ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.687 № 687, (2010) с. 137–147

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.687 No 687, (2010) 137–147

ФУНКЦІОНАЛЬНІ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ ПОЛІНОМИ, ЩО НЕ ВИКОРИСТОВУЮТЬ ПРАВИЛО ПІДСТАНОВКИ

І. Демків

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 29 червня 2010 р.)

Запропоновано і обґрунтовано конструкцію функціонального поліному типу Ньютона, яка не вимагає виконання правила підстановки, що досягається за рахунок розширення класу поліномів, в якому шукають інтерполянт.

Ключові слова: інтерполяційний поліном, континуальні вузли, функціональний поліном.

2000 MSC: 65D05,65D15

УДК: 519.65

I. Вступ

Побудові та дослідженню інтерполяційних поліномів в абстрактних лінійних просторах присвячено ряд робіт [1]–[12], серед яких операторні інтерполяційні формули типу Ньютона займають помітне місце. Тут варто відзначити таких авторів, як С.Ю. Ульм, В.В. Полль, П.І. Соболевський, Л.О. Янович [1]–[4]. У подальшому цими питаннями займалися P. Kergin [14], а за ним C.A. Micchelli, P. Milman, M. Andersson, M. Passare, L. Filipsson [10]–[13] та інші дослідники, так званої, "Kergin interpolation". З точки зору пріоритету, то тут необхідно відзначити, що інтерполянт Кергіна з точністю до заміни змінних інтегрування фігурував ще у статті С.Ю. Ульма, В.В. Полля [1] у 1969 р. У той час як робота P. Kergin [14] з'явилась тільки у 1980 р.

Автори робіт [6], [9], [16] запропонували свій підхід щодо побудови інтерполянтів типу Ньютона у класі функціональних поліномів вигляду (II.6), які відрізняються від відповідних інтерполяційних поліномів, наведених у цитованих попередніх роботах тим, що мають водночас дві властивості: першу – інтерполяційні вузли є континуальними, тобто залежать від неперервних параметрів, і другу – інваріантність інтерполяційних формул щодо поліномів відповідного степеня, тобто має властивість збереження полінома. Перша властивість забезпечується завдяки знайденому правилу підстановки [9], виконання якого для цього функціонала є достатньою умовою континуальності інтерполяційних вузлів з класу $Q[0,1]$ – простору кусково-неперервних на відрізку $[0,1]$ функцій зі скінченною кількістю точок розриву першого роду.

Відзначимо у цьому зв'язку ще раз роботи [1]–[4], [10]–[13], де для побудови операторних інтерполянтів використовується континуальна інформація, за якою будуються відповідні інтеграли в інтерполяційних формулах, але відсутня континуальність інтерполяційних вузлів, що само по собі є неприродним, хоча інтерполянти зберігають поліноми відповідного степеня.

У роботі пропонується і обґрунтовується конструкція функціональних поліномів типу Ньютона, які не вимагають виконання правила підстановки, і до того ж дві вищезазначені властивості інтерполянтів зберігатимуться, що досягається за рахунок розширення класу поліномів (II.6), у якому шукають інтерполянт. Про можливість такої конструкції для випадку полінома другого степеня було зазначено у [15].

II. Постановка задачі

У роботах [16], [9] для функціоналу F, визначеного на просторі $Q[0,1]$, побудовано функціональний інтерполяційний поліном типу Ньютона n-го степеня $P_n^N(x)$, $x \in Q[0,1]$ з інтерполяційними умовами

$$P_n^N(x^n(\cdot,\vec{\xi}^n)) = F(x^n(\cdot,\vec{\xi}^n)), \qquad \text{(II.1)}$$

де континуальна множина вузлів

$$x^n(t,\vec{\xi}^n) = x_0(t) + \sum_{i=1}^{n} H(t-\xi_i)(x_i(t)-x_{i-1}(t)), \quad \text{(II.2)}$$

для будь-яких ξ_i з області $\Omega_{\vec{\xi}^n} = \{\vec{\xi}^n = (\xi_1,\xi_2...,\xi_n) : 0 \le \xi_1 \le \xi_2 \le ... \le \xi_n \le 1\}$, $x_i(t) \in Q[0,1]$, $H(t)$ – функція Хевісайда. Зауважимо, що функції $x_0(t), x_1(t), ..., x_n(t)$ належать континуальній множині (II.2) при відповідному виборі параметрів ξ_i : $x_n(t,\vec{\xi}^n) = x_k(t)$, якщо прийняти $\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_k = 0$, $\xi_{k+1} = \xi_{k+2} = \cdots = \xi_n = 1$.

Введемо позначення

$$D_{\vec{z}_n} = \frac{\partial^n}{\partial z_1 \partial z_2 ... \partial z_n}, \qquad d\vec{z}^j = dz_j dz_{j-1} ... dz_1. \quad \text{(II.3)}$$

Побудований в [9] поліном n-го степеня вигляду

$$P_n^N(x(\cdot))=$$

$$=K_0^N+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega_{\vec{\xi}^i}}K_i^N(\vec{z}^i)\prod_{j=1}^{i}(x(z_j)-x_{j-1}(z_j))\,d\vec{z}^i\equiv$$

$$\equiv p_0^N+\sum_{i=1}^{N}p_i^N(x(\cdot)),\ z_0=0, \tag{II.4}$$

де

$$K_i^N(\vec{z}^i)=$$

$$=(-1)^i\prod_{j=1}^{i}(x_j(z_j)-x_{j-1}(z_j))^{-1}D_{\vec{z}^j}F(x^j(\cdot,\vec{z}^j)) \tag{II.5}$$

є поліномом Ньютона на континуальній множині вузлів (II.2) в припущенні, що

а) частинні похідні в правій частині (II.5) існують як неперервні функції по кожній змінній окремо з $\Omega_{\vec{\xi}^j},\quad x_j(t)-x_{j-1}(t)\neq 0$;

в) існують інтеграли в (II.4);

с) виконується правило підстановки [9]

$$\left[\frac{\partial}{\partial z_k}\frac{\partial^{k-1}}{\partial z_1...\partial z_{k-1}}F(\varphi_0(\cdot)+\sum_{i=1}^{k+1}\varphi_i(\cdot)H(\cdot-z_i))\right]_{z_{k+1}=z_k}=$$

$$\frac{\varphi_k(z_k)}{\varphi_k(z_k)+\varphi_{k+1}(z_k)}\frac{\partial}{\partial z_k}\left[\frac{\partial^{k-1}}{\partial z_1...\partial z_{k-1}}F(\varphi_0(\cdot)+\sum_{i=1}^{k+1}\varphi_i(\cdot)H(\cdot-z_i))\right]_{z_{k+1}=z_k},$$

$$0\le z_1\le z_2\le...\le z_{k+1}\le 1$$

.

Цей інтерполянт єдиний та інваріантний у класі функціональних поліномів вигляду

$$P_n(x(\cdot))=K_0+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^1...\int\limits_0^1K_i(z_1,z_2,...,z_i)\prod_{j=1}^{i}x(z_j)d\vec{z}^i. \tag{II.6}$$

Надалі поставимо таку задачу: модифікувати інтерполяційну формулу типу Ньютона (II.4), (II.5) так, щоб модифікований поліном був інтерполяційним на континуальних вузлах без вимоги виконання правила підстановки.

III. Розв'язок задачі

Для розв'язування сформульованої вище задачі треба розширити клас поліномів (II.6), у якому шукатимемо розв'язок поставленої задачі. Як такий клас візьмемо

$$P_n(x(\cdot))=K_0+\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{s}\int\limits_0^1...(i)\ldots\int\limits_0^1K_{i,s}(z_1,z_2,...,z_i)\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{i}x(z_j)x(z_i)^{s-i}d\vec{z}^i. \tag{III.7}$$

Неважко переконатись, що у класі поліномів (III.7) містяться поліноми вигляду

$$P_n(x(\cdot))=K_0+\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{s}\int\limits_0^1\int\limits_{z_1}^1...\int\limits_{z_{i-1}}^1K_{i,s}(z_1,z_2,...,z_i)\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{i}(x(z_j)-x_{j-1}(z_j))\prod_{j=i+1}^{s}(x(z_i)-x_j(z_i))d\vec{z}^i. \tag{III.8}$$

Саме серед поліномів вигляду (III.8) і шукатимемо інтерполянт, що задовольняє умови (II.1) і не потребує виконання правила підстановки.

Покажемо, що для того, щоб функціональний поліном (III.8) був інтерполяційним на континуальній множині вузлів (II.2) необхідно і достатньо, щоб він та його ядра визначались формулами

$$P_n^{mN}(x(\cdot))=p_0^{mN}+\sum_{s=1}^{n}p_s^{mN}(x(\cdot)),p_0^{mN}=F\left(x_0\left(\cdot\right)\right), \tag{III.9}$$

$p_n^{mN}(x(\cdot))=p_{n,0}(x(\cdot))+p_{n,1}(x(\cdot))+p_{n,2}(x(\cdot))$

При виконанні правила підстановки

$$p_n^{mN}(x(\cdot))=p_{n,0}(x(\cdot)),$$

тобто $p_{n,1}(x(\cdot))+p_{n,2}(x(\cdot))$ містять поправки, які виражаються через правило підстановки

$$\left[p_{n,0}(x(\cdot))+p_{n,1}(x(\cdot))\right]_{x_n(z)=x(z)}=$$

$$=-p_0^{mN}-\sum_{k=1}^{n-1}p_{k,0}\left(x\left(\cdot\right)\right)+F\left(x\left(\cdot\right)\right), \tag{III.10}$$

$$p_{n,2}(x(\cdot))\big|_{x_n(z)=x(z)}=-\sum_{k=2}^{n-1}\left[p_{k,1}\left(x\left(\cdot\right)\right)+p_{k,2}\left(x\left(\cdot\right)\right)\right], \tag{III.11}$$

$n=3,4,\ldots,\ p_{2,2}\left(x\left(\cdot\right)\right)\equiv 0$.

Якщо побудовано такий функціональний поліном (III.9), що має властивості (III.10), (III.11), то тоді буде мати місце тотожність

$$P_n^{mN}(x(\cdot))\big|_{x_n(z)=x(z)}=\sum_{s=0}^{n}p_s^{mN}\left(x\left(\cdot\right)\right)=F\left(x\left(\cdot\right)\right)$$

або

$$F\left(x\left(\cdot\right)\right)-P_{n-1}^{mN}(x(\cdot))=R_{n-1}^{mN}\left(x\left(\cdot\right)\right)=p_{n}^{mN}\left(x\left(\cdot\right)\right)\Big|_{x_{n}(z)=x(z)}. \tag{III.12}$$

Побудова полінома $p_{n,0}(x(\cdot))+$ $p_{n,1}(x(\cdot))$ не викликає жодних ускладнень. Дійсно маємо

$$p_{n,0}(x(\cdot))+p_{n,1}(x(\cdot))= \tag{III.13}$$

$$=(-1)^{n}\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{z_1}^{1}\ldots\int\limits_{z_{n-1}}^{1}D_{\vec{z}^{n}}F\left(x^{n}\left(\cdot,\vec{z}^{n}\right)\right)\times\prod_{i=1}^{n}\frac{x\left(z_i\right)-x_{i-1}\left(z_i\right)}{x_i\left(z_i\right)-x_{i-1}\left(z_i\right)}d\vec{z}^{i}+$$

$$+(-1)^{n-1}\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{z_1}^{1}\ldots\int\limits_{z_{n-2}}^{1}\left[\frac{x_{n-1}\left(z_{n-1}\right)-x_{n-2}\left(z_{n-1}\right)}{x_{n}\left(z_{n-1}\right)-x_{n-2}\left(z_{n-1}\right)}\times\right.$$

$$\left.\times D_{\vec{z}^{n-1}}F\left(x^{n}\left(\cdot,\left(\vec{z}^{n-1},z_{n-1}\right)^{T}\right)\right)-D_{\vec{z}^{n-1}}\,F\left(x^{n}\left(\cdot,\vec{z}^{n}\right)\right)\big|_{z_n=z_{n-1}}\right]\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n-1}\frac{x\left(z_i\right)-x_{i-1}\left(z_i\right)}{x_i\left(z_i\right)-x_{i-1}\left(z_i\right)}\cdot\frac{x\left(z_{n-1}\right)-x_{n-1}\left(z_{n-1}\right)}{x_{n}\left(z_{n-1}\right)-x_{n-1}\left(z_{n-1}\right)}d\vec{z}^{n-1}+$$

$$+(-1)^{n-2}\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{z_1}^{1}\ldots\int\limits_{z_{n-3}}^{1}\left[\frac{x_{n-2}\left(z_{n-2}\right)-x_{n-3}\left(z_{n-2}\right)}{x_{n}\left(z_{n-2}\right)-x_{n-3}\left(z_{n-2}\right)}\times D_{\vec{z}^{n-2}}F\left(x^{n}\left(\cdot,\left(\vec{z}^{n-2},z_{n-2},z_{n-2}\right)^{T}\right)\right)-\right.$$

$$\left.-D_{\vec{z}^{n-2}}\,F\left(x^{n}\left(\cdot,\left(\vec{z}^{n-2},z_{n-3},z_{n-3}\right)^{T}\right)\right)\Big|_{z_{n-3}=z_{n-2}}\right]\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n-2}\frac{x\left(z_i\right)-x_{i-1}\left(z_i\right)}{x_i\left(z_i\right)-x_{i-1}\left(z_i\right)}\cdot\prod_{i=n-1}^{n}\frac{x\left(z_{n-2}\right)-x_{n-1}\left(z_{n-2}\right)}{x_{n}\left(z_{n-2}\right)-x_{n-1}\left(z_{n-2}\right)}d\vec{z}^{n-2}+\ldots+$$

$$+(-1)^{1}\int\limits_{0}^{1}[\frac{x_1\left(z_1\right)-x_0\left(z_1\right)}{x_n\left(z_1\right)-x_0\left(z_1\right)}D_{\vec{z}^{1}}F\left(x^{n}\left(\cdot,\left(z_1\ldots z_1\right)^{T}\right)\right)-D_{\vec{z}^{1}}F\left(x^{n}\left(\cdot,\left(z_1,\underbrace{z_2,\ldots,z_2}_{n-1}\right)^{T}\right)\right)\Bigg|_{z_2=z_1}]\times$$

$$\times\frac{x\left(z_1\right)-x_0\left(z_1\right)}{x_1\left(z_1\right)-x_0\left(z_1\right)}\prod_{i=2}^{n}\frac{x\left(z_1\right)-x_{i-1}\left(z_1\right)}{x_n\left(z_1\right)-x_{i-1}\left(z_1\right)}dz_1$$

.

Тепер треба знайти такий оператор S_n, який з кожного полінома $p_{k,1}(x(\cdot))+$ $p_{k,2}(x(\cdot))$ утворює поліном n-го степеня $S_n\left(p_{k,1}(x(\cdot))+p_{k,2}(x(\cdot))\right)\in\pi_n$ з властивістю

$$S_n\left(p_{k,1}(x(\cdot))+p_{k,2}(x(\cdot))\right)\big|_{x_n(z)=x(z)}==p_{k,1}(x(\cdot))+p_{k,2}(x(\cdot)), \tag{III.14}$$

$k=\overline{2,n-1}$.

Таких операторів існує нескінченна кількість. Щоб це довести, достатньо вказати хоча б два оператори S_n^1 та S_n^2 з властивістю (III.14). Тоді будь-який оператор вигляду $\alpha S_n^1+\beta S_n^2$ при всіх значеннях параметрів α,β , які задовольняють умову $\alpha+\beta=1$, матиме властивість (III.14).

Вкажемо простий спосіб побудови оператора S_n^1 . Візьмемо поліном k-го степеня $p_{k,1}(x(\cdot))+$ $p_{k,2}(x(\cdot))$, $k=\overline{2,n-1}$. Він міститиме суму i-кратних інтегралів $i=\overline{1,k}$, під якими будуть міститись поліноми i-го степеня по $x\left(z\right)$, а саме $x\left(z\right)$ фігуруватиме своїми значеннями у змінних інтегрування $z_1,\ldots,z_i$, $i=\overline{1,k}$. Фіксуємо довільне $p_i\in\overline{1,i}$ і вставляємо у кожний з інтегралів множник $\prod\limits_{l=i+1}^{n}\frac{x\left(z_{p_i}\right)-x_{l-1}\left(z_{p_i}\right)}{x_n\left(z_{p_i}\right)-x_{l-1}\left(z_{p_i}\right)}$ (дія оператора S_n), тоді кожний поліном k-го степеня перетвориться у поліном n-го степеня, причому очевидно будуть виконуватись співвідношення (III.14).

Недоліком вищенаведеного підходу є те, що побудований таким способом з інтерполяційного поліному $P_{n-1}^{mN}\left(x\left(\cdot\right)\right)$ поліном $P_{n}^{mN}\left(x\left(\cdot\right)\right)$ матиме інтерполяційні властивості полінома $P_{n-1}^{mN}\left(x\left(\cdot\right)\right)$ і інтерполювати функціонал $F\left(x\left(\cdot\right)\right)$ тільки у вузлі $x_n\left(z\right)$ без континуального інтерполяційного зв'язку з попередніми вузлами.

Можна запропонувати інший підхід побудови оператора S_n .

Візьмемо довільний доданок з полінома k-го степеня $p_{k,1}(x(\cdot))+ p_{k,2}(x(\cdot))$, $k = \overline{2, n-1}$. Нехай це буде i-кратний інтеграл вигляду

$$l_i^k(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 \int\limits_{z_1}^1 \ldots \int\limits_{z_{i-1}}^1 M_i^k\left(\vec{z}^i\right) m_i\left(x;\vec{z}^i\right) d\vec{z}^i, i=\overline{1,k}, \tag{III.15}$$

де ядро $M_i^k\left(\vec{z}^i\right)$ не містить $x(z)$ і складається з двох доданків, у кожний з яких входить i-та похідна $D_{\vec{z}^i} = \frac{\partial^i}{\partial z_1 \partial z_2 \ldots \partial z_i}$ від функціоналу F, обчисленого у "точці"$x^k\left(z;(f_1\ldots f_k)^T\right)$, (кожне з $t_1,\ldots,t_k$ виражаються через одну зі змінних інтегрування безпосередньо або через підстановку), а $m_i\left(x;\vec{z}^i\right)$ є поліном i-го степеня від $x(z)$. Тоді

$$S_n l_i^k(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 \int\limits_{z_1}^1 \ldots \int\limits_{z_i}^1 \frac{\partial}{\partial z_{i+1}} M_i^k\left(\vec{z}^i;\left(\underbrace{z_{i+1}\ldots z_{i+1}}_{(n-i)}\right)^T\right) m_i\left(x;\vec{z}^i\right)\times\left(\prod_{j=i+1}^{n}\frac{x(z_{i+1})-x_{j-1}(z_{i+1})}{x_n(z_{i+1})-x_{j-1}(z_{i+1})}dz_{i+1}\right)d\vec{z}^i +$$

$$+\int\limits_0^1 \int\limits_{z_1}^1 \ldots \int\limits_{z_{i-1}}^1 \frac{\partial}{\partial z_{i+1}} M_i^k\left(\vec{z}^i;\left(\underbrace{z_{i+1}\ldots z_{i+1}}_{(n-i)}\right)^T\right)\Bigg|_{z_{i+1}=z_i} m_i\left(x;\vec{z}^i\right) d\vec{z}^i = -\int\limits_0^1 \int\limits_{z_1}^1 \ldots \int\limits_{z_{i-1}}^1 M_i^k\left(\vec{z}^i\right) m_i\left(x;\vec{z}^i\right) d\vec{z}^i. \tag{III.16}$$

Наведемо декілька прикладів вигляду поліномів $p_n^{mN}(x(\cdot))$. Маємо

$$p_2^{mN}(x(\cdot)) = p_{2,0}(x(\cdot)) + p_{2,1}(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 \int\limits_{z_1}^1 D_{\vec{z}^2}F(x^2(\cdot,\vec{z}^2))\prod_{i=1}^{2}\frac{x(z_i)-x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i)-x_{i-1}(z_i)}d\vec{z}^2 +$$

$$+\int\limits_0^1 \left\{\left[D_{\vec{z}^1}F(x^2(\cdot,\vec{z}^2))\right]_{z_2=z_1} - \frac{x_1(z_1)-x_0(z_1)}{x_2(z_1)-x_0(z_1)}D_{\vec{z}^1}F(x^2(\cdot,(z_1,z_1)^T))\right\}\times\prod_{i=1}^{2}\frac{x(z_1)-x_{i-1}(z_1)}{x_i(z_1)-x_{i-1}(z_1)}d\vec{z}^1.$$

$$p_3^{mN}(x(\cdot)) = p_{3,0}(x(\cdot)) + p_{3,1}(x(\cdot)) + p_{3,2}(x(\cdot)) = -\int_0^1\int_{z_1}^1\int_{z_2}^1 D_{\vec{z}^3}F\left(x^3\left(\cdot,\vec{z}^3\right)\right)\prod_{i=1}^{3}\frac{x(z_i)-x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i)-x_{i-1}(z_i)}dz_i +$$

$$+\int_0^1\int_{z_1}^1\left[\frac{x_2(z_2)-x_1(z_2)}{x_3(z_2)-x_1(z_2)}\cdot D_{\vec{z}^2}F\left(x^3\left(\cdot,(z_1,z_2,z_2)^T\right)\right) - D_{\vec{z}^2}F\left(x^3\left(\cdot,(z_1,z_2,z_3)^T\right)\right)\Big|_{z_3=z_2}\right]\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{2}\frac{x(z_i)-x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i)-x_{i-1}(z_i)}\frac{x(z_2)-x_2(z_2)}{x_3(z_2)-x_2(z_2)}d\vec{z}^2 + \int_0^1[D_{\vec{z}^1}F\left(x^3\left(\cdot,(z_1,t,t)^T\right)\right)\Big|_{t=z_1} - \frac{x_1(z_1)-x_0(z_1)}{x_3(z_1)-x_0(z_1)}\times$$

$$\times D_{\vec{z}^1}F\left(x^3\left(\cdot,(z_1,z_1,z_1)^T\right)\right)]\times\frac{x(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)}\prod_{i=1}^{2}\frac{x(z_1)-x_i(z_1)}{x_3(z_1)-x_i(z_1)}dz_1 +$$

$$+\int_0^1\int_{z_1}^1[\frac{x_1(z_1)-x_0(z_1)}{x_2(z_1)-x_0(z_1)}\cdot D_{\vec{z}^2}F\left(x^3\left(\cdot,(z_1,z_1,z_2)^T\right)\right) - D_{\vec{z}^2}F\left(x^3\left(\cdot,(z_1,t,z_2)^T\right)\right)\Big|_{t=z_1}]\times$$

$$\prod_{i=1}^{2}\frac{x(z_1)-x_{i-1}(z_1)}{x_i(z_1)-x_{i-1}(z_1)}\frac{x(z_2)-x_2(z_2)}{x_3(z_2)-x_2(z_2)}d\vec{z}^2 + \int_0^1[\frac{x_1(z_1)-x_0(z_1)}{x_2(z_1)-x_0(z_1)}\cdot D_{\vec{z}^1}F\left(x^3\left(\cdot,(z_1,z_1,t)^T\right)\right)\Big|_{t=z_1} -$$

$$-D_{\vec{z}^1}F\left(x^3\left(\cdot,(z_1,t,t)^T\right)\right)\Big|_{t=z_1}]\times\prod_{i=1}^{3}\frac{x(z_1)-x_{i-1}(z_1)}{x_i(z_1)-x_{i-1}(z_1)}dz_1.$$

$$p_4^{mN}(x(\cdot)) = p_{4,0}(x(\cdot)) + p_{4,1}(x(\cdot)) + p_{4,2}(x(\cdot)) = \int_0^1 \int_{z_1}^1 \int_{z_2}^1 \int_{z_3}^1 D_{\vec{z}^4} F\left(x^4\left(\cdot, \vec{z}^4\right)\right) \prod_{i=1}^{4} \frac{x\left(z_i\right) - x_{i-1}\left(z_i\right)}{x_i\left(z_i\right) - x_{i-1}\left(z_i\right)} dz_i +$$

$$+ \int_0^1 \int_{z_1}^1 \int_{z_2}^1 [D_{\vec{z}^3} F\left(x^4\left(\cdot, \vec{z}^4\right)\right)\big|_{z_4 = z_3} - \frac{x_3(z_3) - x_2(z_3)}{x_4(z_3) - x_2(z_3)} \times D_{\vec{z}^3} F\left(x^4\left(\cdot, (z_1, z_2, z_3, z_3)^T\right)\right)] \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{3} \frac{x\left(z_i\right) - x_{i-1}\left(z_i\right)}{x_i\left(z_i\right) - x_{i-1}\left(z_i\right)} \frac{x\left(z_3\right) - x_3\left(z_3\right)}{x_4\left(z_3\right) - x_3\left(z_3\right)} d\vec{z}^3 + \int_0^1 \int_{z_1}^1 [\frac{x_2(z_2) - x_1(z_2)}{x_4(z_2) - x_1(z_2)} \cdot D_{\vec{z}^2} F\left(x^4\left(\cdot, (z_1, z_2, z_2, z_2)^T\right)\right) -$$

$$- D_{\vec{z}^2} F\left(x^4\left(\cdot, (z_1, z_2, z_3, z_3)^T\right)\right)\Big|_{z_3 = z_2}] \times \prod_{i=1}^{2} \frac{x\left(z_i\right) - x_{i-1}\left(z_i\right)}{x_i\left(z_i\right) - x_{i-1}\left(z_i\right)} \prod_{i=3}^{4} \frac{x\left(z_2\right) - x_{i-1}\left(z_2\right)}{x_4\left(z_2\right) - x_{i-1}\left(z_2\right)} \, d\vec{z}^2 +$$

$$+ \int_0^1 [D_{\vec{z}^1} F\left(x^4\left(\cdot, (z_1, z_2, z_2, z_2)^T\right)\right)\Big|_{z_2 = z_1} - \frac{x_1(z_1) - x_0(z_1)}{x_4(z_1) - x_0(z_1)} \times$$

$$\times D_{\vec{z}^1} F\left(x^4\left(\cdot, (z_1, z_1, z_1, z_1)^T\right)\right)] \times \ \frac{x(z_1) - x_0(z_1)}{x_1(z_1) - x_0(z_1)} \prod_{i=2}^{4} \frac{x(z_1) - x_{i-1}(z_1)}{x_4(z_1) - x_{i-1}(z_1)} \ dz_1 +$$

$$+ \int_0^1 \int_{z_1}^1 \int_{z_2}^1 [D_{\vec{z}^3} F\left(x^4\left(\cdot, (z_1, t, z_2, z_3)^T\right)\right)\Big|_{t = z_1} - \frac{x_1(z_1) - x_0(z_1)}{x_2(z_1) - x_0(z_1)} \cdot D_{\vec{z}^3} F\left(x^4\left(\cdot, (z_1, z_1, z_2, z_3)^T\right)\right)] \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{2} \frac{x\left(z_1\right) - x_{i-1}\left(z_1\right)}{x_i\left(z_1\right) - x_{i-1}\left(z_1\right)} \prod_{i=3}^{4} \frac{x\left(z_{i-1}\right) - x_{i-1}\left(z_{i-1}\right)}{x_i\left(z_{i-1}\right) - x_{i-1}\left(z_{i-1}\right)} d\vec{z}^3 + \int_0^1 \int_{z_1}^1 [D_{\vec{z}^2} F\left(x^4\left(\cdot, (z_1, t, z_2, z_3)^T\right)\right)\Big|_{\substack{t = z_1 \\ z_3 = z_2}} -$$

$$- \frac{x_1(z_1) - x_0(z_1)}{x_2(z_1) - x_0(z_1)} \cdot D_{\vec{z}^2} F\left(x^4\left(\cdot, (z_1, z_1, z_2, z_3)^T\right)\right)\Big|_{z_3 = z_2}] \times \prod_{i=1}^{2} \frac{x\left(z_1\right) - x_{i-1}\left(z_1\right)}{x_i\left(z_1\right) - x_{i-1}\left(z_1\right)} \prod_{i=3}^{4} \frac{x\left(z_2\right) - x_{i-1}\left(z_2\right)}{x_i\left(z_2\right) - x_{i-1}\left(z_2\right)} \ d\vec{z}^2 +$$

$$+ \int_0^1 \int_{z_1}^1 [D_{\vec{z}^2} F\left(x^4\left(\cdot, (z_1, t, t, z_2)^T\right)\right)\Big|_{t = z_1} - \frac{x_1(z_1) - x_0(z_1)}{x_2(z_1) - x_0(z_1)} \cdot D_{\vec{z}^2} F\left(x^4\left(\cdot, (z_1, z_1, t, z_2)^T\right)\right)\Big|_{t = z_1}] \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{3} \frac{x\left(z_1\right) - x_{i-1}\left(z_1\right)}{x_i\left(z_1\right) - x_{i-1}\left(z_1\right)} \frac{x\left(z_2\right) - x_3\left(z_2\right)}{x_4\left(z_2\right) - x_3\left(z_2\right)} \ d\vec{z}^2 + \int_0^1 [D_{\vec{z}^1} F\left(x^4\left(\cdot, (z_1, t, t, t)^T\right)\right)\Big|_{t = z_1} - \frac{x_1(z_1) - x_0(z_1)}{x_2(z_1) - x_0(z_1)} \times$$

$$\times D_{\vec{z}^1} F\left(x^4\left(\cdot, (z_1, z_1, t, t)^T\right)\right)\Big|_{t = z_1}] \times \ \prod_{i=1}^{4} \frac{x\left(z_1\right) - x_{i-1}\left(z_1\right)}{x_i\left(z_1\right) - x_{i-1}\left(z_1\right)} dz_1 +$$

$$+ \int_0^1 \int_{z_1}^1 [\frac{x_1(z_1) - x_0(z_1)}{x_2(z_1) - x_0(z_1)} \cdot D_{\vec{z}^2} F\left(x^4\left(\cdot, (z_1, z_1, z_2, z_2)^T\right)\right) - D_{\vec{z}^2} F\left(x^4\left(\cdot, (z_1, t, z_2, z_2)^T\right)\right)\Big|_{t = z_1}] \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{2} \frac{x\left(z_1\right) - x_{i-1}\left(z_1\right)}{x_i\left(z_1\right) - x_{i-1}\left(z_1\right)} \prod_{i=3}^{4} \frac{x\left(z_2\right) - x_{i-1}\left(z_2\right)}{x_4\left(z_2\right) - x_{i-1}\left(z_2\right)} \ d\vec{z}^2 +$$

$$+ \int_0^1 \ [\frac{x_1(z_1) - x_0(z_1)}{x_2(z_1) - x_0(z_1)} \cdot D_{\vec{z}^2} F\left(x^4\left(\cdot, (z_1, z_1, t, t)^T\right)\right)\Big|_{t = z_1} -$$

$$- D_{\vec{z}^2} F\left(x^4\left(\cdot, (z_1, t, t, t)^T\right)\right)\Big|_{t = z_1}] \times \prod_{i=1}^{2} \frac{x\left(z_1\right) - x_{i-1}\left(z_1\right)}{x_i\left(z_1\right) - x_{i-1}\left(z_1\right)} \prod_{i=3}^{4} \frac{x\left(z_2\right) - x_{i-1}\left(z_2\right)}{x_4\left(z_2\right) - x_{i-1}\left(z_2\right)} \ dz_1 +$$

$$+ \int_0^1 \int_{z_1}^1 \int_{z_2}^1 [D_{\vec{z}^3} F\left(x^4\left(\cdot, (z_1, z_2, t, z_3)^T\right)\right)\Big|_{t = z_2} - \frac{x_2(z_2) - x_1(z_2)}{x_3(z_2) - x_1(z_2)} \times$$

$$\times D_{\vec{z}^3} F\left(x^4\left(\cdot,(z_1,z_2,z_2,z_3)^T\right)\right)] \times \prod_{i=1}^{2} \frac{x(z_i)-x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i)-x_{i-1}(z_i)} \prod_{i=3}^{4} \frac{x(z_{i-1})-x_{i-1}(z_{i-1})}{x_i(z_{i-1})-x_{i-1}(z_{i-1})}\, d\vec{z}^3+$$

$$+\int_0^1\int_{z_1}^1 [D_{\vec{z}^2} F\left(x^4\left(\cdot,(z_1,z_2,t,t)^T\right)\right)\Big|_{t=z_2} - \frac{x_2(z_2)-x_1(z_2)}{x_3(z_2)-x_1(z_2)}\times$$

$$\times D_{\vec{z}^2} F\left(x^4\left(\cdot,(z_1,z_2,z_2,t)^T\right)\right)\Big|_{t=z_2}] \cdot \prod_{i=1}^{2} \frac{x(z_i)-x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i)-x_{i-1}(z_i)} \prod_{i=3}^{4} \frac{x(z_2)-x_{i-1}(z_2)}{x_i(z_2)-x_{i-1}(z_2)}\, d\vec{z}^2+$$

$$+\int_0^1\int_{z_1}^1 [\frac{x_1(z_1)-x_0(z_1)}{x_3(z_1)-x_0(z_1)} \cdot D_{\vec{z}^2} F\left(x^4\left(\cdot,(z_1,z_1,z_1,z_2)^T\right)\right) - D_{\overrightarrow{z}^2} F\left(x^4\left(\cdot,(z_1,t,t,z_2)^T\right)\right)\Big|_{t=z_1}]\times$$

$$\times \frac{x(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)} \prod_{i=2}^{3} \frac{x(z_1)-x_{i-1}(z_1)}{x_3(z_1)-x_{i-1}(z_1)} \frac{x(z_2)-x_3(z_2)}{x_4(z_2)-x_3(z_2)}\, d\vec{z}^2+$$

$$+\int_0^1 [\frac{x_1(z_1)-x_0(z_1)}{x_3(z_1)-x_0(z_1)} D_{\vec{z}^1} F\left(x^4\left(\cdot,(z_1,z_1,z_1,t)^T\right)\right)\Big|_{t=z_1} - D_{\vec{z}^1} F\left(x^4\left(\cdot,(z_1,t,t,t)^T\right)\right)\Big|_{t=z_1}]\times$$

$$\times \frac{x(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)} \prod_{i=2}^{3} \frac{x(z_1)-x_{i-1}(z_1)}{x_3(z_1)-x_{i-1}(z_1)} \frac{x(z_2)-x_3(z_2)}{x_4(z_2)-x_3(z_2)}\, dz_1.$$

Для доведення сформульованого вище твердження покажемо спочатку справедливість наступної теореми.

Теорема 1. *Для достатньо гладкого функціоналу $F(x(\cdot))$ має місце представлення*

$$F(x(\cdot)) = P_n^{mN}(x(\cdot)) + R_n^{mN}(x(\cdot)),$$

де $R_n^{mN}(x(\cdot))$ – залишковий член, що має вигляд $R_n^{mN}(x(\cdot)) = p_{n+1}^{mN}(x(\cdot))\big|_{x_{n+1}(z)=x(z)}$, а його ядра визначаються формулами (III.9), (III.13), (III.15), (III.16), в яких треба прийняти $x_{n+1}(z) = x(z)$.

Доведення. Переконаємось у справедливості твердження спочатку для випадків $n = 1, 2, 3$. Нехай $n = 1$, тоді при $x_2(z) = x(z)$ матимемо

$$R_1^{mN}(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 \int\limits_{z_1}^1 D_{\vec{z}^2} F(x^2(\cdot,\vec{z}^2)) \frac{x(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)} d\vec{z}^2+$$

$$+\int\limits_0^1 \left\{ \left[D_{\vec{z}^1} F(x^2(\cdot,\vec{z}^2))\right]_{z_2=z_1} - \frac{x_1(z_1)-x_0(z_1)}{x_2(z_1)-x_0(z_1)} D_{\vec{z}^1} F(x^2(\cdot,(z_1,z_1)^T)) \right\} \frac{x(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)} dz_1 =$$

$$= -p_{1,0}(x(\cdot)) - F(x_0(\cdot)) + F(x(\cdot)) = F(x(\cdot)) - P_1^{mN}(x(\cdot)).$$

Звідси

$$F(x(\cdot)) = P_1^{mN}(x(\cdot)) + R_1^{mN}(x(\cdot)).$$

Далі, нехай $n = 2$, тоді при $x_3(z) = x(z)$ матимемо

$$R_2^{mN}(x(\cdot)) = -\int_0^1\int_{z_1}^1\int_{z_2}^1 D_{\vec{z}^3} F\left(x^3\left(\cdot,\vec{z}^3\right)\right) \prod_{i=1}^{2} \frac{x(z_i)-x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i)-x_{i-1}(z_i)} dz_i+ \tag{III.17}$$

$$+\int_0^1\int_{z_1}^1 [\frac{x_2(z_2)-x_1(z_2)}{x(z_2)-x_1(z_2)} \cdot D_{\vec{z}^2} F\left(x^3\left(\cdot,(z_1,z_2,z_2)^T\right)\right) - D_{\vec{z}^2} F\left(x^3\left(\cdot,(z_1,z_2,z_3)^T\right)\right)\Big|_{z_3=z_2}] \prod_{i=1}^{2} \frac{x(z_i)-x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i)-x_{i-1}(z_i)}\, d\vec{z}^2+$$

$$+\int_0^1 [D_{\vec{z}^1} F\left(x^3\left(\cdot,(z_1,t,t)^T\right)\right)\Big|_{t=z_1} - \frac{x_1(z_1)-x_0(z_1)}{x(z_1)-x_0(z_1)} \times D_{\vec{z}^1} F\left(x^3\left(\cdot,(z_1,z_1,z_1)^T\right)\right)] \frac{x(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)} dz_1+$$

$$+\int_0^1\int_{z_1}^1[\frac{x_1(z_1)-x_0(z_1)}{x_2(z_1)-x_0(z_1)}\cdot D_{\vec{z}^2}F\left(x^3\left(\cdot,(z_1,z_1,z_2)^T\right)\right)-D_{\vec{z}^2}F\left(x^3\left(\cdot,(z_1,t,z_2)^T\right)\right)\Big|_{t=z_1}]\prod_{i=1}^{2}\frac{x\left(z_1\right)-x_{i-1}\left(z_1\right)}{x_i\left(z_1\right)-x_{i-1}\left(z_1\right)}\,d\vec{z}^2+$$

$$+\int_0^1[\frac{x_1(z_1)-x_0(z_1)}{x_2(z_1)-x_0(z_1)}\cdot D_{\vec{z}^1}F\left(x^3\left(\cdot,(z_1,z_1,t)^T\right)\right)\Big|_{t=z_1}-D_{\vec{z}^1}F\left(x^3\left(\cdot,(z_1,t,t)^T\right)\right)\Big|_{t=z_1}]\prod_{i=1}^{2}\frac{x(z_1)-x_{i-1}(z_1)}{x_i(z_1)-x_{i-1}(z_1)}\,dz_1.$$

Отже, маємо

$$R_2^{mN}(x(\cdot))=-p_{2,0}(x(\cdot))-p_{2,1}(x(\cdot))-p_{1,0}(x(\cdot))-F\left(x_0\left(\cdot\right)\right)+F\left(x\left(\cdot\right)\right)=F\left(x\left(\cdot\right)\right)-P_2^{mN}(x(\cdot)).$$

Тобто

$$F(x(\cdot))=P_2^{mN}(x(\cdot))+R_2^{mN}(x(\cdot))=P_1^{mN}(x(\cdot))+R_1^{mN}(x(\cdot)).$$

Нехай тепер $n=3$. Візьмемо $x_4(z)=x(z)$, матимемо

$$\begin{gathered}R_3^{mN}(x(\cdot))=\int_0^1\int_{z_1}^1\int_{z_2}^1\int_{z_3}^1 D_{\vec{z}^4}F\left(x^4\left(\cdot,\vec{z}^4\right)\right)\prod_{i=1}^{3}\frac{x\left(z_i\right)-x_{i-1}\left(z_i\right)}{x_i\left(z_i\right)-x_{i-1}\left(z_i\right)}dz_i+\\ +\int_0^1\int_{z_1}^1\int_{z_2}^1[D_{\vec{z}^3}F\left(x^4\left(\cdot,\vec{z}^4\right)\right)\Big|_{z_4=z_3}-\frac{x_3(z_3)-x_2(z_3)}{x(z_3)-x_2(z_3)}\times\\ \times D_{\vec{z}^3}F\left(x^4\left(\cdot,(z_1,z_2,z_3,z_3)^T\right)\right)]\times\prod_{i=1}^{3}\frac{x\left(z_i\right)-x_{i-1}\left(z_i\right)}{x_i\left(z_i\right)-x_{i-1}\left(z_i\right)}d\vec{z}^3+\end{gathered}\tag{III.18}$$

$$\begin{gathered}+\int_0^1\int_{z_1}^1[\frac{x_2(z_2)-x_1(z_2)}{x(z_2)-x_1(z_2)}\cdot D_{\vec{z}^2}F\left(x^4\left(\cdot,(z_1,z_2,z_2,z_2)^T\right)\right)-D_{\vec{z}^2}F\left(x^4\left(\cdot,(z_1,z_2,z_3,z_3)^T\right)\right)\Big|_{z_3=z_2}]\times\\ \times\prod_{i=1}^{2}\frac{x\left(z_i\right)-x_{i-1}\left(z_i\right)}{x_i\left(z_i\right)-x_{i-1}\left(z_i\right)}d\vec{z}^2+\int_0^1[D_{\vec{z}^1}F\left(x^4\left(\cdot,(z_1,z_2,z_2,z_2)^T\right)\right)\Big|_{z_2=z_1}-\frac{x_1(z_1)-x_0(z_1)}{x(z_1)-x_0(z_1)}\times\\ \times D_{\vec{z}^1}F\left(x^4\left(\cdot,(z_1,z_1,z_1,z_1)^T\right)\right)]\times\frac{x(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)}dz_1+\\ +\int_0^1\int_{z_1}^1\int_{z_2}^1[D_{\vec{z}^3}F\left(x^4\left(\cdot,(z_1,t,z_2,z_3)^T\right)\right)\Big|_{t=z_1}-\frac{x_1(z_1)-x_0(z_1)}{x_2(z_1)-x_0(z_1)}\times\\ \times D_{\vec{z}^3}F\left(x^4\left(\cdot,(z_1,z_1,z_2,z_3)^T\right)\right)]\times\prod_{i=1}^{2}\frac{x\left(z_1\right)-x_{i-1}\left(z_1\right)}{x_i\left(z_1\right)-x_{i-1}\left(z_1\right)}\frac{x\left(z_2\right)-x_2\left(z_2\right)}{x_3\left(z_2\right)-x_2\left(z_2\right)}d\vec{z}^3+\\ +\int_0^1\int_{z_1}^1[D_{\vec{z}^2}F\left(x^4\left(\cdot,(z_1,t,z_2,z_3)^T\right)\right)\Big|_{t=z_1;z_3=z_2}-\frac{x_1(z_1)-x_0(z_1)}{x_2(z_1)-x_0(z_1)}\times\\ \times D_{\vec{z}^2}F\left(x^4\left(\cdot,(z_1,z_1,z_2,z_3)^T\right)\right)\Big|_{z_3=z_2}]\times\prod_{i=1}^{2}\frac{x\left(z_1\right)-x_{i-1}\left(z_1\right)}{x_i\left(z_1\right)-x_{i-1}\left(z_1\right)}\frac{x\left(z_2\right)-x_2\left(z_2\right)}{x_3\left(z_2\right)-x_2\left(z_2\right)}\,d\vec{z}^2+\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}+\int_0^1\int_{z_1}^1[D_{\vec{z}^2}F\left(x^4\left(\cdot,(z_1,t,t,z_2)^T\right)\right)\Big|_{t=z_1}-\frac{x_1(z_1)-x_0(z_1)}{x_2(z_1)-x_0(z_1)}\times D_{\vec{z}^2}F\left(x^4\left(\cdot,(z_1,z_1,t,z_2)^T\right)\right)\Big|_{t=z_1}]\times\\ \times\prod_{i=1}^{3}\frac{x\left(z_1\right)-x_{i-1}\left(z_1\right)}{x_i\left(z_1\right)-x_{i-1}\left(z_1\right)}\,d\vec{z}^2+\int_0^1[D_{\vec{z}^1}F\left(x^4\left(\cdot,(z_1,t,t,t)^T\right)\right)\Big|_{t=z_1}-\frac{x_1(z_1)-x_0(z_1)}{x_2(z_1)-x_0(z_1)}\times\\ \times D_{\vec{z}^1}F\left(x^4\left(\cdot,(z_1,z_1,t,t)^T\right)\right)\Big|_{t=z_1}]\prod_{i=1}^{3}\frac{x(z_1)-x_{i-1}(z_1)}{x_i(z_1)-x_{i-1}(z_1)}dz_1+\end{gathered}$$

$$+\int_0^1\int_{z_1}^1[\frac{x_1(z_1)-x_0(z_1)}{x_2(z_1)-x_0(z_1)}\cdot D_{\vec{z}^2}F\left(x^4\left(\cdot,(z_1,z_1,z_2,z_2)^T\right)\right)-D_{\vec{z}^2}F\left(x^4\left(\cdot,(z_1,t,z_2,z_2)^T\right)\right)\Big|_{t=z_1}]\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{2}\frac{x\left(z_1\right)-x_{i-1}\left(z_1\right)}{x_i\left(z_1\right)-x_{i-1}\left(z_1\right)}\,d\vec{z}^2+\int_0^1[\frac{x_1(z_1)-x_0(z_1)}{x_2(z_1)-x_0(z_1)}\cdot D_{\vec{z}^2}F\left(x^4\left(\cdot,(z_1,z_1,t,t)^T\right)\right)\Big|_{t=z_1}-$$

$$-D_{\vec{z}^2}F\left(x^4\left(\cdot,(z_1,t,t,t)^T\right)\right)\Big|_{t=z_1}]\times\prod_{i=1}^{2}\frac{x\left(z_1\right)-x_{i-1}\left(z_1\right)}{x_i\left(z_1\right)-x_{i-1}\left(z_1\right)}\,dz_1+$$

$$+\int_0^1\int_{z_1}^1\int_{z_2}^1[D_{\vec{z}^3}F\left(x^4\left(\cdot,(z_1,z_2,t,z_3)^T\right)\right)\Big|_{t=z_2}-\frac{x_2(z_2)-x_1(z_2)}{x_3(z_2)-x_1(z_2)}\times$$

$$\times D_{\vec{z}^3}F\left(x^4\left(\cdot,(z_1,z_2,z_2,z_3)^T\right)\right)]\times\prod_{i=1}^{2}\frac{x\left(z_1\right)-x_{i-1}\left(z_1\right)}{x_i\left(z_1\right)-x_{i-1}\left(z_1\right)}\frac{x\left(z_2\right)-x_2\left(z_2\right)}{x_3\left(z_2\right)-x_2\left(z_2\right)}\,d\vec{z}^3+$$

$$+\int_0^1\int_{z_1}^1[D_{\vec{z}^2}F\left(x^4\left(\cdot,(z_1,z_2,t,t)^T\right)\right)\Big|_{t=z_2}-\frac{x_2(z_2)-x_1(z_2)}{x_3(z_2)-x_1(z_2)}\times$$

$$\times D_{\vec{z}^2}F\left(x^4\left(\cdot,(z_1,z_2,z_2,t)^T\right)\right)\Big|_{t=z_2}]\times\prod_{i=1}^{2}\frac{x\left(z_i\right)-x_{i-1}\left(z_i\right)}{x_i\left(z_i\right)-x_{i-1}\left(z_i\right)}\frac{x\left(z_2\right)-x_2\left(z_2\right)}{x_3\left(z_2\right)-x_2\left(z_2\right)}\,d\vec{z}^2+$$

$$+\int_0^1\int_{z_1}^1[\frac{x_1(z_1)-x_0(z_1)}{x_3(z_1)-x_0(z_1)}\cdot D_{\vec{z}^2}F\left(x^4\left(\cdot,(z_1,z_1,z_1,z_2)^T\right)\right)-$$

$$-D_{\vec{z}^2}F\left(x^4\left(\cdot,(z_1,t,t,z_2)^T\right)\right)\Big|_{t=z_1}]\times\frac{x\left(z_1\right)-x_0\left(z_1\right)}{x_1\left(z_1\right)-x_0\left(z_1\right)}\prod_{i=2}^{3}\frac{x\left(z_1\right)-x_{i-1}\left(z_1\right)}{x_3\left(z_1\right)-x_{i-1}\left(z_1\right)}\,d\vec{z}^2+$$

$$+\int_0^1[\frac{x_1(z_1)-x_0(z_1)}{x_3(z_1)-x_0(z_1)}\cdot D_{\vec{z}^1}F\left(x^4\left(\cdot,(z_1,z_1,z_1,t)^T\right)\right)\Big|_{t=z_1}-$$

$$-D_{\vec{z}^1}F\left(x^4\left(\cdot,(z_1,t,t,t)\right)\right)\Big|_{t=z_1}]\frac{x\left(z_1\right)-x_0\left(z_1\right)}{x_1\left(z_1\right)-x_0\left(z_1\right)}\prod_{i=2}^{3}\frac{x\left(z_1\right)-x_{i-1}\left(z_1\right)}{x_3\left(z_1\right)-x_{i-1}\left(z_1\right)}\,dz_1$$

.

Далі отримаємо

$$R_3^{mN}(x(\cdot))=-p_{3,0}(x(\cdot))-p_{2,0}(x(\cdot))-p_{1,0}(x(\cdot))-F\left(x_0\left(\cdot\right)\right)+$$
$$+F\left(x\left(\cdot\right)\right)-p_{3,1}(x(\cdot))-p_{3,2}(x(\cdot))-p_{2,1}(x(\cdot))=F\left(x\left(\cdot\right)\right)-P_3^{mN}(x(\cdot)),$$

і

$$P_3^{mN}(x(\cdot))+R_3^{mN}(x(\cdot))=P_2^{mN}(x(\cdot))+R_2^{mN}(x(\cdot)).$$

Припустимо, що теорема справджується для $n-1$ і доведемо її справедливість для n .

У загальному випадку матимемо

$$R_n^{mN}(x(\cdot))=p_{n+1}^{mN}(x(\cdot))\big|_{x_{n+1}(z)=x(z)}=$$

$$=[p_{n+1,0}(x(\cdot))+p_{n+1,1}(x(\cdot))+p_{n+1,2}(x(\cdot))]_{x_{n+1}(z)=x(z)}\,.$$

Згідно з формулою (III.13), за якою побудований поліном $p_{n+1,0}(x(\cdot))+p_{n+1,1}(x(\cdot))$, при $x_{n+1}(z)=x(z)$ маємо

$$[p_{n+1,0}(x(\cdot))+p_{n+1,1}(x(\cdot))]_{x_{n+1}(z)=x(z)}=$$

$$=-F\left(x_0\left(\cdot\right)\right)-\sum_{k=1}^{n}p_{k,0}\left(x\left(\cdot\right)\right)+F\left(x\left(\cdot\right)\right).$$

Аналогічно, згідно з формулами (III.15), (III.16), за якими побудований поліном $p_{n,2}(x(\cdot))$, при $x_{n+1}(z)=x(z)$ маємо

$$p_{n+1,2}(x(\cdot))|_{x_n(z)=x(z)}=-\sum_{k=2}^{n}\left[p_{k,1}\left(x\left(\cdot\right)\right)+p_{k,2}\left(x\left(\cdot\right)\right)\right],$$

$n=2,3,4,\dots\,,\ p_{2,2}\left(x\left(\cdot\right)\right)\equiv 0$.

Звідси $R_n^{mN}(x(\cdot))=-P_n^{mN}(x(\cdot))+F(x(\cdot))$.

Отже, одержали аналог формули (III.12) за умови невиконання правила підстановки

$P_n^{mN}(x(\cdot)) + R_n^{mN}(x(\cdot)) = P_{n-1}^{mN}(x(\cdot)) + R_{n-1}^{mN}(x(\cdot)) = \dots = P_0^{mN}(x(\cdot)) + R_0^{mN}(x(\cdot)) =$
$= F(x_0(\cdot)) - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z_1} F(x_0(\cdot) + H(\cdot - z_1)(x(\cdot) - x_0(\cdot)))dz_1 = F(x(\cdot)),$
що і треба було довести. ■

Тепер ми у змозі довести наступний результат.

Теорема 2. *Для достатньо гладкого функціоналу $F(x(\cdot))$ функціональний поліном (III.9) з ядрами, що визначаються формулами (III.13), (III.15), (III.16) буде для нього інтерполяційним на континуальній множині вузлів (II.2), тобто будуть мати місце співвідношення*

$$F(x^n(\cdot, \vec{\xi}^n)) = P_n^{mN}(x^n(\cdot, \vec{\xi}^n)), \quad \vec{\xi}^n \in \Omega_{\vec{\xi}^n}. \quad \text{(III.19)}$$

Доведення. Для випадку $n = 1$ поліном (III.9) має вигляд

$$P_1^{mN}(x(\cdot)) = F(x_0(\cdot)) - \\ - \int_0^1 \frac{x(z_1) - x_0(z_1)}{x_1(z_1) - x_0(z_1)} \frac{\partial}{\partial z_1} F(x(\cdot, z_1)) dz_1.$$

Легко перевірити, що

$$F(x^1(\cdot, \vec{\xi}^1)) = P_1^{mN}(x^1(\cdot, \vec{\xi}^1)), \quad \vec{\xi}^1 \in \Omega_{\vec{\xi}^1}.$$

У [15] вказано, що при $n = 2$ інтерполяційний поліном необхідно шукати у вигляді

$$P_2(x(\cdot)) = K_0 + \int_0^1 K_1(z_1)[x(z_1) - x_0(z_1)]dz_1 + \\ + \int_0^1 \int_{z_1}^1 K_2(\vec{z}^2) \prod_{i=1}^2 [x(z_i) - x_{i-1}(z_i)]dz_2 dz_1 + \\ + \int_0^1 K_{1,1}(z_1) \prod_{i=1}^2 [x(z_1) - x_{i-1}(z_1)]dz_1, \quad \text{(III.20)}$$

де $K_i(\vec{z}^i) \in L_\infty(\Omega_i)$, $i = 1,2$, $K_{1,1}(z_1) \in L_\infty[0,1]$. Тоді, якщо $F(x(\cdot)) \in \mathcal{Z}_\infty^2$, де через $\mathcal{Z}_\infty^p$ означено клас функціоналів $F(x(\cdot)) : L_1(0,1) \to R^1$ і таких, що

$$f_p(\vec{z}^p) = \prod_{i=1}^p [x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)]^{-1} \frac{\partial^p}{\partial z_1 \dots \partial z_p} F(x^p(\cdot, \vec{z}^p)) \in L_\infty(\Omega_p), \quad p = 1,2$$

і крім того

$$f_{1,1}(z_1) = [x_1(z_1) - x_0(z_1)]^{-1}[x_2(z_1) - x_1(z_1)]^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} F\left(x^2\left(\cdot, \vec{z}^2\right)\right)\Big|_{z_2=z_1} - \right. \\ \left. - \frac{x_1(z_1) - x_0(z_1)}{x_2(z_1) - x_0(z_1)} \frac{\partial F\left(x^2\left(\cdot, (z_1, z_1)^T\right)\right)}{\partial z_1} \right\} \in L_\infty[0,1] \quad n = 1,2,$$

поліном (III.20) буде інтерполяційним на континуальній множині вузлів $x^2\left(z, \vec{\xi}^2\right)$, $0 \le \xi_1 \le \xi_2 \le 1$ тоді і тільки тоді, коли його ядра визначаються за формулами

$$K_0 = F(x_0(\cdot)), \quad K_p(\vec{z}^p) = (-1)^p f_p(\vec{z}^p),$$

$$p = 1,2, \quad K_{1,1}(z_1) = f_{1,1}(z_1).$$

У [17] доведено, що при $n = 3$ побудований функціональний поліном (III.9) з ядрами, що визначаються формулами (III.13), (III.15), (III.16) буде інтерполяційним для достатньо гладкого функціоналу $F(x(\cdot))$ на континуальній множині вузлів (II.2), тобто матиме місце співвідношення (III.19).

Випадок $n = 4$ був досліджений у [18], зокрема, доведено теорему 2 у випадку $n = 4$.

Отже, теорему 2 доведено для випадків $n = 1,2,3,4$. Оскільки формули, за якими одержуємо (III.9), є рекурентними, то можна стверджувати, що теорема 2 є правильною за будь-якого n .

Теорему доведено. ■

Робота виконана за часткового фінансування Фонду фундаментальних досліджень України (реєстраційний номер Ф 29.1/019).

Література

[1] Ульм С.Ю., Поль В.В. О построении обобщенных разделённых разностей // Изв. АН ЭССР, 1969. – Т.18. – №1. С.100–102.

[2] Prenter P.M. Lagrange and Hermite interpolation in Banach spaces // Approx. Theory, 1971. – V.4. – P.419–432.

[3] Соболевский П.И. Интерполяция функционалов и некоторые приближенные формулы для интегралов по гауссовой мере // Изв. АН БССР. Сер. Физ.-мат. наук, 1975. – №2. – С.5–12.

[4] Янович Л.А. Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам. – Минск: Наука и техника, 1976. – 384 с.

[5] Porter W.A. Synthesis of polynomic systems // SIAM J. Math.Anal., 1980. – V.11. – №2. – P.308–315.

[6] Макаров В.Л., Хлобыстов В.В. Интерполяционная формула типа Ньютона для нелинейных функционалов // ДАН АН СССР, 1989. – Т.307. – №3. – С.534–537.

[7] Макаров В.Л., Хлобыстов В.В. Основы теории полиномиального операторного интерполирования. Ин-т математики НАН Украины. – К., 1998. – 278 с.

[8] Макаров В.Л., Хлобыстов В.В., Янович Л.А. Интерполирование операторов. – К.: Наукова думка, 2000. – 406 с.

[9] Макаров В.Л., Хлобыстов В.В., Кашпур Е.Ф., Михальчук Б.Р. Интерполяционные полиномы типа Ньютона с континуальными узлами // Укр. мат. журнал. – 2003. – Т.55. – №6. – С.779–790.

[10] Micchelli C.A. A constructive approach to Kergin interpolation in $\Re^k$ // Rocky Mountain J.Math. №10. – 1980. – P.485–497.

[11] Micchelli C.A., Milman P. A formela for Kergin interpolation in $\Re^n$. // J.Approx. Theory № 29. – 1980. – P.294–296.

[12] Andersson M., Passare M. Complex Kergin Interpolation // J.Approx. Theory. №64. – 1991. – P.214–225.

[13] Filipsson L. Kergin interpolation in Banach spaces // J.Approx. Theory. № 127. – 2004. – P.108–123.

[14] Kergin P. A natural interpolation of C^k function // J.Approx. Theory. №29. – 1980. – P.278–293.

[15] Макаров В.Л., Демків І.І., Михальчук Б.Р. Необхідні і достатні умови існування функціонального інтерполяційного полінома на континуальній множині вузлів // ДАН України, 2003. – №7. – С.7–12.

[16] Михальчук Б.Р. Інтерполяція нелінійних функціоналів за допомогою інтегральних ланцюгових дробів // Укр. мат. журнал. – 1979. – Т.51. – №3. – С.364–375.

[17] Демків І.І. Інтерполяційний функціональний многочлен третього степеня, що не використовує правила підстановки // Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2010. – 53. – № 3. – С.46–59.

[18] Demkiv I.I. Interpolation funktional polynomial of the fourth order which does not use substitution rule // J. Numer. Appl. Math. No. 99, 2010. – P.1–17.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ПОЛИНОМЫ, ДЛЯ КОТОРЫХ НЕ ТРЕБУЕТСЯ ВЫПОЛНЕНИЕ ПРАВИЛА ПОДСТАНОВКИ

И. Демкив

Национальный университет "Львивськa политехника",
ул. С. Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина

В работе предлагается и исследуется конструкция функционального полинома типа Ньютона, для которого не требуется выполнения правила подстановки. Это достигается за счет расширения класса полиномов, в котором ищется интерполянт.

Ключевые слова: интерполяционный полином, континуальные узлы, функциональный полином.

2000 MSC: 65D05, 65D15

УДК: 519.65

FUNCTIONAL INTERPOLATION POLYNOMIALS THAT DO NOT USE SUBSTITUTION RULE

I. Demkiv

National University "Lvivska Politechnika"
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

Construction of functional polynomial of Newton type which does not need the substitution rule to be applied is suggested in this paper. This is reached by means of broadening of polynomial class in which interplant is looked for.

Keywords: interpolation polynomial, continual knot, functional polynomial.

2000 MSC: 65D05,65D15

УДК: 519.65