ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.687 № 687, (2010) с. 126–132

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.687 No 687, (2010) 126–132

ВИБРАНІ ПИТАННЯ СТІЙКОСТІ СИСТЕМ ВИПАДКОВОЇ СТРУКТУРИ ЗІ СКІНЧЕННОЮ ПІСЛЯДІЄЮ З УРАХУВАННЯМ ЗОВНІШНІХ МАРКОВСЬКИХ ПЕРЕМИКАНЬ

Т.О. Лукашів[a], Я.М. Чабанюк[b], В.К. Ясинський[a]

[a] *Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича*
(28034, Чернівці, вул. Коцюбинського 2)
[b] *Національний університет "Львівська політехніка"*
(79013, Львів, вул. С.Бандери 12)

(Отримано 2 листопада 2010 р.)

Використано апарат функціоналів Ляпунова-Красовського для дослідження асимптотичної стохастичної стійкості в цілому, асимптотичної стійкості в середньому квадратичному в цілому сильного розв'язку дифузійних стохастичних диференціально-функціональних рівнянь зі скінченною післядією з урахуванням як внутрішніх марковських параметрів, так і зовнішніх збурень типу ланцюга Маркова.

Ключові слова: стохастичні диференціально-функціональні рівняння, марковські перемикання, функціонал Ляпунова-Красовського.

2000 MSC: 60J10, 60J27, 60H10, 68U20

УДК: 519.217; 519.718

Вступ

Початкові дослідження стійкості ймовірнісних систем у різних постановках проводились в працях [1; 2; 3; 4]. Однак оригінальний підхід до задач стійкості систем з випадковими параметрами вперше був запропонований у працях [5], [6]. Цей підхід дозволив використати для стохастичних диференціальних рівнянь (СДР) основні результати класичної теорії стійкості. В результаті вдалося встановити характерні властивості ймовірнісних систем. У цьому напрямку працювали видатні математики XX–XXI ст. Р.З. Хасьмінський, В.С. Королюк, Й.І. Гіхман, А.В. Скороход, Г.Дж. Кушнер, В.М. Константинов, В.В. Калашников, Є.Ф. Царков, В.К. Ясинський та інші. У всіх згаданих роботах розглядалася в основному стійкість випадкових процесів з неперервними фазовими траєкторіями, як розв'язок СДР Іто, або випадкових процесів, які мають скінченні стрибки і описуються узагальненими стохастичними рівняннями Іто-Скорохода. У монографії І.Я. Каца [6] розглянута модель стохастичних рівнянь з марковськими параметрами, так званих рівнянь з випадковою структурою, які дозволяють розглядати стійкість систем з розривними фазовими траєкторіями. Відмітимо, що така ситуація природно виникає при описанні численних фізико-технічних процесів. У монографії Є.Ф.Царкова, М.Л.Свердана [7] розглянута стійкість детермінованих різницевих і динамічних систем з урахуванням марковських параметрів та імпульсних марковських перемикань. Праці [8; 9] узагальнюють результати монографій [6] і [7], а саме: розглянуто стохастичне дифузійне рівняння з урахуванням марковських параметрів, які зумовлюють внутрішню зміну структури системи із збереженням властивості стохастичної неперервності реалізації за І.Я. Кацом, а також враховуються зовнішні марковські перемикання у випадкові моменти часу за Є.Ф. Царковим. У роботі узагальнено результати В.К. Ясинського, І.В. Юрченка, Т.О. Лукашіва [8] на випадок систем випадкової структури зі скінченною післядією з урахуванням зовнішніх марковських перемикань.

I. Постановка задачі

На ймовірнісному базисі [10] $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{F} \equiv \{\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}, t \geq 0\}, \mathbf{P})$ розглянемо дифузійне стохастичне диференціально-функціональне рівняння, яке будемо трактувати як динамічну систему випадкової структури [6] зі скінченною післядією

$$dx(t) = a(t, \xi(t), x_t)dt + b(t, \xi(t), x_t)dw(t), \qquad (1)$$

із зовнішніми марковськими перемиканнями

$$\Delta x(t)|_{t=t_k} = g(t_k-, \xi(t_k-), \eta_k, x(t_k-)),$$
$$t_k \in S \equiv \{t_n\} \Uparrow, n = 0, 1, 2, ..., \lim_{n\to\infty} t_n = +\infty, \qquad (2)$$

і початковими умовами

$$\xi(t_0) = y \in \mathbf{Y}, x_{t_0} = \varphi(\Theta) \in \mathbf{D} \equiv \mathbf{D}([t_0 - \tau, t_0], \mathbf{R}^m),$$
$$\eta_{k_0} = h \in \mathbf{H}. \qquad (3)$$

Тут $\xi(t)$ – марковський процес із значеннями в метричному просторі $\mathbf{Y}$ з перехідною ймовірністю $\mathbf{P}(s, y, t); (\eta_k, k \geq 0)$ – ланцюг Маркова із значеннями в метричному просторі $\mathbf{H}$ з перехідною ймовірністю на k-му кроці $\mathbf{P}_k(h, G)$; $x_t \equiv x(t + \Theta)$; $\Theta \in [t_0 - \tau, t_0]$, $\tau > 0$; $w(t) \equiv w(t, \omega)$ – одновимірний стандартний вінерів процес [11], $\mathbf{D}$ - простір Скорохода неперервних справа функцій, що мають лівосторонні границі [12].

Припустимо, що вимірні за сукупністю змінних відображення $a : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{Y} \times \mathbf{D} \to \mathbf{R}^m$, $b : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{Y} \times \mathbf{D} \to \mathbf{R}^m$ та $g : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{Y} \times \mathbf{H} \times \times \mathbf{D} \to \mathbf{R}^m$ задовольняють за останнім аргументом умову Ліпшиця

$$|a(t,y,\varphi) - a(t,y,\psi)|^2 + |b(t,y,\varphi) - b(t,y,\psi)|^2 +$$
$$+|g(t,y,\varphi) - g(t,y,\psi)|^2 \le L||\varphi - \psi||^2, L > 0. \quad (4)$$

при $\forall t \ge 0, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}$, і умову

$$|a(t,y,0)| + |b(t,y,0)| + |g(t,y,h,0)| = c < \infty, \quad (5)$$

де норма в просторі Скорохода визначається рівністю

$$||\varphi|| = \sup_{t_0 - \tau \le \Theta \le t_0} |\varphi(\Theta)|. \quad (6)$$

Зауваження 1. Простір Скорохода $\mathbf{D}$ не є повним відносно норми (5), тому будемо працювати у розширеному просторі Скорохода $\bar{\mathbf{D}}$, який містить всі границі фундаментальних послідовностей [12]. Надалі $\mathbf{D}$ будемо розуміти як розширенний простір $\bar{\mathbf{D}}$.

Вказані умови щодо a, b, і g гарантують існування сильного розв'язку задачі (1)-(3) з точністю до стохастичної еквівалентності при будь-яких $t_0 \ge 0$, $\varphi \in \overline{\mathbf{D}}$ і заданих реалізаціях марковського процесу $\{\xi(t), t \ge t_0\} \in \mathbf{Y}$ і ланцюга Маркова $\{\eta_k, k \ge k_0\}$ [12].

II. Основні означення

Випадкові зміни структури параметра $\xi(t) \in \mathbf{Y}$ в дифузійному стохастичному диференціальному рівнянні (1), як правило, враховуватимемо одним із таких способів [6; 7].

I. Нехай $\xi(t) \in \mathbf{Y}$ – суто розривний скалярний марковський процес, умовна ймовірність якого допускає розклад [11]

$$\mathbf{P}\{\xi(t+\Delta t) \in [\beta, \beta + \Delta\beta]/\xi(t) = \alpha \ne \beta\} =$$
$$= p(t,\alpha,\beta)\Delta\beta\Delta t + o(\Delta t),$$
$$\mathbf{P}\{\xi(\tau) = \alpha, t < \tau < t + \Delta t/\xi(t) = \alpha\} =$$
$$= 1 - p(t,\alpha)\Delta t + o(\Delta t),$$

де $P\{\cdot/\cdot\})$ – умовна ймовірність; $o(\Delta t)$ – нескінченно мала величина вищого порядку малості відносно Δt. Зазначимо, що за умови регулярності майже всі реалізації є кусково-сталими неперервними справа функціями.

II. Скалярний процес $\xi(t)$ – однорідний марковський ланцюг зі скінченним числом станів $\mathbf{Y} \equiv \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ і відомими параметрами q_{ij} за умови $q_i = \sum\limits_{j \ne i} q_{ij}, i,j = \overline{1,k}$. При цьому умовні ймовірності допускають розклад

$$\mathbf{P}\{\xi(t+\Delta t) = y_i/\xi(t) = y_i\} = q_{ij}\Delta t + o(\Delta t),$$

$$\mathbf{P}\{\xi(\tau) = y_i, t < \tau < t + \Delta t/\xi(t) = y_i\} = 1 - q_i\Delta t + o(\Delta t).$$

III. У момент τ зміни структури системи $y_i \to y_j$ відбувається випадкова стрибкоподібна зміна фазового вектора $x(\tau - 0) = x, x(\tau) = z$, для якого задана умовна щільність $\mathbf{P}_{ij}(\tau, z)$, а саме:

$$\mathbf{P}\{x(\tau) \in [z, z+dz]/\xi(t-0) = x\} = p_{ij}(\tau, z/x)dz + o(dz).$$

Позначимо через $\mathbf{P}_k((y,h), \Gamma \times G)$ перехідну ймовірність ланцюга Маркова $(\xi(t_k), \eta_k)$ на k-му кроці. Відповідно до прийнятих в теорії ймовірностей позначень [11; 12; 13] (зв'язаних із цим ланцюгом) введемо індекси так, щоб виконувались рівності

$$\mathbf{P}^{t_k}_{y,h}(\xi(t_{k+1}) \in \Gamma, \eta_{k+1} \in G) \equiv \mathbf{P}_k((y,h), \Gamma \times G)$$

при всіх $t_k \ge t_0, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}$ і борелевих $\Gamma \in \mathbf{Y}$ та $G \in \mathbf{H}$.

Тепер введемо функцію

$$\mathbf{P}_k((y,h,\varphi), \Gamma \times G \times C) \equiv$$
$$\equiv \mathbf{P}^{t_k}_{y,h}(x(t_k, \varphi, y, h) \in C, \xi(t_{k+1}) \in \Gamma, \eta_{k+1} \in G)$$

при всіх $t_k \in S \cup \{t_0\}, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \varphi \in \mathbf{D}, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}$ і борелевих $C \subset \mathbf{D}, \Gamma \subset \mathbf{Y}, G \in \mathbf{H}$.

Означення 1. Дискретний оператор Ляпунова $(l\nu_k)(y,h,\varphi)$ на послідовності вимірних скалярних функцій $\nu_k(y,h,\varphi) : \mathbf{Y} \times \mathbf{H} \times \mathbf{D} \to \mathbf{R}^1, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, для СДР (1) із зовнішніми марковськими перемиканнями (2) визначаємо рівністю [11]

$$l\nu_k(y,h,\varphi) \equiv \int\limits_{\mathbf{Y} \times \mathbf{H} \times \mathbf{D}} \mathbf{P}_k(y,h,\varphi)(du \times dz \times dl) \times$$
$$\times \nu_{k+1}(u,z,l) - \nu_k(y,h,\varphi). \quad (7)$$

Означення 2. Функціоналом Ляпунова-Красовського для системи випадкової структури (1)-(3) назвемо послідовність невід'ємних функцій $\{\nu_k(y,h,\varphi), k \ge 0\}$ таких, що виконуються умови:

1) при всіх $k \ge 0, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}, \varphi \in \mathbf{D}$ визначено дискретний оператор Ляпунова $(l\nu_k)(y,h,x)$ (7);

2) при $r \to +\infty$

$$\underline{\nu}(r) \equiv \inf_{\substack{k \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{Y} \\ h \in \mathbf{H}, ||\varphi|| \ge r}} \nu_k(y,h,\varphi) \to +\infty; \quad (8)$$

3) при $r \to 0$

$$\bar{\nu}(r) \equiv \sup_{\substack{k \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{Y} \\ h \in \mathbf{H}, ||\varphi|| \le r}} \nu_k(y,h,\varphi) \to 0, \quad (9)$$

причому $\bar{\nu}(r)$ і $\underline{\nu}(r)$ неперервні і монотонні.

Будемо розглядати стійкість тривіального розв'язку $x \equiv 0$ системи (1)-(3), тобто виконання (5) при $c = 0$.

Оскільки сильний розв'язок $x(t) \equiv x(t,\omega) \in \mathbf{R}^m$ СДР (1) одночасно визначається за допомогою початкових даних $x_{t_0} = \varphi, \xi(t_0) = y$, $\eta_{k_0} = h$, то надалі його позначатимемо $x_t(t_0, y, \varphi) \equiv x(t + \Theta, t_0, y, h, \varphi), -\tau \le \Theta \le 0$.

Означення 3. Систему випадкової структури (1)–(3) назвемо:

– стійкою за ймовірністю в цілому, якщо для $\forall \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що з нерівності $||\varphi|| < \delta$ випливає нерівність

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t \geq t_0} ||x_t(t_0, y, h, \varphi)|| > \varepsilon_1\right\} < \varepsilon_2$$

при всіх $y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}, \varphi \in \mathbf{D}$ і $t_0 \geq 0$; – асимптотично стохастично стійкою в цілому, якщо вона стійка за ймовірністю і для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta_1 > 0$ таке, що

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{t \geq t_0} ||x_t(t_0, y, h, \varphi)|| > \varepsilon\right\} = 0$$

при всіх $||\varphi|| < \delta_1, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}, \varphi \in \mathbf{D}$ і $T \geq t_0 \geq 0$;

p-стійкою (при деякому $p > 0$) в цілому, якщо для $\forall \varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta_2 > 0$, що з нерівності $||\varphi|| < \delta_2$ випливає нерівність

$$\mathbf{E}\{||x_t(t_0, y, f, \varphi)||^p\} < \varepsilon$$

при всіх $t > t_0, t_0 \geq 0, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}, \varphi \in \mathbf{D}$

– асимптотично p-стійкою (при деякому $p > 0$) в цілому, якщо вона p-стійка та існує таке $\delta_1 > 0$, що з нерівності $||\varphi|| < \delta_1$ випливає

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}} \mathbf{E}\{||x_t(t_0, y, h, \varphi)||^p\} = 0$$

при всіх $t_0 \geq 0$.

Зауважимо, що при $p = 2$ матимемо стійкість у середньому квадратичному (l.i.m.) і асимптотичну стійкість у l.i.m.

III. Стійкість систем випадкової структури зі скінченною післядією та зовнішніми марковськими перемиканнями

Встановимо достатні умови стійкості тривіального розв'язку динамічної системи випадкової структури зі скінченною післядією у різних ймовірнісних розуміннях.

Для подальшого викладення використовуватимемо оцінку розв'язку задачі (1)–(3) на інтервалах $[t_k, t_{k+1})$.

Лема *При виконанні умов (4), (5) при всіх $k \geq 0$ для сильного розв'язку задачі Коші (1)-(3) має місце нерівність*

$$\mathbf{E}\left\{\sup_{t_k \leq t \leq t_{k+1}} ||x_t||^2\right\} \leq 15(1+4L)e^{5L(1+4L)(t_{k+1}-t_k)^2}\cdot$$

$$\cdot(\mathbf{E}\left\{x^2(t_k)\right\} + 2c^2(t_{k+1}-t_k)). \qquad (10)$$

□ *Доведення.* При всіх $t \in [t_k, t_{k+1}), t_k \geq 0$, легко записати нерівність

$$||x_t|| \leq |x(t_k)| + \int_{t_k}^{t} |a(\tau, y, x_\tau) - a(\tau, y, 0)| d\tau +$$

$$+ \int_{t_k}^{t} ||a(\tau, y, 0)|| d\tau + \int_{t_k}^{t} |b(\tau, y, x_\tau) - b(\tau, y, 0)| dw(\tau) +$$

$$+ \int_{t_k}^{t} |b(\tau, y, 0)| dw(\tau).$$

Піднісши до квадрата ліву і праву частини одержаної нерівності, обчислюючи sup від одержаного виразу, використовуючи нерівність Коші-Буняковського і нерівність для оцінки умовного математичного сподівання від квадрата супремума інтеграла Вінера-Іто, враховуючи (4), (5), одержимо

$$\mathbf{E}\left\{\sup_{t_k \leq t \leq t_{k+1}} ||x_t||^2\right\} \leq 5\left[\mathbf{E}\{x^2(t_k)\} + 2c^2(t_{k+1}-t_k) +\right.$$

$$+ (L(t_{k+1}-t_k) + 4L^2(t_{k+1}-t_k))\cdot$$

$$\left.\cdot\, \mathbf{E}\left\{\sup_{t_k \leq t \leq t_{k+1}} \int_{t_k}^{t_k} ||x_\tau||^2 d\tau\right\}\right].$$

Далі, застосовуючи нерівність Гронулла, легко побачити, що

$$\mathbf{E}\left\{\sup_{t_k \leq t \leq t_{k+1}} ||x_t||^2 / \mathfrak{F}_{t_k}\right\} \leq 5(\mathbf{E}\{x^2(t_k)\} +$$

$$+ 2c^2(t_{k+1}-t_k))e^{5L(1+4L)(t_{k+1}-t_k)^2}.$$

Для $t = t_{k+1}$ сильний розв'язок системи (1)–(3), очевидно, повинен задовольняти нерівність

$$\mathbf{E}\{|x^2_{t_{k+1}} / \mathfrak{F}_{t_k}|\} \leq 3[\mathbf{E}\{|x^2(t_{k+1}-)/\mathfrak{F}_{t_k}|\} +$$

$$+ 2\mathbf{E}\{|g(t_{k+1}, \xi(t_{k+1}-), \eta_{k+1}, x_{k+1}) -$$

$$- g(t_{k+1}, \xi(t_{k+1}-), \eta_{k+1}, 0)|^2 / \mathfrak{F}_{t_k}\} +$$

$$+ 2\mathbf{E}\{|g(t_{k+1}, \xi(t_{k+1}-), \eta_{k+1}, 0)|^2 / \mathfrak{F}_{t_k}\}] \leq$$

$$\leq 3[(1+2L)\mathbf{E}\left\{\sup_{t_k \leq t \leq t_{k+1}} |x(t)|^2 / \mathfrak{F}_{t_k}\right\} + 2c^2].$$

Об'єднуючи дві останні нерівності, одержимо потрібну нерівність (10) леми. ■

Зауваження 1. В подальшому вважатимемо, що $c = 0$ в (10), а також

$$k_0 = \begin{cases} sup\{k \in |t_k \leq t_0|\}, t_0 \geq t_1, \\ 0, \quad t \in [0, t_1\} \end{cases}$$

Теорема 1. *Нехай:*

1) $0 < |t_{k+1} - t_k| \leq \Delta, k \geq 0, \Delta > 0$*;*

2) виконується умова Ліпшиця (4);

3) існують послідовності функціоналів Ляпунова-Красовського $\nu_k(y,h,\varphi)$ *і* $a_k(y,h,\varphi)$, $k \geq 0$ *такі, що на підставі системи правильна нерівність*

$$l\nu_k(y,h,\varphi) \leq -a_k(y,h,\varphi). \tag{11}$$

Тоді сильний розв'язок системи випадкової структури (1), (3) із зовнішніми збуреннями типу ланцюга Маркова (2) асимптотично стохастично стійкий в цілому.

□ *Доведення.* Позначимо через $\mathfrak{F}_{t_k}$ – мінімальну σ-алгебру, відносно якої вимірні $\xi(t)$ при всіх $t \in [t_0, t_k]$ і η_n при $n \leq k$. Тоді умовне математичне сподівання можна обчислити за формулою [11]

$$\mathbf{E}\{\nu_{k+1}(\xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}, x_{t_{k+1}})/\mathfrak{F}_{t_k}\} =$$

$$= \int\limits_{Y\times H\times\mathbf{D}} \mathbf{P_k}(y,h,\varphi)(du\times dz\times dl)\nu_{k+1}(u,z,l)\Bigg|_{\substack{y=\xi(t_k)\\ h=\eta_k\\ \varphi=x_{t_k}}}. \tag{12}$$

У цьому випадку за означенням дискретного оператора Ляпунова $(l\nu_k)(y,h,\varphi)$ з рівності (12) одержимо, враховуючи (11), нерівність

$$\mathbf{E}\{\nu_{k+1}(\xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}, x_{t_{k+1}})/\mathfrak{F}_{t_k}\} = \nu_k(\xi(t_k), \eta_k, x_{t_k}) +$$

$$+ (l\nu_k)(\xi(t_k), \eta_k, x_{t_k}) \leq \overline{\nu}(||x_{t_k}||). \tag{13}$$

З рівності (10) (за нерівністю Ляпунова для моментів [10] – з існування другого моменту випливає існування першого моменту) і властивостей функції $\overline{\nu}$ випливає існування умовного математичного сподівання лівої частини нерівності (13).

Тепер, на основі (12), запишемо дискретний оператор Ляпунова $(l\nu_k)(\xi(t_k), \eta_k, x_{t_k})$ вздовж розв'язків (1)-(3).

$$(l\nu_k)(\xi(t_k), \eta_k, x_{t_k}) = \mathbf{E}\{\nu_{k+1}(\xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}, x_{t_{k+1}})/\mathfrak{F}_{t_k}\} -$$

$$-\nu_k(\xi(t_k), \eta_k, x_{t_k}) \leq -a_k(\xi(t_k), \eta_k, x_{t_k}) \leq 0. \tag{14}$$

Тоді при $k \geq 0$ виконується нерівність

$$\mathbf{E}\{\nu_{k+1}(\xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}, x_{t_{k+1}})/\mathfrak{F}_{t_k}\} \leq$$

$$\leq \nu_k(\xi(t_k), \eta_k, x_{t_k}).$$

Тоді, за означенням супермартингала [10], послідовність випадкових величин $\{\nu_k(\xi(t_k), \eta_k, x_{t_k})\}$ при $k \in \mathbf{N}$ утворює супермартингал відносно $\mathfrak{F}_{t_k}$ [7].

Далі, взявши математичне сподівання від обох частин нерівності (14) і просумувавши за k від $n \geq k_0$ до N, одержимо

$$\mathbf{E}\{\nu_{N+1}(\xi(t_{N+1}), \eta_{N+1}, x_{t_{N+1}})\} - \mathbf{E}\{\nu_n(\xi(t_n), \eta_n, x_{t_n})\} =$$

$$= \sum_{k=n}^{N} \mathbf{E}\{l\nu_k(\xi(t_k), \eta_k, x_{t_{t_k}})\}$$

$$\leq -\sum_{k=n}^{N} \mathbf{E}\{a_k(\xi(t_k), \eta_k, x_{t_{t_k}})\} \leq 0. \tag{15}$$

Потім маємо

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\geq t_0} ||x_t(t_0,y,h,\varphi)|| > \varepsilon_1\right\} =$$

$$= \mathbf{P}\left\{\sup_{n\in\mathbf{N}} \sup_{t_{k_0+n-1}\leq t\leq t_{k_0+n}} ||x_t(t_0,y,h,\varphi)|| > \varepsilon_1\right\} \leq$$

$$\leq \left\{\sup_{n\in\mathbf{N}} ||x_{t_{k_0+n-1}}(t_0,y,h,\varphi)|| > \varepsilon_1\right\} \leq \tag{16}$$

$$\leq \Big\{\sup_{n\in\mathbf{N}} \nu_{t_{k_0+n-1}}(\xi(t_{k_0+n-1}), \eta_{k_0+n-1}, x_{k_0+n-1}) \geq$$

$$\geq \overline{\nu}(\varepsilon_1)\Big\}, \forall\varepsilon_1 > 0.$$

Дійсно, якщо $\sup ||x_{t_k}|| \geq r$, то на основі (8) виконується нерівність

$$\sup_{k\geq k_0} \nu_k(\xi(t_k), \eta_k, x_{t_k}) \geq \inf_{\substack{k\geq k_0, y\in\mathbf{Y}\\ h\in\mathbf{H}, |x|\geq r}} \nu_k(y,h,\varphi) = \overline{\nu}(r).$$

Тепер скористаємось відомою нерівністю для невід'ємних супермартингалів [10] для оцінки правої частини (16):

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{\mathbf{n}\in\mathbf{N}} \nu_{t_{k_0+n-1}}(\xi(t_{k_0+n-1}), \eta_{k_0+n-1}, x_{k_0+n-1}) \geq$$

$$\geq \overline{\nu}(\varepsilon_1)\Big\} \leq \frac{1}{\overline{\nu}(\varepsilon_1)}\nu_{k_0}(y,h,\varphi)\frac{\overline{\nu}(||\varphi||)}{\overline{\nu}(\varepsilon_1)}. \tag{17}$$

Враховуючи нерівність (16), нерівність (17) дає можливість гарантувати нерівність виконання нерівності

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\geq t_0} ||x_t(t_0,y,h,\varphi)|| > \varepsilon_1\right\} < \varepsilon_2, \forall\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0,$$

а це означає, що система (1)–(3) стійка за ймовірністю в цілому.

З нерівності (15) випливає оцінка

$$\mathbf{E}\{\nu_{N+1}(\xi(t_{N+1}), \eta_{N+1}, x_{t_{N+1}})\} \leq \nu_{k_0}(y,h,\varphi) -$$

$$= \sum_{k=k_0}^{N} \mathbf{E}\{a_k(\xi(t_k), \eta_k, x_{t_{\nu_k}})\} \leq \nu_{k_0}(y,h,\varphi). \tag{18}$$

при всіх $N \geq k_0, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}, \varphi \in \mathbf{D}$.

На підставі того, що послідовність $\{a_k\}, k \geq 0$, є функціоналами Ляпунова-Красовського, існують неперервні строго монотонні функції $\underline{a}(r)$ і $\overline{a}(r)$, такі, що

$$\overline{a}(||\varphi||) \leq a_k(y,h,\varphi) \leq \underline{a}(||\varphi||),$$

для $\forall k \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}, \varphi \in \mathbf{D}, \underline{a}(0) = \overline{a}(0) = 0$.

Отже, із збіжності ряду у (18) випливає збіжність ряду

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \mathbf{E}\{a_k(||x_{t_k}(t_0,y,h,\varphi)||)\}$$

для

$$\forall t_0 \geq 0, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}, \varphi \in \mathbf{D}.$$

Тоді в силу неперервності $\underline{a}(r)$ і рівності $\underline{a}(0) = 0$ матимемо

$$\lim_{k\to\infty} ||x_{t_k}(t_0, y, h, \varphi)|| = 0. \quad (19)$$

З (19) випливає прямування до нуля за ймовірністю послідовності $\overline{\nu}(||x_{t_k}(t_0, y, h, \varphi)||)$ при $k \to \infty$ для всіх $\forall t_0 \geq 0, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}, \varphi \in \mathbf{D}$.

Отже, з властивостей функціоналів Ляпунова-Красовського [7, 10] робимо висновок, що невід'ємний супермартингал $\nu_k(\xi(t_k), \eta_k, x_{t_k})$ при $k \to \infty$ прямує до нуля за ймовірністю при всіх реалізаціях процесу $\xi(t) \equiv \xi(t, \omega)$ і послідовності $\{\eta_k\}, k \leq 1$.

Далі, невід'ємний обмежений зверху супермартингал має границю з імовірністю одиниця [13]. Тоді, використовуючи (10), одержимо

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{t\geq T} ||x_{t_k}(t_0, y, h, \varphi)|| > \varepsilon\right\} = 0,$$

при всіх $y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}, \varphi \in \mathbf{D}$ і $T \geq t_0 \geq 0$, що означає, асимптотичну стохастичну стійкість в цілому сильного розв'язку системи (1)–(3). Теорема 1 доведена. ■

Як наслідок теореми 1 випливає твердження.

Теорема 2. *Нехай:*

1) виконуються умови 1), 2) теореми 1;

2) на підставі системи (1)–(3) для послідовності функціоналів Ляпунова-Красовського $\{\nu_k, k \geq 0\}$ виконується нерівність $(l\nu_k)(y, h, \varphi) \leq 0$ для $\forall k \geq 0, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}, \varphi \in \mathbf{D}$.

Тоді динамічна система випадкової структури (1)–(3) стійка за ймовірністю в цілому.

Теорема 3. *Нехай:*

1) виконуються умови 1) – 3) теореми 1;

2) функціонали Ляпунова-Красовського $\{\nu_k\}, \{a_k\}, k \geq 0$, задовольняють нерівності $\forall \varphi \in \mathbf{D}$:

$$c_1||\varphi||^2 \leq \nu_k(y, h, \varphi) \leq c_2||\varphi||^2, \quad (20)$$

$$c_3||\varphi||^2 \leq a_k(y, h, \varphi) \leq c_4||\varphi||^2, \quad (21)$$

при деяких $c_i > 0$, $i = \overline{1,4}$ для всіх $k \geq 0, y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}, \varphi \in \mathbf{D}$.

Тоді система випадкової структури (1)–(3) асимптотично стійка в середньому квадратичному в цілому.

□ *Доведення.* Використовуючи нерівність (14) для $n = k_0$, на основі (20) легко одержати нерівність

$$\mathbf{E}\{||x_{t_{N+1}}||\} \leq \frac{1}{c_1}\mathbf{E}\{\nu_{N+1}(\xi(t_{N+1})), \eta_{N+1}, x_{t_{N+1}}\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{c_1}\{\nu_{k_0}(\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}, \varphi)\} \leq \frac{c_2}{c_1}||\varphi||^2.$$

для всіх $N \geq k$, $k_0 \in \mathbf{N}$, $\varphi \in \mathbf{D}$ і початкових розподілах вектора $\{\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}\}$. Тому, можна стверджувати, що виконується нерівність

$$\mathbf{E}\{||x_t(t_0, y, h, \varphi)||^2\} < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0,$$

а це означає, що система (1)–(3) стійка в середньому квадратичному. Далі, використовуючи нерівності (15), (20), (21), можемо одержати нерівність

$$\sum_{\mathbf{k=k_0}}^{N} \mathbf{E}\{||x_{t_{N+1}}||^2\} \leq \frac{1}{c_3}\sum_{\mathbf{k=k_0}}^{N} \mathbf{E}\{a_k(\xi(t_k), \eta_k, x_{t_{\nu_k}})\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{c_3}\mathbf{E}\{\nu_{k_0}(\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}, \varphi)\} \leq \frac{c_2}{c_3}||\varphi||^2.$$

Ця нерівність гарантує збіжність ряду, членами якого виступають $\mathbf{E}\{||x_{t_{N+1}}||^2\}$ для будь-яких початкових даних $x_{t_{k_0}} = \varphi$ і початкових розподілів випадкового вектора $\{(\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}\}$.

Отже,

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{y\in\mathbf{Y}, h\in\mathbf{H}} \mathbf{E}\{||x_{t_k}(t_0, y, h, \varphi)||^2\} = 0,$$

при всіх $t_0 \geq 0$, що і доводить теорему 3. ■

Наслідок 1. Якщо виконуються умови теореми 2 і виконується нерівність (20), тоді тривіальний розв'язок динамічної системи випадкової структури (1)–(3) стійкий в середньому квадратичному в цілому.

Висновки

Знайдено достатні умови асимптотичної стійкості в середньому квадратичному в цілому сильного розв'язку дифузійних стохастичних диференціально-функціональних рівнянь зі скінченною післядією з урахуванням як внутрішніх марковських параметрів, так і зовнішніх збурень типу ланцюга Маркова.

Література

[1] Андронов А. А. О стохастическом рассмотрении динамических систем / А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, А. А. Витт. – ЖЭТТ, 1933. – Вып. 3. – № 3. – С. 165–180.

[2] Ворович Н. Н. Об устойчивости движения при случайных возмущениях / Н. Н. Ворович // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1965. – Т.20. – № 1. – С. 43–48.

[3] Гихман И.И. Стохастические дифференциальные уравнения и их применения / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – Наукова думка. – 1982. – 612 с.

[4] Мильмар В. Д. Об устойчивости движения при наличии толчков / В. Д. Мильмар, А. Д. Мышкис // Сиб. мат. журн. – 1960. – Т.1, № 2. – С. 233–237.

[5] Кац И. Я. Об устойчивости систем со случайными параметрами / И. Я. Кац, Н. Н. Красовский // Прикл. мат. и механ. – 1960, Т. 24, Вып. 5. – С. 809–823.

[6] Кац И. Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры / И. Я. Кац. – Екатеринбург: УГАПС, 1998. – 222 с.

[7] Свердан М. Л. Устойчивость стохастических импульсных систем / М. Л. Свердан, Е. Ф. Царьков. – Рига: РТУ, 1994. – 300 с.

[8] Лукашив Т. О. Метод функций Ляпунова исследования устойчивости стохастических систем Ито случайной структуры с импульсными марковскими переключениями. I. Общие теоремы об устойчивости импульсных стохастических систем / Т. О. Лукашив, И. В. Юрченко, В. К. Ясинский // Кибернетика и системный анализ. – 2009.– № 2. – С. 135–145.

[9] Лукашив Т. О. Метод функций Ляпунова исследования устойчивости стохастических систем Ито случайной структуры с импульсными марковскими переключениями. II. Устойчивость по первому приближению импульсных стохастических систем с марковскими параметрами / Т. О. Лукашив, И. В. Юрченко, В. К. Ясинский // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 3. – С. 146–158.

[10] Королюк В. С. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика: у 3 т. Т. 3: Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика / В. С. Королюк, Є. Ф. Царков, В. К. Ясинський. – Чернівці: Золоті литаври, 2009. – 798 с.

[11] Дынкин Е. Б. Марковские процессы / Е. Б. Дынкин. – М. : Физматгиз, 1969. – 859 с.

[12] Скороход А. В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений / А. В. Скороход. – К: Наук. думка, 1987. – 328 с.

[13] Дуб Дж. Вероятностные процессы / Дж. Дуб. – М: Физматгиз, 1963. – 605 с.

ОТДЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРЫ С КОНЕЧНЫМ ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ С УЧЕТОМ ВНЕШНИХ МАРКОВСКИХ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ

Т.О. Лукашив[a], Я.М. Чабанюк[b], В.К. Ясинський[a]

[a] *Черновецкий национальный университет имени Юрия Федьковича 28034, Черновцы, ул. Коцюбинского, 2, Украина*
[b] *Национальный университет "Львівська політехніка", ул. С. Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина*

Использован аппарат функционалов Ляпунова–Красовского для исследования ассимптотической стохастической устойчивости в целом, ассимптотической устойчивости в среднем квадратическом в целом сильного решения дифузионных стохастических дифференциально-функциональных уравнений с конечным последействием с учётом как внутренних марковских параметров, так и внешних возмущений типа цепи Маркова.

Ключевые слова: стохастические дифференциально-функциональные уравнения, марковские переключения, функционал Ляпунова–Красовского.

2000 MSC: 60J10, 60J27, 60H10, 68U20

УДК: 519.217; 519.718

SELECTED QUESTIONS OF THE STABILITY OF THE SYSTEMS WITH RANDOM STRUCTURE, FINITE AFTEREFFECT AND EXTERNAL MARKOV SWITCHINGS

T.O. Lukashiv[a], Ya.M Chabanyuyk[b], V.K. Yasynskyy[a]

[a] *Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Kotsubinsky Str., 2 58012, Chernivtsi, Ukraine*
[b] *Nacional'nyj univepsytet "L'vivs'ka Politehnika" (79013, L'viv, vul. S.Bandepy 12)*

The method of Lyapunov-Krasovsky functionals is used for investigation of the asymptotic stochastic stability in the whole, asymptotic stability in the mean square in the whole of the strong solution of the diffusion stochastic functional differential equations with finite aftereffect, internal Markov parameters and external disturbances of the type of Markov chain.

Keywords: stochastic differential-functional equations, Markov switchings, Lyapunov-Krasovskyy functional.

2000 MSC: 60J10, 60J27, 60H10, 68U20

УДК: 519.217; 519.718