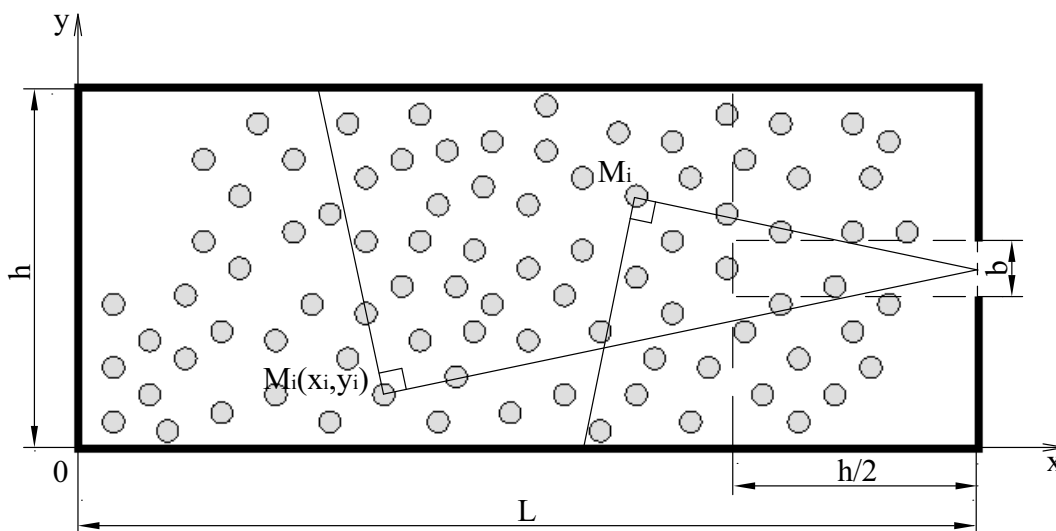


Рис. 1. Початкове розташування людей у приміщенні

Кожен з цих кружків зображає людину з певним номером та координатами, що відповідають координатам центра кружка. Згідно з [4, 5, 6, 7] в цій моделі людей заміняємо вертикальними суцільними однорідними циліндрами діаметром $d = 0.6$ м. У момент виникнення паніки (раптово загорілося електрообладнання) всі люди кидаються до виходу. Охоплений панікою натовп втрачає ознаки цивілізованого колективу і тому його поведінку в такому стані можна описати законами механіки.

Припустимо, що всі люди мають однакову масу $m = 80$ кг. Виберемо людину під номером 'i', для якої запишемо основне рівняння динаміки у вигляді

$$m \frac{\Delta \vec{V}[i]}{\Delta t} = \vec{F}_{zm}[i] + \vec{F}_r[i] + \vec{F}_{vdst}[i] + \vec{F}_{pr}[i] + \vec{F}_{prst}[i] + \vec{F}_{tr}[i] + \vec{F}_{trr}[i] + \vec{F}_{op}[i] \quad (1)$$

Очевидно кількість таких рівнянь відповідає кількості учасників паніки. Проаналізуємо записану систему рівнянь (1).

У цій системі:

$\Delta \vec{V}[i]$ — зміна швидкості i -ї людини за проміжок часу Δt в результаті дії сил, що перебувають у правій частині рівнянь;

$\vec{F}_{zm}[i]$ — це тяглова сила (рушійна сила), тобто сила, яка виникає від взаємодії i -ї людини з поверхнею землі. Вона прямує до виходу в бік найближчих дверей. Згідно з рекомендаціями [4] запишемо її у вигляді такого співвідношення:

$$\vec{F}_{zm}[i] = m \frac{\vec{V}_0[i] - \vec{V}[i]}{\tau}, \quad (2)$$

тут $\vec{V}[i]$ — швидкість i -ї людини, $\vec{V}_0[i]$ — бажана швидкість для людини, з якою вона прагне вийти з приміщення. Ця швидкість може слугувати мірою паніки в натовпі. Вона завжди спрямована до дверей. Прийmemo, що модуль цієї швидкості для всіх людей однаковий: $|\vec{V}_0[i]| = u_0, (i = \overline{1, N})$.

τ — коефіцієнт пропорційності, що має розмірність часу. Його величину можна оцінити з таких міркувань. Оскільки максимальне значення рушійної

сили не може перевищувати максимальної величини, сили тертя ковзання людини по опорній поверхні, тобто $\vec{F}_{zm}[i]_{\max} \leq F_{T \max} = f \cdot mg$, де f — коефіцієнт тертя ковзання, тому з рівняння імпульсів за час τ^* отримуємо

$$\tau^* = \frac{u_0}{gf}.$$

Якщо врахувати, що коефіцієнт тертя між шкірою і деревом або гумою і деревом $f \approx 0.55$ [8], то при $u_0 = 1.5$ маємо $\tau^* \approx 0.28$. Оскільки реально сила тертя не досягає максимального значення, тому приймемо $\tau = 0.45$ с.

Для числового розв'язування системи рівнянь (1) необхідно записати їх в проекціях на осі координат, тому рівняння (2) в проекціях набуває вигляду:

$$F_{zmx}[i] = m \frac{u_{0x}[i] - V_x[i]}{\tau}, F_{zmy}[i] = m \frac{u_{0y}[i] - V_y[i]}{\tau}. \quad (3)$$

Пояснимо другий доданок правої частини рівнянь (1). Досвід показує, що в умовах паніки людина намагається не наблизитися впритул одна до одної, до стінок та інших перешкод. Це небажання еквівалентне появі своєрідної “психологічної сили відштовхування”. Слідуючи [4], покажемо цю силу та вираз для її обчислення, коли вона діє на i -ту людину з боку j -ї людини (рис. 2).

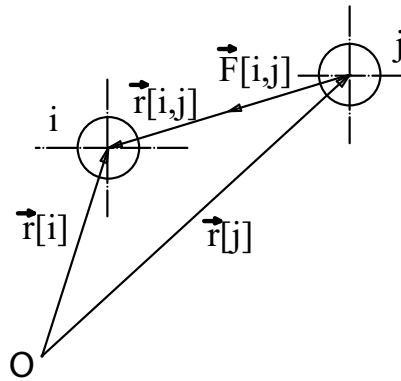


Рис. 2. “Психологічна сила відштовхування”, що виникає між двома людьми

Для її підрахунку запишемо радіус-вектор між i -ю та j -ю людьми (рис. 2):

$$\vec{r}[i, j] = \vec{r}[i] - \vec{r}[j]. \quad (4)$$

Очевидно, що $\vec{F}[i, j]$ напрямлена вздовж $\vec{r}[i, j]$. Згідно з [4], для $\vec{F}[i, j]$ маємо:

$$\vec{F}[i, j] = A \frac{\vec{r}[i, j]}{r[i, j]} e^{-\frac{r[i, j]-d}{B}}, \quad (5)$$

де A та B постійні величини; $r[i, j]$ — модуль вектора $\vec{r}[i, j]$, який через координати взаємодіючих людей визначається так:

$$r[i, j] = |\vec{r}[i] - \vec{r}[j]| = \sqrt{(x[i] - x[j])^2 + (y[i] - y[j])^2} \quad (6)$$

Отже, сила відштовхування $\vec{F}[i, j]$ в проекціях на осі координат запишеться у вигляді:

$$F_x[i, j] = A \frac{x[i] - x[j]}{r[i, j]} e^{-\frac{r[i, j]-d}{B}}, \quad (7)$$

$$F_y[i, j] = A \frac{y[i] - y[j]}{r[i, j]} e^{-\frac{r[i, j]-d}{B}}.$$

Маючи вирази для знаходження сил “психологічного відштовхування” (5) або (7), знайдемо рівнодійну цих сил, що діють на i -ту людину з боку всіх інших. Отримаємо:

$$\vec{F}_r[i] = \sum_{j=1(i \neq j)}^{N^*} \vec{F}[i, j], \quad (8)$$

або в проекціях на осі координат:

$$F_{rx}[i] = \sum_{j=1(i \neq j)}^{N^*} F_x[i, j], F_{ry}[i] = \sum_{j=1(i \neq j)}^{N^*} F_y[i, j], \quad (9)$$

де N^* — кількість людей, які вносять свій психологічний вплив у вигляді сили (5) на i -ту людину.

У цьому місці полягає одна з відмінностей у підході авторів цієї статті і інших моделей, які базуються на [4, 5]. Враховується, що дія сили (5) проявляється з боку тих людей, які потрапили в поле зору i -ї людини. Тому зважаючи на можливість поглядати по сторонах, в поле зору i -ї людини попадають ті втікачі, які лежать по один бік від прямої, що проходить через центр i -ї людини перпендикулярно до лінії, проведеної через середину вихідних дверей і середину цієї людини (див. рис. 1). Математично цю умову запишемо так:

$$\begin{aligned} &\text{якщо } \left\{ y[i] < \frac{h}{2} \text{ і } y[j] - y[i] \geq \frac{L - x[i]}{y[i] - h/2} (x[j] - x[i]) \right\} \\ &\text{або } \left\{ y[i] > \frac{h}{2} \text{ і } y[j] - y[i] \leq \frac{L - x[i]}{y[i] - h/2} (x[j] - x[i]) \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{або } \left\{ y[i] = \frac{h}{2} \text{ і } x[j] \geq x[i] \right\}.$$

Таке доповнення разом з іншими, дозволило вренгі-решт підібрати такі коефіцієнти: $A = 400$ Н, $B = 0.085$ м. Їх величини, на думку авторів статті, є виправданіші, ніж ті, що запропоновані в [4]. Більшу реальність прийнятих значень сталих можна обґрунтувати з таких міркувань: згідно з формулою (5) “психологічна сила” відштовхування в момент дотику людей дорівнює 400 Н і при взаємному віддаленні на кожні 8.5 см зменшується в e разів. Водночас в рівнянні (1), вона є реально діючою силою тертя опорної поверхні. Тому для коефіцієнта тертя $f \approx 0.55$ і людини масою $m = 80$ кг не може перевищувати 430 Н, що в цій моделі виконується. Очевидно прийняте значення $= 2000$ Н в [4] та інших моделях, що ґрунтуються на такому підході, є явно завищене.

Розглянемо зміст наступного (третього) доданка в рівняннях (1). Цей доданок позначається як $\vec{F}_{vdst}[i]$ і характеризує “психологічну силу” відштовхування i -ї

людини від найближчої ділянки стіни або перешкоди напрямленої перпендикулярно до відповідних поверхонь. Очевидно ця сила має вигляд, аналогічний до (5), але залежно від координат i -ї людини визначається на основі відповідних співвідношень.

Так для поставленої задачі (рис. 1), для різних частин залу запишемо силу $\vec{F}_{vdst}[i]$ в проекціях на координатні осі:

$$\begin{aligned} &\text{якщо } \left\{ x[i] \leq L - \frac{h}{2} \text{ і } y[i] \leq \frac{h}{2} \right\} \\ &\text{тоді } F_{yvdst}[i] = Ae^{-\frac{y[i]-d/2}{B}} \\ &\text{якщо } \left\{ x[i] \leq L - \frac{h}{2} \text{ і } y[i] > \frac{h}{2} \right\} \\ &\text{тоді } F_{yvdst}[i] = -Ae^{-\frac{(h-y[i])-d/2}{B}} \end{aligned} \quad (11)$$

У разі, коли виникає сила відштовхування від кутів дверей, знайдемо відстані від них до людини, яка попадає в область приміщення коли (див. рис. 1):

$$\frac{h-b}{2} \leq y[i] \leq \frac{h+b}{2} \text{ і } L-h/2 < x[i] \leq L. \quad (12)$$

Для кожного з найближчих кутів маємо:

$$\begin{aligned} d_1[i] &= \sqrt{(L-x[i])^2 + \left(\frac{h-b}{2} - y[i]\right)^2}, \\ d_2[i] &= \sqrt{(L-x[i])^2 + \left(\frac{h+b}{2} - y[i]\right)^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Відповідно, для різних випадків положення людей біля дверей, проекції сили $\vec{F}_{vdst}[i]$ на осі координат запишуться так:

$$\begin{aligned} &\text{якщо } \left\{ \frac{h-b}{2} \leq y[i] \leq \frac{h}{2} \text{ і } L-h/2 < x[i] \leq L \right\} \\ &\text{тоді } F_{xvdst}[i] = \frac{x[i]-L}{d_1[i]} Ae^{-\frac{d_1[i]-d/2}{B}}, \\ &F_{yvdst}[i] = \frac{y[i]-h/2+b/2}{d_1[i]} Ae^{-\frac{d_1[i]-d/2}{B}}; \\ &\text{якщо } \left\{ \frac{h}{2} \leq y[i] \leq \frac{h+b}{2} \text{ і } L-h/2 < x[i] \leq L \right\} \\ &\text{тоді } F_{xvdst}[i] = \frac{x[i]-L}{d_2[i]} Ae^{-\frac{d_2[i]-d/2}{B}}, \\ &F_{yvdst}[i] = \frac{y[i]-h/2-b/2}{d_2[i]} Ae^{-\frac{d_2[i]-d/2}{B}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Аналогічно для тих частин залу, які не були

включені раніше, маємо:

$$\begin{aligned} &\text{якщо } \left\{ y[i] < \frac{h-b}{2} \right\} \\ &\text{і } L-h/2 < x[i] < L \text{ і } y[i] \leq L-x[i] \\ &\text{тоді } F_{yvdst}[i] = Ae^{-\frac{y[i]-d/2}{B}}, \\ &\text{якщо } \left\{ y[i] < \frac{h-b}{2} \right\} \\ &\text{і } L-h/2 < x[i] \leq L \text{ і } y[i] > L-x[i] \\ &\text{тоді } F_{xvdst}[i] = -Ae^{-\frac{(L-x[i])-d/2}{B}}, \\ &\text{якщо } \left\{ y[i] > \frac{h+b}{2} \right\} \\ &\text{і } L-h/2 < x[i] < L \text{ і } L-x[i] \geq h-y[i] \\ &\text{тоді } F_{yvdst}[i] = -Ae^{-\frac{(h-y[i])-d/2}{B}}, \\ &\text{якщо } \left\{ y[i] > \frac{h+b}{2} \right\} \\ &\text{і } L-h/2 < x[i] < L \text{ і } L-x[i] < h-y[i] \\ &\text{тоді } F_{xvdst}[i] = -Ae^{-\frac{(L-x[i])-d/2}{B}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Під час паніки, в результаті виникнення тисняви, виникають безпосередні зіткнення людей між собою, з перешкодами, стінками, дверною коробкою. Тому виникають відповідні сили пружної взаємодії та тертя. Оскільки люди змодельовані у вигляді вертикальних круглих циліндрів діаметром d , тому механічний їх контакт відбувається тоді, коли відстані між осями стають меншими за d . Для проведення числового розрахунку, математично цю умову запишемо так:

$$\begin{aligned} &\text{якщо } d - r[i, j] \geq 0 \text{ тоді } \Theta = 1; \\ &\text{якщо } d - r[i, j] < 0 \text{ тоді } \Theta = 0. \end{aligned}$$

Сили пружної взаємодії подамо у вигляді, аналогічному до закону Гука. Тому така сила, що діє на i -ту людину з боку j -ї людини в проекціях на осі координат, має такий вигляд:

$$\begin{aligned} F_{xpr}[i, j] &= k \frac{x[i] - x[j]}{r[i, j]} (d - r[i, j]) \Theta, \\ F_{ypr}[i, j] &= k \frac{y[i] - y[j]}{r[i, j]} (d - r[i, j]) \Theta, \end{aligned} \quad (16)$$

де k — коефіцієнт, пропорційний жорсткості людини в поперечному напрямку. У цій моделі $k = 50000$ Н/м, на відміну від $k = 120000$ Н/м, який використовувався у моделях, що ґрунтуються на роботі [4].

Якщо знайти векторну суму всіх сил пружної взаємодії, що діють на i -ту людину з боку всіх решти людей, котрі з нею контактують, то отримаємо рів-

нодійну цих сил $\vec{F}_{pr}[i]$. Або в проєкціях на осі координат запишемо:

$$F_{xpr}[i] = \sum_{j=1}^{N^{**}} F_{xpr}[i, j],$$

$$F_{ypr}[i] = \sum_{j=1}^{N^{**}} F_{ypr}[i, j],$$
(17)

де N^{**} — кількість людей, які зіштовхнулися з i -ю людиною. Аналогічно до формул (16) визначається сила пружної взаємодії i -ї людини $\vec{F}_{prst}[i]$ зі стінками або кутами вихідних дверей. Для різних ділянок зіткнення в проєкціях на осі координат маємо:

якщо $d/2 - y[i] > 0$ тоді $F_{yprst}[i] = k(d/2 - y[i])$,
 якщо $d/2 + y[i] - h > 0$ тоді $F_{yprst}[i] = -k(d/2 + y[i] - h)$,
 якщо $\left\{ d/2 + x[i] - L > 0 \text{ і } y[i] < \frac{h-b}{2} \right\}$ або $y[i] > \frac{h+b}{2}$
 тоді $F_{xprst}[i] = -k(d/2 + x[i] - L)$,
 якщо $d/2 - d_1[i] > 0$

тоді $F_{xprst}[i] = k(d/2 - d_1[i]) \frac{x[i] - L}{d_1[i]}$,
 $F_{yprst}[i] = k(d/2 - d_1[i]) \frac{y[i] - (h-b)/2}{d_1[i]}$,

якщо $d/2 - d_2[i] > 0$

тоді $F_{xprst}[i] = k(d/2 - d_2[i]) \frac{x[i] - L}{d_2[i]}$,
 $F_{yprst}[i] = k(d/2 - d_2[i]) \frac{y[i] - (h+b)/2}{d_2[i]}$.

(18)

Визначимо силу тертя, яка діє на i -ту людину під час її ковзання по j -й людині або перешкоді чи стіні. Ця сила залежить від величини деформації Δ у разі зіткнення та відносної швидкості ковзання $\vec{V}_{r\tau}[i]$. Сила тертя у разі зіткнення спрямована в протилежний бік вектора $\vec{V}_{r\tau}[i]$ і визначається за формулою

$$\vec{F}_{tr}[i] = -\mu \vec{V}_{r\tau}[i] \Delta, \quad (19)$$

де μ — коефіцієнт тертя. Для цієї моделі $\mu = 55000 \frac{\text{КГ}}{\text{М·С}}$.

Використовуючи (19), визначимо силу тертя під час зіткнення i -ї людини з різними “чужими” поверхнями. Найпростіший випадок, коли ковзання людини відбувається по плоскій стінці. У цьому випадку $\vec{V}_{r\tau}[i]$ виступає як складова вектора швидкості людини вздовж стінки, а Δ — визначається так як і у разі пружної взаємодії з стінкою (18). Тому проєкції сили $\vec{F}_{tr}[i]$ на осі координат визначають за формулами:

якщо $d/2 - y[i] \geq 0$ тоді $F_{xtr}[i] = \mu(y[i] - d/2)V_x[i]$,
 якщо $d/2 + y[i] - h \geq 0$ тоді $F_{xtr}[i] = \mu(h - y[i] - d/2)V_x[i]$,
 якщо $\left\{ y[i] \geq \frac{h+b}{2} \text{ або } y[i] \leq \frac{h-b}{2} \right\}$ і $d/2 + x[i] - L \geq 0$
 тоді $F_{ytr}[i] = \mu(L - d/2 - x[i])V_y[i]$.

(20)

Для визначення сили тертя ковзання під час зіткнення людини з боковою частиною дверного отвору, необхідно визначити одиничний вектор \vec{r} осі проведеної в площині контакту людини та кута дверей. Під час ковзання людини по куту з координатами $x_1 = L$ та $y_1 = \frac{h-b}{2}$ для \vec{r}_1 маємо:

$$\vec{r}_1 = \frac{y[i] - h/2 + b/2}{d_1[i]} \vec{i} + \frac{L - x[i]}{d_1[i]} \vec{j} \quad (21)$$

де \vec{i}, \vec{j} — одиничні вектори осей x, y .

Тому проєкція швидкості ковзання $\vec{V}_{r\tau}[i]$ i -ї людини на вісь τ_1 визначатиметься так:

$$V_{\tau_1}[i] = \vec{V}[i] \cdot \vec{r}_1 = \frac{y[i] - h/2 + b/2}{d_1[i]} V_x[i] + \frac{L - x[i]}{d_1[i]} V_y[i]$$
(22)

Аналогічно визначається $V_{\tau_2}[i]$ для кута дверей з координатами $x_2 = L$ та $y_2 = \frac{h+b}{2}$. Опускаючи проміжні перетворення, отримаємо:

$$V_{\tau_2}[i] = \frac{(h+b)/2 - y[i]}{d_2[i]} V_x[i] + \frac{x[i] - L}{d_2[i]} V_y[i] \quad (23)$$

На основі (19), (21), (22), (23) запишемо співвідношення для визначення проєкцій сили тертя у разі контакту взаємодії i -ї людини з боковою частиною дверного отвору:

якщо $\left\{ h/2 \geq y[i] > \frac{h-b}{2} \text{ і } d/2 - d_1[i] \geq 0 \right\}$
 тоді $F_{xtr}[i] = -\mu(d/2 - d_1[i]) \frac{y[i] + (b-h)/2}{d_1[i]} V_{\tau_1}[i]$,
 $F_{ytr}[i] = -\mu(d/2 - d_1[i]) \frac{L - x[i]}{d_1[i]} V_{\tau_1}[i]$;
 якщо $\left\{ h/2 < y[i] < \frac{h+b}{2} \text{ і } d/2 - d_2[i] \geq 0 \right\}$
 тоді $F_{xtr}[i] = -\mu(d/2 - d_2[i]) \frac{(b+h)/2 - y[i]}{d_2[i]} V_{\tau_2}[i]$,
 $F_{ytr}[i] = -\mu(d/2 - d_2[i]) \frac{x[i] - L}{d_2[i]} V_{\tau_2}[i]$.

(24)

Для визначення головного вектора сил тертя $\vec{F}_{trr}[i]$, що діють на i -ту людину з боку всіх людей, котрі з нею контактують, необхідно спочатку знайти відносну швидкість i -ї людини по відношенню до j -ї людини. Очевидно, що це запишемо так:

$$\vec{V}_r[i, j] = \vec{V}[i] - \vec{V}[j]$$
 або $\vec{V}_r[i, j] = (V_x[i] - V_x[j])\vec{i} + (V_y[i] - V_y[j])\vec{j}$.
(25)

Оскільки взаємне проковзування людей відбувається в площині їх контакту, то необхідно знайти одиничний вектор $\vec{r}[i, j]$, який лежить в цій площині. Очевидно він буде перпендикулярний вектору $\vec{r}[i, j]$. Враховуючи цю умову, отримаємо

$$\vec{r}[i, j] = \frac{y[j] - y[i]}{r[i, j]} \vec{i} + \frac{x[i] - x[j]}{r[i, j]} \vec{j}. \quad (26)$$

Враховуючи (26), можемо знайти проекцію швидкості (25) на одиничний вектор $\vec{r}[i, j]$:

$$V_{rt}[i, j] = \frac{x[i] - x[j]}{r[i, j]}(V_y[i] - V_y[j]) + \frac{y[j] - y[i]}{r[i, j]}(V_x[i] - V_x[j]) \quad (27)$$

Отже, складову вектора відносної швидкості (25), яка лежить в площині дії сили тертя контактуючих людей, знаходимо так:

$$\vec{V}_{rt}[i, j] = \frac{y[j] - y[i]}{r[i, j]}V_{rt}[i, j] \cdot \vec{i} + \frac{x[i] - x[j]}{r[i, j]}V_{rt}[i, j] \cdot \vec{j} \quad (28)$$

Враховуючи (28), на підставі (19) отримуємо проекції сили тертя на координатні осі, коли i -та людина ковзає по j -й людині (ефект "протискування" в натовпі):

$$F_{xtr}[i, j] = -\mu(d - r[i, j]) \frac{y[j] - y[i]}{r[i, j]} V_{rt}[i, j] \Theta, \quad (29)$$

$$F_{ytr}[i, j] = -\mu(d - r[i, j]) \frac{x[i] - x[j]}{r[i, j]} V_{rt}[i, j] \Theta.$$

Рівняння (29) дозволяють знайти проекції на осі координат головного вектора сил тертя $F_{trr}[i]$ для i -ї людини:

$$F_{xtrr}[i] = \sum_{j=1}^{N^{**}} F_{xtr}[i, j], \quad F_{ytrr}[i] = \sum_{j=1}^{N^{**}} F_{ytr}[i, j]. \quad (30)$$

Якщо i -та людина одночасно зіштовхується з декількома людьми, то для неї потрібно підрахувати арифметичну суму радіально напрямлених сил фізичної взаємодії. Зрозуміло, що, якщо людина отримує сумарну силу тиску, більшу за якесь граничне значення, то вона може бути важко травмованою, втратити свідомість і можливість самостійно переміщатися. Така людина стає додатковою перешкодою для інших. У цій моделі сумарна сила стиску для i -ї людини знаходиться за формулою:

$$P_{st}[i] = |F_{xprst}[i]| + |F_{yprst}[i]| + \sqrt{(F_{xpr}[i])^2 + (F_{ypr}[i])^2} \quad (31)$$

Граничне значення цієї сили приймають таким, що дорівнює $W = 2500$ Н.

У випадку, коли $P_{st}[i] \geq W$ людина стає жертвою паніки, тобто втрачає здатність самостійно рухатись і тому для неї $u_0 = 0$ та $\vec{F}_{zm}[i] = \vec{F}_r[i] = \vec{F}_{vdst}[i] = 0$. Вона може отримувати фізичний вплив під дією сил $\vec{F}_{pr}[i]$, $\vec{F}_{prst}[i]$, $\vec{F}_{tr}[i]$, $\vec{F}_{trr}[i]$, які можуть її виштовхнути з приміщення або відтіснити від дверей. Під час такого руху в моделі передбачено, що на цю людину діє сила опору $\vec{F}_{op}[i]$, яка залежить від її швидкості і в проекціях на осі координат визначається формулами:

$$F_{opx}[i] = -300V_x[i], \quad F_{opy}[i] = -300V_y[i] \quad (32)$$

Використовуючи формули з визначення всіх сил, що діють на людей у натовпі, запишемо рівняння (1) в проекціях на осі координат:

$$m \frac{\Delta V_x[i]}{\Delta t} = F_{zmx}[i] + F_{rx}[i] + F_{xvdst}[i] + F_{xpr}[i] + F_{xprst}[i] + F_{xtr}[i] + F_{xtrr}[i] + F_{opx}[i] \quad (33)$$

$$m \frac{\Delta V_y[i]}{\Delta t} = F_{zmy}[i] + F_{ry}[i] + F_{yvdst}[i] + F_{ypr}[i] + F_{yprst}[i] + F_{ytr}[i] + F_{ytrr}[i] + F_{opy}[i]$$

Закон руху панічного натовпу отримуємо числовим розв'язком системи рівнянь (33). Для цього використовується кінцево-різницева схема Ейлера:

$$V_x[i] := V_x[i] + \Delta V_x[i],$$

$$V_y[i] := V_y[i] + \Delta V_y[i], \quad (34)$$

$$X[i] := X[i] + V_x[i] \Delta t,$$

$$Y[i] := Y[i] + V_y[i] \Delta t,$$

де ліворуч всі величини беруть у момент часу $t + \Delta t$, а праворуч у момент часу t .

V. Аналіз отриманих результатів

Результати моделювання поведінки панічного натовпу були перетворені в анімаційну картину його руху. Для забезпечення плавності переміщення об'єктів на екрані була вибрана частота кадрів 25 кадр/с, тобто часовий інтервал між кадрами становив $\Delta T = 0.04$ с. Дослідження проводились для різних значень міри паніки швидкості u_0 і ширини вихідних дверей b . Розподіл людей у приміщенні в початковий момент часу показано на рис. 1. Деякі фрагменти стану натовпу для різних моментів часу показано на рис. 3, 4, 5.

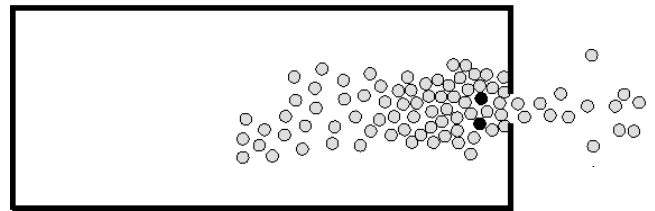


Рис. 3. Результат моделювання розподілу людей в приміщенні через 16 с після початку паніки ($u_0 = 1.5$ м/с, $b = 1.3$ м)



Рис. 4. Розподіл людей в приміщенні через 25 с після початку паніки ($u_0 = 1.5$ м/с, $b = 1.5$ м)

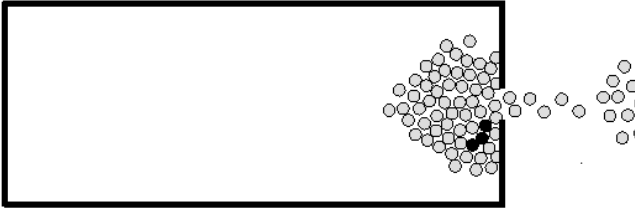


Рис. 5. Розподіл людей в приміщенні через 6 с після початку паніки ($u_0 = 1.7 \text{ м/с}$, $b = 1.5 \text{ м}$)

Потемніння дисків змінюється залежно від величини сумарної сили стиску $P_{st}[z]$ під час зіткнень. Людей, які в результаті паніки важко трамвайні або стали жертвами, зображено чорними кружками.

Як показали дослідження при $u_0 = 1.7 \text{ м/с}$ та $b = 1.5 \text{ м}$ перша людина покидає приміщення за $t_1 = 1.88 \text{ с}$, остання через $T = 50 \text{ с}$ після початку паніки, а дві людини важко травмовані. У разі, коли $u_0 = 1.5 \text{ м/с}$ та $b = 1.3 \text{ м}$ — $t_1 = 1.92 \text{ с}$, $T = 56 \text{ с}$, троє загиблих. При $u_0 = 1.7 \text{ м/с}$ та $b = 1.5 \text{ м}$ — $t_1 = 1.72 \text{ с}$, $T = 56 \text{ с}$, 4 жертви. Відповідно, коли $u_0 = 1.7 \text{ м/с}$ та $b = 1.7 \text{ м}$ — $t_1 = 1.72 \text{ с}$, $T = 33 \text{ с}$ і дві людини травмовано.

Як видно з цих даних та рис. 3, 4, 5, запропонована математична модель дозволяє адекватно прогнозувати поведінку натовпу, що панікує. Результати моделювання є фізично достовірнішими, ніж ті, які отримуються в інших дослідженнях, що ґрунтуються на основі [4]. Наші обчислення показали, що перша

людина, яка перебуває біля вихідних дверей на відстані близько двох метрів, залишає приміщення за час $t_1 \approx 1.9 \text{ с}$. Проте в роботах інших авторів було одержано інший результат: $t_1 \approx 4 \text{ с}$, що, очевидно, не відповідає дійсності. У межах нашої моделі, натовп покидає приміщення за час, набагато менший, ніж в інших моделях. При цьому у жодному випадку не було зафіксовано повного блокування біля виходу.

У роботі автори поставили завдання сформулювати адекватнішу модель втечі натовпу з приміщення і намітити способи її вдосконалення. Розробка рекомендацій для архітекторів і будівельників під час проектування та будівництва приміщень масового перебування людей, буде предметом подальших досліджень.

Висновки

1. Побудована покращена математична модель поведінки натовпу, що панікує, яка адекватно описує його стан під час втечі з приміщення.
2. Отримано фізично достовірніші параметри моделі.
3. Встановлено, що в місці звуження людського потоку (потоку натовпу, який панікує), відсутнє явне збільшення його швидкості.
4. Сформульована модель дозволить розробити рекомендації організаторам масових заходів та архітекторам і будівельникам під час проектування та будівництва громадських будівель та споруд.

Література

- [1] Краснощеков П.С. Простейшая математическая модель поведения. Психология конформизма // Математическое моделирование, 1998, **10**, №7. – С.76–92.
- [2] Степанцов М.Е. Математическая модель направленного движения группы людей // Математическое моделирование, 2004, **16**, №3. – С.43–49.
- [3] E.Kirik, T.Yurgel'yan, D.Krouglov. An intelligent floor field cellular automation model for pedestrian dynamics // Proceedings of The Summer Computer Simulation Conference, 2007, The Mission Valley Marriott San Diego, California, 2007. – P.1031–1036.
- [4] Helbing D., Farkas J. Vicsek T. Simulating dynamical features of escape panic // Nature, 2000, №407. – P.487–490.
- [5] Helbing D., Molnar P., Farkas J., Bolay K. Self-organizing pedestrian movement // Environment and Planning B: Planning and Design, 2001, **28**. – P.361–383.
- [6] Щербак Г.В. Дослідження поведінки натовпу в умовах паніки чисельними методами // Проблеми екстремальної та кризової психології. Зб. наук пр. УЦЗ України. Вип.4, Харків: УЦЗУ, 2008. – С.236–241.
- [7] Щербак Г.В., Маляров М.В. Математична модель панічного натовпу // Проблеми екстремальної та кризової психології. Зб. наук пр. УЦЗ України. Вип. 9, Харків: УЦЗУ, 2009. – С.176–182.
- [8] Кухлинг Х. Справочник по физике. – М.: Мир, 185. – 500 с.

ПОСТРОЕНИЕ УЛУЧШЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПОВЕДЕНИЯ ПАНИКУЮЩЕЙ ТОЛПЫ ПРИ ПОБЕГЕ ИЗ ПОМЕЩЕНИЯ

Я. Андрусик^a, П. Черняк^a, А. Андрусик^b

^a *Национальный университет "Львівська політехніка",
ул. С. Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина*
^b *Институт физики конденсированой среды НАН Украины,
ул. Свенцицкого, 1, 79011 Львов, Украина*

Была построена улучшенная математическая модель поведения паникующей толпы на основе методов физики сложных систем. Сформулированная модель дает возможность разработать рекомендации организаторам массовых мероприятий, а также архитекторам и строителям при проектировании и строительстве общественных строений.

Ключевые слова: фсложные системы, паникующая толпа, модель поведения.

2000 MSC: 91F99

УДК: 519.711.8

CONSTRUCTION OF ADVANCED MATHEMATICAL MODEL OF PANICKING CROWDS BEHAVIOUR WHILE ESCAPING A BUILDING

Ya. Andrusyk^a, P. Chernyak^a, A. Andrusyk^b

^a *National University "Lvivska Politechnika"
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine*
^b *Institute for Condensed Matter Physics
of the National Academy of Sciences of Ukraine,
1 Svientsitskii Str., 79011 Lviv, Ukraine*

We constructed an improved mathematical model of panicking crowds behavior on the basis of the methods of complex systems. This model allowed us to develop recommendations for the organizers of public events, as well as architects and builders to design and construct public buildings.

Keywords: complex systems, panicking crowd, behaviour model.

2000 MSC: 91F99

УДК: 519.711.8