

ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ КWТА-РОЗВ'ЯЗКІВ
 МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ НЕЙРОННОЇ СХЕМИ ОБРОБКИ
 ДИСКРЕТИЗОВАНИХ СИГНАЛІВ

П.В. Тимошук

Національний університет "Львівська політехніка"
 вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 18 лютого 2010 р.)

Доводиться існування та єдиність розв'язків математичної моделі нейронної схеми типу "K-winners-take-all" (KwTA) обробки дискретизованих сигналів. Схема призначена для ідентифікації K серед N нейронів, де $1 \leq K < N$, значення вхідних сигналів яких є більшими, ніж у решти $N - K$ нейронів. Наведено відповідні результати комп'ютерного моделювання, які підтверджують наведені теоретичні положення.

Ключові слова: математична модель, нейронна схема, дискретизований сигнал.

2000 MSC: 62M45

УДК: 004.032.026

Вступ

Як відомо, нейронні мережі типу "K-winners-take-all" (KwTA-мережі) здійснюють вибір K серед N елементів, де $1 \leq K < N$, з більшими значеннями активаційних функцій, ніж у решти $N - K$ елементів. Коли K дорівнює одиниці, KwTA-мережа є мережею типу "Winner-takes-all" (WTA-мережею), яка може розрізнити нейрон з максимальною активацією [4], [6], [7]. Вибір K найбільших елементів з множини даних N дійсних чисел є ключовою задачею мереж прийняття рішень, розпізнавання образів, пов'язаних пам'ятей і конкуруючого навчання [8], [9]. Задачі такого типу природно зустрічаються під час розв'язання задач класифікації і застосовуються для розробки класифікаційних нейронних мереж, для розв'язання задач розпізнавання і класифікації зразків [3]. KwTA-мережі застосовуються в телекомунікаціях, особливо для керування пакетними перемикачами даних [1]. KwTA-механізми мають важливі застосування у машинному навчанні, зокрема, у разі розв'язання задач класифікації k найближчих об'єктів, кластеризації k значень та ін. [2, 5].

Мета цієї праці – доведення існування та єдиності KwTA-розв'язків встановленого режиму математичної моделі нейронної схеми обробки дискретизованих сигналів.

**I. Математична модель
 KwTA-нейронної схеми обробки
 дискретизованих сигналів**

Нехай задано N дійсних чисел від a_1 до a_N , $N > 1$, тобто a_1, a_2, \dots, a_N , як миттєвих значень неві-

домих вхідних сигналів і необхідно вибрати K найбільших з них, де $1 \leq K < N$ – ненегативне ціле. Припустимо, що задані числа розподілені у відомому діапазоні $a \in (A_{\min}, A_{\max})$. Прийmemo, що ці числа не рівні між собою (відрізняються між собою за значеннями) і впорядковані у спадаючому за величиною порядку так, що задовольняються нерівності

$$a_1 > a_2 > \dots > a_N, \tag{1}$$

де індекси $1, 2, \dots, N$ у загальному випадку можуть відрізнитись від оригінальних номерів входів, означаючи, що компоненти вектора $a = [a_1, \dots, a_N]$ – впорядковані. Побудуємо математичну модель нейронної схеми, яка обробляє вхідний вектор дискретизованих сигналів a так, що після скінченної кількості ітерацій отримуються вихідні сигнали схеми $b = [b_1, \dots, b_N]$, які задовольняють нерівності

$$\begin{aligned} b_i > 0, i \in 1, 2, \dots, K; \\ b_j < 0, j \in K + 1, K + 2, \dots, N. \end{aligned} \tag{2}$$

Нерівності (2) виражають KwTA-властивість, тобто, що саме вихідні сигнали від b_1 до b_K "виграють" конкуренцію і той факт, що тільки вони є позитивними компонентами вектора b свідчить про те, що вхідні сигнали від a_1 до $a_K \in K$ найбільшими компонентами вектора a.

Виконаємо попередню обробку заданого вектора a вхідних сигналів, віднявши від усіх його компонентів значення A_{\min} і отримаємо додаткові сигнали

$$c_1 > c_2 > \dots > c_N, \tag{3}$$

де $c_n = a_n - A_{\min}$, $n = 1, 2, \dots, N$. Неважко побачити, що сигнали (3) перебувають у діапазоні $(0, A)$,

де $A = A_{\max} - A_{\min} > 0$, тобто, $c \in (0, A)$, де $c = [c_1, c_2, \dots, c_N]$. Оскільки вхідні сигнали (1) не рівні між собою і розподілені у відомому діапазоні, тому сигнали (3) також різні і обмежені в діапазоні $(0, A)$. Отже, для будь-яких $1 \leq K < N$ існують такі значення $x \in \mathfrak{R}$, які задовольняють нерівності

$$\begin{aligned} c_i &> x, i \in 1, 2, \dots, K; \\ c_j &< x, j \in K + 1, K + 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (4)$$

Віднявши x від (4), одержимо

$$\begin{aligned} c_i - x &> 0, i \in 1, 2, \dots, K; \\ c_j - x &< 0, j \in K + 1, K + 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (5)$$

Як можна побачити з (5), сигнали $c_n - x$, де $n = 1, 2, \dots, N$, мають KWTA-властивість. Тому такі сигнали можуть бути використані, як вихідні сигнали моделі KWTA-нейронної схеми, тобто можна записати рівності

$$\begin{aligned} b_i &= c_i - x, i \in 1, 2, \dots, K; \\ b_j &= c_j - x, j \in K + 1, K + 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (6)$$

Для побудови моделі KWTA-нейронної схеми необхідно розробити процедуру знаходження значення скалярного динамічного зсуву вхідних сигналів x , який задовольняє нерівності (4). Використаємо для цього вимогу, що такий зсув у встановленому режимі повинен перебувати у діапазоні $(0, A)$. Спроекуємо траєкторію дискретного часу $x^{(k)}$, де $k = 1, 2, \dots, m$ – кількість ітерацій до досягнення встановленого режиму, яка може перетнути весь діапазон $(0, A)$. Нехай така траєкторія буде розв'язком відповідного різницевого рівняння $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$ з початковою умовою $x^{(1)}$, де $\varphi(x^{(k)})$ – певна функція, яка повинна бути визначена. Припустимо, що у деякий момент дискретного часу $t^{(m)}$ змінна $x^{(k)}$ приймає у встановленому режимі значення $x^{(k)} = x^{(m)}$, яке задовольняє нерівності (4). Для зупинення обчислювального процесу у момент $t^{(m)}$ визначимо таку умову, яка керує кількістю переможців і переможених у кожній дискретній часовій точці протягом обчислювального процесу:

$$R(x^{(k)}) = 2K - N - \sum_{n=1}^N \operatorname{sgn}(b_n^{(k)}), \quad (7)$$

де $R(x^{(k)})$ – k -те дискретне значення нев'язки, $b_n^{(k)} = c_n - x^{(k)}$ – значення n -го вихідного сигналу моделі на k -й ітерації,

$$\operatorname{sgn}(b_n^{(k)}) = \begin{cases} 1, & \text{if } b_n^{(k)} > 0; \\ 0, & \text{if } b_n^{(k)} = 0; \\ -1, & \text{if } b_n^{(k)} < 0 \end{cases} \quad (8)$$

– сигнум- (жорсткообмежувальна) функція, $\sum_{n=1}^N \operatorname{sgn}(b_n^{(k)})$ – різниця між дійсними кількостями переможців і переможених. Сигнум-функція виконує порівняння між k -м дискретним значенням

n -го вихідного сигналу $b_n^{(k)}$ і нулем. Якщо $b_n^{(k)} > 0$, тоді n -на сигнум-функція забезпечує вихідний сигнал $\operatorname{sgn}(b_n^{(k)}) = 1$, якщо $b_n^{(k)} = 0$, тоді вихідний сигнал n -ї сигнум-функції $\operatorname{sgn}(b_n^{(k)}) = 0$, інакше $\operatorname{sgn}(b_n^{(k)}) = -1$.

Визначатимемо динамічний зсув $x^{(k)}$ за допомогою такого рекурсивного алгоритму:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - A \Delta x^{(k)}, \quad (9)$$

де $\Delta x^{(k)} = \operatorname{sgn}(R(x^{(k)}))\alpha^k$, α – параметр, який гарантує збіжність алгоритму до KWTA-розв'язку; $0 \leq x^{(1)} \leq A$ – початкова умова; m – число ітерацій до досягнення збіжності пошуковим процесом встановленого режиму.

II. Існування та єдиність розв'язків встановленого режиму

Проаналізуємо існування та єдиність розв'язків встановленого режиму різницевого рівняння (9). Для цього сформулюємо таку теорему.

Теорема. KWTA-розв'язки встановленого режиму різницевого рівняння (9) існують для будь-якого параметра $0 < \alpha < 1$ і для довільної початкової умови $x^{(1)} \in [0, A]$.

Доведення. Зобразимо розв'язок встановленого режиму $x^{(m)}$ рівняння (9) у вигляді

$$x^{(m)} = x^{(1)} - A \sum_{k=1}^{m-1} \operatorname{sgn}(R(x^{(k)}))\alpha^k. \quad (10)$$

Перший доданок правої частини (10) розміщується в діапазоні $0 \leq x^{(1)} \leq A$. Розглянемо другий доданок цього рівняння і числовий ряд, який являє собою необмежену геометричну прогресію з першим членом $A \neq 0$ і знаменником α . Якщо $\alpha \neq 1$, тоді суму перших $m + 1$ членів такого ряду можна подати у вигляді

$$s_{m+1} = \frac{A - A\alpha^{m+1}}{1 - \alpha}. \quad (11)$$

Якщо $|\alpha| < 1$ і $m \rightarrow \infty$, тоді $\alpha^{m+1} \rightarrow 0$, що дає

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} s_{m+1} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{A - A\alpha^{m+1}}{1 - \alpha} = \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{A}{1 - \alpha} - \frac{A\alpha^{m+1}}{1 - \alpha} \right) &= \frac{A}{1 - \alpha}. \end{aligned} \quad (12)$$

Оскільки змінна $\operatorname{sgn}(R(x^{(k)}))$ другого доданка рівняння (10) може набувати значень $-1, 0, 1$, тому справедливими є нерівності

$$-\frac{A}{1 - \alpha} < -A \sum_{k=1}^m \operatorname{sgn}(R(x^{(k)}))\alpha^k < \frac{A}{1 - \alpha}, \quad (13)$$

якщо $0 < \alpha < 1$. Підсумовування нерівностей (13) з нерівностями $0 \leq x^{(1)} \leq A$ дає

$$-\frac{A}{1-\alpha} < x^{(m)} < A + \frac{A}{1-\alpha}. \quad (14)$$

Отже, розв'язок $x^{(m)}$ рівняння (9) може набувати будь-якого скінченного значення в діапазоні $\left(-\frac{A}{1-\alpha}, A + \frac{A}{1-\alpha}\right)$, якщо $0 < \alpha < 1$. Оскільки вхідні сигнали є різними і розміщені в діапазоні $[0, A]$, тому існує таке значення $x^{(m)} \in [0, A]$, яке задовольняє нерівності (5). Але діапазон $[0, A]$ є також підобластю діапазону $\left(-\frac{A}{1-\alpha}, A + \frac{A}{1-\alpha}\right)$, якщо $0 < \alpha < 1$. Тому розв'язок $x^{(m)}$ може набувати довільних скінчених значень у діапазоні $[0, A]$, а також значення, які задовольняють нерівності (4) і (5). Це гарантує існування КВТА-розв'язків встановленого режиму різницевого рівняння (9) для кожного $0 < \alpha < 1$ і для будь-якої початкової умови $x^{(1)} \in [0, A]$. ■

Наслідок. З теореми і рівностей (6) випливає, що КВТА-вихідні сигнали $b_n = c_n - x^{(k)}$, $n = 1, 2, \dots, N$, які отримуються з рівняння (9) і рівностей (6), існують.

Відзначимо, що розв'язок рівняння (9) $x^{(m)}$ може приймати будь-яких скінчених значень в діапазоні $[0, A]$, які задовольняють рівність $R(x) = 0$. Цей розв'язок не єдиний, оскільки він може набувати будь-яких довільних значень в інтервалі (c_{K+1}, c_K) . Тому значення вихідних сигналів $b_k = c_k - x$ ($k = 1, 2, \dots, N-1$) також не єдині. Однак, згідно з нерівностями (5), КВТА-властивість моделі, що описується рівнянням (9) і нерівностями (6), визначається знаками вихідних сигналів b_n , $n = 1, 2, \dots, N$, а не їхніми значеннями. Ці знаки є незмінними для будь-яких $x^{(k)} \in (c_{K+1}, c_K)$. Тому математична модель, що описується рівнянням (9) і нерівностями (6), має КВТА-властивість (2) для кожного $0 < \alpha < 1$ і для будь-якого $x^{(1)} \in [0, A]$.

Розглянемо розв'язок встановленого режиму $x^{(m)}$ рівняння (9) і вихідні сигнали $b_n = c_n - x$, $n = 1, 2, \dots, N$, що описуються рівностями (6). Якщо компоненти вектора вхідних сигналів a є різними, тоді розв'язок встановленого режиму $x^{(m)}$ рівняння (9) і вихідні сигнали, що визначаються з (6), мають такі дві властивості, що робить можливим проектування відповідної КВТА-нейронної схеми:

1. Розв'язок встановленого режиму $x^{(m)}$ рівняння (9) є таким, що задовольняються нерівності (4).

2. K найбільших компонентів вектора вхідних сигналів a відповідають K позитивним компонентам вектора вихідних сигналів b , а решта $N-K$ компонентів вектора вхідних сигналів a відповідають

$N-K$ негативним компонентам вектора вихідних сигналів b .

III. Результати комп'ютерного моделювання

Для ілюстрації теоретичних положень, наведених у статті, розглянемо конкретний приклад з відповідним комп'ютерним моделюванням, що демонструє функціонування описаної моделі КВТА-нейронної схеми обробки дискретизованих сигналів.

Приклад. Нехай необхідно ідентифікувати чотири найбільші сигнали ($K = 2$) вектора $a = [-450, 370, -260, -80, 170]$, тобто $N = 5$, використавши модель, що описується різницевою рівнянням (9) і рівностями (6). Задамо для такої моделі $A_{\min} = -500$, $A = 1000$, початкову умову $x^{(1)} = A$ і коефіцієнт загасання $\alpha = 0.8$. Визначимо траєкторії дискретного часу зсуву $x^{(k)}$ і вихідні сигнали $b_i^{(k)}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ згідно з різницевою рівнянням (9) і рівностями (6). Отримані траєкторії в нормалізованих одиницях показані на рис. 1. Як можна побачити, зсув $x^{(k)}$ має єдиний встановлений режим, в якому сигнали $b_2 > 0, b_5 > 0$ відповідають двом найбільшим компонентам вектора a – переможцям, а сигнал $b_1 < 0, b_3 < 0, b_4 < 0$ відповідає переможеним згідно з КВТА-властивістю (2). Збіжність пошукового процесу до встановленого режиму досягається за $m = 8$ ітерацій.

На рис. 2 наведено фазовий портрет траєкторії дискретного часу зсуву $x^{(k)}$. Як можна побачити, фазова крива змінної $x^{(k)}$ є скінченною закрученою спіраллю кусково-лінійної форми, що гарантує збіжність траєкторії зсуву $x^{(k)}$ до єдиного встановленого режиму. Зміна зсуву $\Delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$ містить стрибки між горизонтальними ділянками.

Отже, результати комп'ютерного моделювання свідчать про те, що описана модель КВТА-нейронної схеми має єдиний розв'язок $x^{(k)}$, який дозволяє ефективно визначати K найбільших серед N невідомих сигналів, де $1 \leq K < N$. Інакше кажучи, результати моделювання підтверджують теоретичний прогноз.

Висновки

Доведено існування та єдиність розв'язків математичної моделі нейронної схеми типу “ K -winners-take-all”, призначеної для обробки дискретизованих сигналів. Доведення здійснюється на основі використання числових рядів. Результати комп'ютерного моделювання підтверджують наведені теоретичні положення.

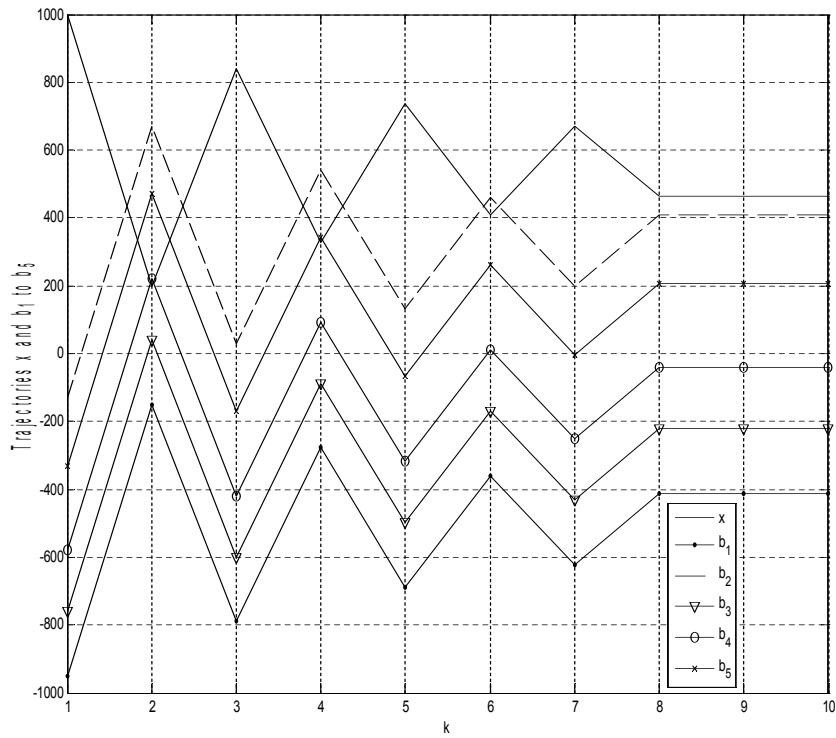


Рис. 1. Траєкторії дискретного часу зсуву $x^{(k)}$ і вихідних сигналів $b_i^{(k)}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, які зображують KWTА-властивість моделі, що описується різницеvim рівнянням (9) і рівностями (6)

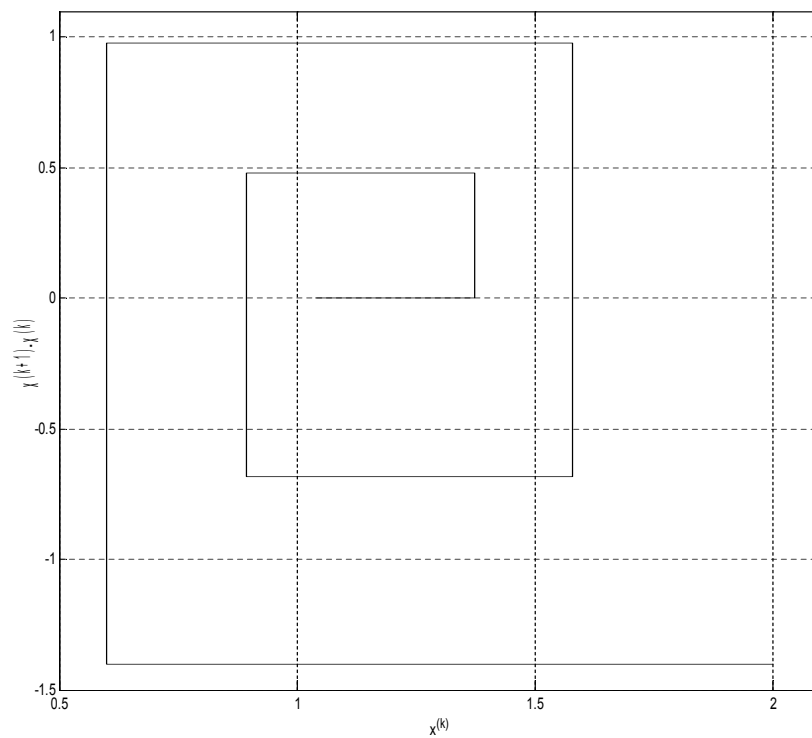


Рис. 2. Фазова крива траєкторії дискретного часу зсуву $x^{(k)}$

Література

- [1] Bihn L. N. and Chong, H. C. A neural-network contention controller for packet switching networks // IEEE Trans. on Neural Networks 6 (1995) 1402–1410.
- [2] Hu X. and Wang J. An improved dual neural network for solving a class of quadratic programming problems and its k -winners-take-all application // IEEE Trans. on Neural Networks, 19 (2008) 2022–2031.
- [3] Kwon T. M. and Zervakis M. A parallel sorting network without comparators: A neural-network approach // in: Proc. Int. Joint Conf. on Neural Networks, Vol. 1 (1992) 701–706.
- [4] Lippmann R. P., Gold B. and Malpass M.L. A comparison of Hamming and Hopfield neural nets for pattern classification // MIT Lincoln Laboratory Technical report TR-769 (1987) 1–37.
- [5] Liu S. and Wang J. A simplified dual neural network for quadratic programming with its KWTA application // IEEE Trans. on Neural Networks, 17 (2006) 1500–1510.
- [6] Tymoshchuk P. and Kaszkurewicz E. A Winner-take-all circuit based on second order Hopfield neural networks as building blocks // in: Proc. Int. Joint Conf. on Neural Networks, Vol. II (2003) 891–896.
- [7] Tymoshchuk P. and Kaszkurewicz E. A winner-take-all circuit using neural networks as building blocks // Neurocomputing 64 (2006) 375–396.
- [8] Urahama K. and Nagao T. K-Winner-take-all circuit with $O(n)$ complexity // IEEE Trans. on Neural Networks 6 (1995) 776–778.
- [9] Yen J. C., Guo J. I. and Chen H.-C. A new k -Winners-take all neural network and its array architecture // IEEE Trans. on Neural Networks 9 (1998) 901–912.

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ КВТА-РЕШЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕЙРОННОЙ СХЕМЫ ОБРАБОТКИ ДИСКРЕТИЗИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

П.В. ТЫМОЩУК

*Национальный университет “Львівська політехніка”,
ул. С. Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина*

Доказывается существование и единственность решений математической модели нейронной схемы типа “K-winners-take-all” (KWTA) обработки дискретизированных сигналов. Схема предназначена для идентификации K среди N нейронов, где $1 \leq K < N$, значения входных сигналов которых являются большими, чем в остальных нейронах. Приведены соответствующие результаты компьютерного моделирования, которые подтверждают представленные теоретические положения.

Ключевые слова: математическая модель, нейронная схема, дискретизированный сигнал.

2000 MSC: 35G30

УДК: 511.2, 517.946

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF NEURAL NETWORK MATHEMATICAL MODEL KWTA-SOLUTIONS OF PROCESSING SAMPLED SIGNALS

P.V. Timochuk

*National University “Lvivska Politechnika”
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine*

Existence and uniqueness of mathematical model solutions of discrete-time K-winners-take-all (KWTA) neural circuit. The circuit identifies K among N neurons, where $1 \leq K < N$, which have input signal values greater than in the remaining $N - K$ neurons. Corresponding computer modeling results which confirm presented theoretical statements are given.

Keywords: mathematical model, neural circuit, sampled signal.

2000 MSC: 62M45

УДК: 004.032.026