ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.687 № 687, (2010) с. 122–125

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.687 No 687, (2010) 122–125

МЕРОМОРФНІ У КРУЗІ З ПРОКОЛЕНИМ ЦЕНТРОМ ФУНКЦІЇ З ОБМЕЖЕНОЮ ДВОПАРАМЕТРИЧНОЮ ХАРАКТЕРИСТИКОЮ

І. Кшановський

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 10 жовтня 2010 р.)

Досліджено природу мероморфних у крузі з проколеним центром функцій з обмеженою двопараметричною характеристикою $T(s, r, f)$.

Ключові слова: мероморфна функція, лічильна функція, характеристика Неванлінни.

2000 MSC: 30D35

УДК: 517.53

Широкий загал задач теорії розподілу значень потребує вивчення властивостей мероморфних функцій у багатозв'язних областях. Особливу увагу заслуговує випадок двозв'язної області. За теоремою про відображення двозв'язних областей кожна двозв'язна область конформно еквівалентна деякому кільцю, проколеному кругові чи проколеній площині. Відомо, що голоморфні функції змінної z, визначені у кільці з центром $z = 0$, можуть бути розвинені в ряд Лорана, для них справедлива теорема Адамара про три кола, інтегральні середні їх модулів, а також логарифмів їх модулів є опуклими функціями відносно $\log |z|$. Вивченню властивостей мероморфних функцій у багатозв'язних областях присвячені роботи Г. Хельстрьома, Х. Віттіха, В. Зморовича, Г. Матевосяна, Р. Корхонена, А. Кондратюка. Зокрема, найновішими є підходи А. Кондратюка, А. Христіянина та І. Кшановського у спробах перенесення теорії Неванлінни на функції мероморфні в кільці чи проколеному крузі. Нещодавно А. Кондратюк запропонував дещо змінену двопараметричну характеристику щодо характеристики, введеної у роботі [1], та поширив цю характеристику на субгармонійні функції.

Нехай f – мероморфна функція в області $D = \{z : s_0 < |z| < r_0\}$, $0 \le s < 1$, $1 < r_0 < +\infty$. Нехай t_0 – довільне фіксоване число таке, що $s_0 < t_0 < r_0$. Визначимо функцію $n(t, f)$ так:

$$n(t, f) - n(t_0, f) = \mu((t_0, t]),\ t > t_0,$$

$$n(t_0, f) - n(t, f) = \mu((t, t_0]),\ t < t_0,$$

де значення $n(t_0, f)$ вибрано довільно, $\mu((\alpha, \beta]) = \sum_{\alpha<|b_j|\le\beta} 1$, $\{b_j\}$ – послідовність полюсів функції f з врахуванням їх кратностей.

Нехай

$$N(s, r, f) = \frac{1}{\log r}\int_1^r \frac{n(t, f)}{t}dt + \frac{1}{\log s}\int_s^1 \frac{n(t, f)}{t}dt,$$

$$s_0 < s < 1,\ 1 < r < r_0.$$

Зауважимо, що зміна функції $n(t, f)$ на сталу не змінює значення функції $N(s, r, f)$. Двопараметрична характеристика $T(s, r, f)$ визначається так:

$$T(s, r, f) = \frac{1}{\log r}m(r, f) - \frac{1}{\log s}m(s, f) - \left(\frac{1}{\log r} - \frac{1}{\log s}\right)m(1, f) + N(s, r, f), \quad s_0 < s < 1,\ 1 < r < r_0,$$

де

$$m(t, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(te^{i\theta})| d\theta.$$

Для подальших досліджень нам знадобляться такі позначення та результати.

Позначимо через $n^{(1)}(t, f)$ лічильну функцію полюсів функції f на множині $\{z : t \le |z| < 1\}$, $s_0 < t < 1$, $n^{(2)}(t, f)$ – лічильну функцію полюсів функції f на множині $\{z : 1 \le |z| < t\}$, $1 < t < r_0$, $n^*(1, f)$ – кількість полюсів функції f на одиничному колі $\{z : |z| = 1\}$.

Нехай

$$I(t, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f(te^{i\theta})| d\theta, \quad s_0 < t < r_0.$$

Теорема A.([3]) *Нехай f – мероморфна функція у кільці $D = \{z : s_0 < |z| < r_0\}$. Тоді*

$$I(r, f) - I(1, f) = \int_1^r \frac{n^{(2)}(t, 1/f)}{t}dt - \int_1^r \frac{n^{(2)}(t, f)}{t}dt + \left(k(f) - \frac{n^*(1, 1/f)}{2} + \frac{n^*(1, f)}{2}\right)\log r,$$

$$1 \le r < r_0, \tag{1}$$

$$I(s,f)-I(1,f)=\int\limits_s^1 \frac{n^{(1)}(t,1/f)}{t}dt-$$

$$-\int\limits_s^1 \frac{n^{(1)}(t,f)}{t}dt+\left(k(f)-\frac{n^*(1,1/f)}{2}+\frac{n^*(1,f)}{2}\right)\log s,$$

$$s_0<s\le 1, \qquad (2)$$

де $k(f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{Im}\left(\frac{f'(e^{i\theta})}{f(e^{i\theta})}ie^{i\theta}\right)d\theta$.

Лема B.([3]) *Нехай функція f мероморфна у кільці D, $f(z)\neq 0,\ \infty,\ |z|=1$. Тоді для будь-якого замкненого шляху γ в D, $\gamma(0)=1$, існує $k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz\in\mathbb{Z}$ таке, що для функції $g(z)=z^{-k}f(z)$ виконується*

$$\int\limits_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz=0.$$

Оскільки зміна функції $n(t,f)$ на сталу не змінює значення функції $N(s,r,f)$, то, не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $t_0=1,\ \ n(t_0,f)=0$.

Зауважимо, що

$$n^{(2)}(t,f)=n(t,f)+n^*(t,f)-n^*(1,f),\quad t>1,$$

$$n^{(1)}(t,f)=-n(t,f)+n^*(1,f)-n^*(t,f),\quad t<1,$$

де $n^*(t,f)$ – кількість полюсів функції f на колі $\{z:|z|=t\}$.

Звідси

$$\frac{1}{\log r}\int\limits_1^r \frac{n^{(2)}(t,f)}{t}dt-\frac{1}{\log s}\int\limits_s^1 \frac{n^{(1)}(t,f)}{t}dt=$$

$$=\frac{1}{\log r}\int\limits_1^r \frac{n(t,f)+n^*(t,f)-n^*(1,f)}{t}dt-$$

$$-\frac{1}{\log s}\int\limits_s^1 \frac{-n(t,f)+n^*(1,f)-n^*(t,f)}{t}dt=$$

$$=\frac{1}{\log r}\int\limits_1^r \frac{n(t,f)}{t}dt+\frac{1}{\log s}\int\limits_s^1 \frac{n(t,f)}{t}dt.$$

Поділимо рівність (1) на $\log r$ та віднімемо від одержаного результату рівність (2), поділену на $\log s$. Враховуючи, зроблені вище обчислення, отримаємо аналог формули Йенсена

$$\frac{1}{\log r}I(r,f)-\frac{1}{\log s}I(s,f)-\left(\frac{1}{\log r}-\frac{1}{\log s}\right)I(1,f)=$$

$$=\frac{1}{\log r}\int\limits_1^r \frac{n(t,1/f)-n(t,f)}{t}dt+$$

$$+\frac{1}{\log s}\int\limits_s^1 \frac{n(t,1/f)-n(t,f)}{t}dt.$$

Зважаючи на те, що

$$I(t,f)=m(t,f)-m(t,1/f),\quad t>0,$$

одержимо таку рівність:

$$T(s,r,f)=T(s,r,1/f),\quad s_0<s<1,\ \ 1<r<r_0.$$

Функція $N(s,r,f)$ – невід'ємна та неспадна функція по кожному з параметрів. Дійсно, її правостороння похідна, наприклад, відносно змінної r

$$N'_r(s,r,f)=\frac{1}{r\log^2 r}\left(n(r,f)\log r-\int\limits_1^r \frac{n(t,f)}{t}dt\right)\ge$$

$$\ge\frac{1}{r\log^2 r}(n(r,f)\log r-n(r,f)\log r)=0.$$

Надалі розглядатимемо функції, мероморфні в крузі з проколеним центром.

Теорема 1. *Нехай f – мероморфна в проколеному крузі $\{z:0<|z|<r_0\}, 1<r_0<+\infty$ функція з обмеженою характеристикою $T(s,r,f)$. Тоді f продовжується до мероморфної в крузі $\{z:|z|<r_0\}$ функції з обмеженою неванлінновою характеристикою.*

Доведення теореми 1. Зафіксуємо $r=r^*$, $1<r^*<r_0$. З обмеженості характеристики негайно отримуємо такі асимптотичні рівності:

$$m(s,f)=O(\log\frac{1}{s}),\ s\to 0, \qquad (3)$$

$$\int\limits_s^1 \frac{-n(t,f)}{t}dt=O(\log\frac{1}{s}),\ s\to 0. \qquad (4)$$

З огляду на (4), робимо висновок, що функція $f(z)$ в околі нуля має скінченну кількість полюсів. Дійсно, нехай $\int\limits_s^1 \frac{-n(t,f)}{t}dt\le C\log\frac{1}{s},\ s\to 0$. Позначимо $p=[C]$. Випишемо полюси в області $\{z:0<|z|<1\}$ в порядку спадання величин їх модулів. Якщо існує $(p+1)$-й полюс b_{p+1}, то

$$\int\limits_s^1 \frac{-n(t,f)}{t}dt\ge\int\limits_s^{|b_{p+1}|}\frac{-n(t,f)}{t}dt\ge(p+1)\log\frac{|b_{p+1}|}{s}=$$

$$=(p+1)\log|b_{p+1}|+(p+1-C)\log\frac{1}{s}+C\log\frac{1}{s}>C\log\frac{1}{s},$$

$$s\to 0,$$

що приводить до протиріччя. Аналогічно показуємо, що $f(z)$ в околі нуля має скінченну кількість нулів.

Отже, існує таке $t_0 > 0$, що $f(z)$ – аналітична функція без нулів в області $\{z : 0 < |z| < t_0\}$. Розглянемо функцію $h(w) = f(wt_0/2),\ 0 < |w| < 2$. Тоді

$$m(\rho, h) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |h(\rho e^{i\theta})|d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(\frac{t_0\rho}{2}e^{i\theta})|d\theta = O(\log\frac{2}{t_0\rho}) = O(\log\frac{1}{\rho}),$$

$$\rho \to 0.$$

З леми B існує таке $k_0 \in \mathbb{Z}$, що в області $\{w : 0 < |w| < 2\}$ визначена однозначна вітка $\log G(w)$, де $G(w) = w^{-k_0}h(w)$. Розглянемо розвинення в ряд Лорана

$$\log G(w) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k w^k.$$

Нехай $w = \rho e^{i\theta},\ 0 < \rho < 2$. Тоді

$$\log|G(w)| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Re}(\alpha_k w^k) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\alpha_k w^k + \overline{\alpha}_k \overline{w}^k) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\alpha_k\rho^k + \overline{\alpha}_{-k}\rho^{-k})e^{ik\theta}.$$

Звідси

$$\frac{1}{2}(\alpha_k\rho^k + \overline{\alpha}_{-k}\rho^{-k}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|G(\rho e^{i\theta})|e^{-ik\theta}d\theta, \quad k\in\mathbb{Z}. \qquad (5)$$

Оскільки функція $h(w)$ не має ні нулів, ні полюсів, то з формули (2) та з рівності

$$\log x = \log^+ x - \log^+\frac{1}{x}, \quad x > 0,$$

одержуємо

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|\frac{1}{h}(\rho e^{i\theta})\right| d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|h(\rho e^{i\theta})|d\theta + C_0\log\frac{1}{\rho} -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|h(e^{i\theta})|d\theta = O(\log\frac{1}{\rho}), \quad \rho\to 0.$$

Враховуючи зроблені вище викладення, а також рівність

$$|\log x| = \log^+ x + \log^+\frac{1}{x}, \quad x > 0,$$

матимемо

$$|\alpha_k\rho^k + \overline{\alpha}_{-k}\rho^{-k}| \le \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |\log|G(\rho e^{i\theta})||d\theta \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |\log|h(\rho e^{i\theta})||d\theta + 2|k_0||\log\rho| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|h(\rho e^{i\theta})|d\theta +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|\frac{1}{h}(\rho e^{i\theta})|d\theta + 2|k_0||\log\rho| = O(\log\frac{1}{\rho}), \quad \rho\to 0.$$

Звідси випливає, що $\alpha_k = 0,\ k < 0$. Отже, функція $\log G(w)$ продовжується до аналітичної функції в області $\{w : 0 \le |\xi| < 2\}$, звідки випливає, що в околі точки $z = 0$ функція $f(z)$ допускає зображення $f(z) = z^m q(z), m\in\mathbb{Z}$, де функція $q(z)$ аналітична в околі точки $z = 0,\ q(0) \ne 0$.

Зауважимо, що з обмеженості характеристики $T(s, r, f)$, зокрема, випливає обмеженість функцій $m(r, f)$ та $\int_1^r \frac{n(t,f)}{t}dt$. Нехай $n_0(t, f)$ – лічильна функція полюсів функції f в крузі $\{z : |z| \le t\}$, $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ таке, що функція f не має полюсів в області $\{z : 0 < |z| < \varepsilon_0\}$. Тоді для всіх $r \ge r^* > 1$ виконується

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f) = m(r, f) +$$

$$+\int_0^r \frac{n_0(t,f) - n_0(0,f)}{t}dt + n_0(0, f)\log r =$$

$$= m(r, f) + \int_{\varepsilon_0}^1 \frac{n_0(t,f) - n_0(0,f)}{t}dt +$$

$$+\int_1^r \frac{n_0(t,f) - n_0(0,f)}{t}dt + n_0(0, f)\log r \le$$

$$\le m(r, f) + (n_0(1, f) - n_0(0, f))\log(1/\varepsilon_0) + n_0(0, f)\log r_0 +$$

$$+\int_1^r \frac{n_0(1,f) + n(t,f) - n_0(0,f)}{t}dt \le C^*.$$

Оскільки $T(r, f)$ – неспадна функція, то $T(r, f) \le C^*$ для всіх $r : 0 \le r < r_0$. Тобто функція $f(z)$ продовжується до мероморфної в крузі $\{z : |z| < r_0\}$ функції з обмеженою неванлінновою характеристикою.

Література

[1] Kondratyuk A. Meromorphic functions with several essential singularities. I // Matematychni Studii 30(II), 2008. – P. 125–131.

[2] Khrystiyanyn A., Kondratyuk A. On the Nevanlinna Theory for meromorphic functions on annuli. I // Matematychni Studii 23, 2005. – P. 19–30.

[3] Кшановський І. Властивості мероморфних функцій у двозв'язних областях: дис. на здобуття наук. ступ. канд. фіз-мат. наук : спец. 01.01.01 "Математичний аналіз"// І. П. Кшановський. – Львів, 2008. – 138 с.

МЕРОМОРФНЫЕ В КРУГЕ С ВЫКОЛОТЫМ ЦЕНТРОМ ФУНКЦИИ С ОГРАНИЧЕННОЙ ДВОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

И. Кшановский

Национальный университет "Львивська политехника",
ул. С. Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина

Изучена природа мероморфных в круге с выколотым центром функций с ограниченной двопараметрической характеристикой $T(s, r, f)$.

Ключевые слова: мероморфная функция, характеристика Неванлинны.

2000 MSC: 30D35

УДК: 517.53

ON THE MEROMORPHIC IN A PUNCTURED DISK FUNCTIONS WITH BOUNDED TWO-PARAMETRIC CHARACTERISTIC

I. Kshanovskyy

National University "Lvivska Politechnika"
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

We study the structure of meromorphic in a punctured disk functions with bounded two-parametric characteristic.

Keywords: meromorphic function, counting function, Nevanlinna characteristic.

2000 MSC: 30D35

УДК: 517.53