ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
“ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”
“Фізико-математичні науки”
Вип.687 № 687, (2010) с. 105–121

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
“LVIVSKA POLITECHNIKA”
“Physical & mathematical sciences”
Vol.687 No 687, (2010) 105–121

РОЗКЛАД АНАЛІТИЧНИХ В КРУЗІ ФУНКЦІЙ В КОМПЛЕКСНІЙ ОБЛАСТІ ЗА СИСТЕМОЮ ПОХІДНИХ МНОГОЧЛЕНІВ ЛЕЖАНДРА

М.А. Сухорольський, В.В. Достойна

Національний університет “Львівська політехніка”
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 24 жовтня 2010 р.)

Досліджено властивості похідних многочленів Лежандра у комплексній області та умови розвинення аналітичних у крузі функцій в ряди за ними.

Ключові слова: аналітична функція, многочлени Лежандра, біортогональна система функцій, асоційована функція.

2000 MSC: 33C47

УДК: 517.538.36

Вступ

Властивості ортогональних систем многочленів дійсної змінної та розвинення функцій у ряди за ними достатньо ґрунтовно вивчено в науковій літературі, зокрема, у роботах [1, 2, 3]. Значно менше досліджень стосуються властивостей цих систем у комплексній області. Так, у роботі [1] розглянуто розвинення аналітичних функцій у комплексній області за системою многочленів Чебишова. У роботі [4] вивчаються властивості систем похідних многочленів Чебишова у комплексній області та розвинення аналітичних функцій в ряди за ними. У роботі [5] розглянуто аналогічні питання для многочленів Лежандра у комплексній області.

У статті досліджено властивості похідних многочленів Лежандра у комплексній області та умови розвинення аналітичних у крузі функцій в ряди за цими многочленами.

Позначимо через $P_n(z)$ многочлени Лежандра комплексної змінної (див., наприклад, [6, с. 154]), а через $P_n^{(s)}(z)$ — їхню s-ту похідну.

Для s-ї похідної многочленів Лежандра справедливі явні формули (див. [6, с. 178], [8, с. 181])

$$P_n^{(s)}(z) = \frac{s!C_{n+s}^s}{2^n} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-s}{2}\right]} (-1)^k C_n^k C_{2(n-k)}^{n+s} z^{n-s-2k} \quad (0.1)$$
$$(n = 0, 1, \dots; n \geq s).$$

Із співвідношень (0.1) отримаємо вирази похідних многочленів Лежандра для парних значень n

$$P_{2n}^{(s)}(z) = \frac{s!C_{2n+s}^s}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{\left[n-\frac{s}{2}\right]} (-1)^k C_{2n}^k C_{2(2n-k)}^{2n+s} z^{2n-s-2k} =$$
$$= \left| \begin{matrix} i = n-k \\ k = n-i \end{matrix} \right| = \frac{s!C_{2n+s}^s}{2^{2n}} \sum_{i=\left[\frac{s}{2}\right]}^{n} (-1)^{n-i} C_{2n}^{n-i} C_{2(n+i)}^{2n+s} z^{2i-s}. \quad (0.2)$$

Аналогічно для непарних значень n

$$P_{2n+1}^{(s)}(z) = \quad (0.3)$$
$$= \frac{s!C_{2n+s+1}^s}{2^{2n+1}} \sum_{i=\left[\frac{s-1}{2}\right]}^{n} (-1)^{n-i} C_{2n+1}^{n-i} C_{2(n+i+1)}^{2n+s+1} z^{2i-s+1}.$$

I. Властивості похідних многочленів Лежандра в комплексній області

Теорема 1.1. *Функції z^{k-s} однозначно виражаються через похідні многочленів Лежандра, тобто справедливі співвідношення*

$$z^{k-s} = \frac{1}{s!C_k^s} \sum_{j=0}^{\left[\frac{k-s}{2}\right]} \frac{2^{k-2j}(2k-4j+1)}{2k-2j+1} \frac{C_k^j}{C_{2(k-j)}^{k-j}} P_{k-2j}^{(s)}(z) \quad (1.1)$$
$$(k \geq s).$$

Доведення. У роботі [5] отримано вирази степенів z^k $(k = 0, 1, \dots)$ через многочлени Лежандра:

$$z^k = \sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{2^{k-2i}(2k-4i+1)}{2k-2i+1} \frac{C_k^i}{C_{2(k-i)}^{k-i}} P_{k-2i}(z). \quad (1.2)$$

Послідовно диференціюючи співвідношення (1.2) по z s разів, знаходимо

$$kz^{k-1} = \sum_{i=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \frac{2^{k-2i}(2k-4i+1)}{2k-2i+1} \frac{C_k^i}{C_{2(k-i)}^{k-i}} P'_{k-2i}(z), \quad (1.3)$$

$$k(k-1)z^{k-2} = \sum_{i=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]} \frac{2^{k-2i}(2k-4i+1)}{2k-2i+1} \frac{C_k^i}{C_{2(k-i)}^{k-i}} P''_{k-2i}(z),$$

$$\dots$$

$$k(k-1)\dots(k-s+1)z^{k-s} =$$
$$= \sum_{i=0}^{\left[\frac{k-s}{2}\right]} \frac{2^{k-2i}(2k-4i+1)}{2k-2i+1} \frac{C_k^i}{C_{2(k-i)}^{k-i}} P_{k-2i}^{(s)}(z),$$

звідки

$$z^{k-s}=\frac{1}{k\left(k-1\right)\ldots\left(k-s+1\right)}\sum_{i=0}^{\left[\frac{k-s}{2}\right]}\frac{2^{k-2i}\left(2k-4i+1\right)}{2k-2i+1}\frac{C_k^i}{C_{2(k-i)}^{k-i}}P_{k-2i}^{(s)}(z).$$

Оскільки

$$\frac{1}{k\left(k-1\right)\ldots\left(k-s+1\right)}=\frac{1}{s!C_k^s},$$

то приходимо до співвідношення (1.1).

Покажемо спочатку, що вираз (1.1) правильний для $s=1$. Дійсно, зі співвідношення (1.3) отримаємо

$$z^{k-1}=\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\frac{2^{k-2i}\left(2k-4i+1\right)}{2k-2i+1}\frac{C_k^i}{C_{2(k-i)}^{k-i}}P'_{k-2i}(z)=$$
$$=\frac{1}{1!C_k^1}\sum_{i=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\frac{2^{k-2i}\left(2k-4i+1\right)}{2k-2i+1}\frac{C_k^i}{C_{2(k-i)}^{k-i}}P'_{k-2i}(z).$$

Припустимо, що вираз (1.1) справедливий при $s=l$ і доведемо його справедливість при $s=l+1$. Маємо

$$z^{k-(l+1)}=\frac{1}{k-l}\left(z^{k-l}\right)'=$$
$$=\frac{1}{k-l}\frac{1}{l!C_k^l}\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-(l+1)}{2}\right]}\frac{2^{k-2j}\left(2k-4j+1\right)}{2k-2j+1}\frac{C_k^j}{C_{2(k-j)}^{k-j}}P_{k-2j}^{(l+1)}(z)=$$
$$=\frac{1}{(l+1)!C_k^{l+1}}\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-(l+1)}{2}\right]}\frac{2^{k-2j}\left(2k-4j+1\right)}{2k-2j+1}\frac{C_k^j}{C_{2(k-j)}^{k-j}}P_{k-2j}^{(l+1)}(z).$$

Теорема доведена.

Наслідок 1.1. *Справедливі співвідношення*

$$z^{2k-s}=\frac{1}{s!C_{2k}^s}\sum_{j=\left[\frac{s}{2}\right]}^{k}\frac{2^{2j}\left(4j+1\right)}{2k+2j+1}\frac{C_{2k}^{k-j}}{C_{2(k+j)}^{k+j}}P_{2j}^{(s)}(z),\qquad(1.4)$$

$$z^{2k+1-s}=\frac{1}{s!C_{2k+1}^s}\sum_{j=\left[\frac{s-1}{2}\right]}^{k}\frac{2^{2j+1}\left(4j+3\right)}{2k+2j+3}\frac{C_{2k+1}^{k-j}}{C_{2(k+j+1)}^{k+j+1}}P_{2j+1}^{(s)}(z).\qquad(1.5)$$

Доведення. Із співвідношень (1.1) знаходимо для парних значень k

$$z^{2k-s}=\frac{1}{s!C_{2k}^s}\sum_{i=0}^{\left[k-\frac{s}{2}\right]}\frac{2^{2(k-i)}\left(4k-4i+1\right)}{4k-2i+1}\frac{C_{2k}^i}{C_{2(2k-i)}^{2k-i}}P_{2(k-i)}^{(s)}(z)=$$
$$=\left|\begin{array}{c}j=k-i\\ i=k-j\end{array}\right|=\frac{1}{s!C_{2k}^s}\sum_{j=\left[\frac{s}{2}\right]}^{k}\frac{2^{2j}\left(4j+1\right)}{2k+2j+1}\frac{C_{2k}^{k-j}}{C_{2(k+j)}^{k+j}}P_{2j}^{(s)}(z).$$

Аналогічно для непарних значень k

$$z^{2k+1-s}=\frac{1}{s!C_{2k+1}^s}\sum_{j=\left[\frac{s-1}{2}\right]}^{k}\frac{2^{2j+1}\left(4j+3\right)}{2k+2j+3}\frac{C_{2k+1}^{k-j}}{C_{2(k+j+1)}^{k+j+1}}P_{2j+1}^{(s)}(z).$$

Наслідок 1.2. *Система многочленів* $\left\{P_n^{(s)}(z)\right\}_{n=0}^{\infty}$ *лінійно незалежна і повна у просторі* E_R *однозначних аналітичних у крузі* $|z|<R$, $0<R\le\infty$, *функцій комплексної змінної.*

Доведення. Оскільки коефіцієнт

$$a_{n-s}=\frac{s!C_{n+s}^s}{2^n}\cdot\left(-1\right)^0C_n^0C_{2n}^{n+s}=\frac{(2n)!}{2^nn!\left(n-s\right)!}$$

при найстаршому степені многочлена $P_n^{(s)}(z)$ відмінний від нуля, то система $\left\{P_n^{(s)}(z)\right\}_{n=0}^{\infty}$ лінійно незалежна (див. [7, с. 137]). Крім того, вона повна (див. [7, с. 137]), бо на основі теореми 2.1 кожний степінь z^{k-s} $(k\ge s)$ однозначно виражається у вигляді лінійної комбінації функцій $P_n^{(s)}(z)$.

Нехай $\delta_{mn}=\begin{cases}0, & \text{якщо } m\ne n,\\ 1, & \text{якщо } m=n\end{cases}$ — символ Кронекера.

Наслідок 1.3. *Справедливі комбінаторні тотожності*

$$\frac{\left(4j+1\right)C_{2n+s}^s}{2^{2(n-j)}}\sum_{i=j}^{n}\frac{\left(-1\right)^{n-i}C_{2n}^{n-i}C_{2(n+i)}^{2n+s}C_{2i}^{i-j}}{\left(2i+2j+1\right)C_{2i}^sC_{2(i+j)}^{i+j}}=\delta_{nj},\qquad(1.6)$$

$$\frac{(4j+3)\,C^{s}_{2n+1+s}}{2^{2(n-j)}}\sum_{i=j}^{n}\frac{(-1)^{n-i}\,C^{n-i}_{2n+1}C^{2n+s+1}_{2(n+i+1)}C^{i-j}_{2i+1}}{(2i+2j+3)\,C^{s}_{2i+1}C^{i+j+1}_{2(i+j+1)}}=\delta_{nj}. \tag{1.7}$$

Доведення. Підставивши вираз (1.4) у співвідношення (0.2) і змінивши порядок підсумовування, матимемо

$$P^{(s)}_{2n}(z)=\frac{s!C^{s}_{2n+s}}{2^{2n}}\sum_{i=\left[\frac{s}{2}\right]}^{n}(-1)^{n-i}\,C^{n-i}_{2n}C^{2n+s}_{2(n+i)}\frac{1}{s!C^{s}_{2i}}\sum_{j=\left[\frac{s}{2}\right]}^{i}\frac{2^{2j}\,(4j+1)}{2i+2j+1}\frac{C^{i-j}_{2i}}{C^{i+j}_{2(i+j)}}P^{(s)}_{2j}(z)=$$

$$=\sum_{j=\left[\frac{s}{2}\right]}^{n}P^{(s)}_{2j}(z)\sum_{i=j}^{n}(-1)^{n-i}\,\frac{2^{2j-2n}\,(4j+1)}{2i+2j+1}\frac{C^{s}_{2n+s}C^{n-i}_{2n}C^{2n+s}_{2(n+i)}C^{i-j}_{2i}}{C^{s}_{2i}C^{i+j}_{2(i+j)}}.$$

Звідси, зважаючи на незалежність похідних многочленів Лежандра, отримаємо тотожність (1.6).

Підставивши вираз (1.5) у співвідношення (0.3), аналогічно до попереднього отримаємо тотожність (1.7).

Теорема 1.2. *Справедливі оцінки*

$$\left|P^{(s)}_{n}(z)\right|\le 2^{s}s!C^{n-s}_{n+s}R^{n-s}\quad (n\ge s)\,, \tag{1.8}$$

де $z\in D_R$, *а* D_R *— область, границею якої є еліпс* Γ_R *з рівнянням*

$$z=\frac{1}{2}\left(Re^{i\varphi}+R^{-1}\,e^{-i\varphi}\right)\quad (R>1,\quad 0\le\varphi<2\pi)\,.$$

Доведення. Спочатку оцінимо модуль многочлена $P^{(s)}_{n}(x)$ дійсної змінної на відрізку [-1;1]. Відомо [8, с. 178], що

$$C^{\lambda}_{n}(x)=\frac{2^{1-2\lambda}\Gamma(2\lambda+n)}{n!\left[\Gamma(\lambda)\right]^{2}}\times \tag{1.9}$$

$$\times\int_{0}^{\pi}\left(x+\sqrt{x^{2}-1}\,\cos\varphi\right)^{n}(\sin\varphi)^{2\lambda-1}\,d\varphi.$$

Прийнявши у співвідношенні (1.9) $\lambda=s+\frac{1}{2}$ та скориставшись рівностями [9, с. 773]

$$\Gamma(n+1)=n!, \tag{1.10}$$

$$\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}\,(2s-1)!!}{2^{s}}=\frac{\sqrt{\pi}\,(2s-1)!}{2^{s}2^{s-1}\,(s-1)!}=\frac{\sqrt{\pi}\,(2s)!}{2^{2s}s!},$$

знаходимо

$$C^{s+\frac{1}{2}}_{n}(x)=\frac{\Gamma(n+2s+1)}{2^{2s}n!\left[\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\right]^{2}}\times$$

$$\times\int_{0}^{\pi}\left(x+\sqrt{x^{2}-1}\,\cos\varphi\right)^{n}(\sin\varphi)^{2s}\,d\varphi=$$

$$=\frac{2^{2s}\,(n+2s)!\,(s!)^{2}}{\pi n!\left[(2s)!\right]^{2}}\int_{0}^{\pi}\left(x+\sqrt{x^{2}-1}\cos\varphi\right)^{n}(\sin\varphi)^{2s}\,d\varphi. \tag{1.11}$$

Запишемо вираз похідних многочленів Лежандра через многочлени Гегенбауера [8, с. 181]

$$P^{(s)}_{n}(z)=2^{s}s!g_{s}C^{s+\frac{1}{2}}_{n-s}(z)\quad (n\ge s),$$

де $g_s=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)_s}{s!}$.

Знайдемо

$$\left(\frac{1}{2}\right)_s=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\dots\left(\frac{1}{2}+s-1\right)=$$

$$=\frac{1}{2^{s}}1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2s-1)=$$

$$=\frac{1}{2^{s}}\,(2s-1)!!=\frac{1}{2^{2s-1}}\frac{(2s-1)!}{(s-1)!}=\frac{1}{2^{2s}}\frac{(2s)!}{s!}=\frac{s!C^{s}_{2s}}{2^{2s}}.$$

Тоді

$$P^{(s)}_{n}(x)=\frac{s!}{2^{s}}C^{s}_{2s}C^{s+\frac{1}{2}}_{n-s}(x)\quad (n\ge s). \tag{1.12}$$

На підставі співвідношень (1.11), (1.12) матимемо

$$P^{(s)}_{n}(x)=\frac{2^{s}}{\pi}s!C^{n-s}_{n+s}\int_{0}^{\pi}\left(x+\sqrt{x^{2}-1}\cos\varphi\right)^{n-s}(\sin\varphi)^{2s}\,d\varphi.$$

Звідси одержимо оцінку для модуля многочлена $P^{(s)}_{n}(x)$ при $|x|\le 1$:

$$\left|P^{(s)}_{n}(x)\right|\le\frac{2^{s}}{\pi}s!C^{n-s}_{n+s}\,\pi=2^{s}s!C^{n-s}_{n+s},$$

звідки

$$\left|\frac{1}{2^{s}s!C^{n-s}_{n+s}}P^{(s)}_{n}\,(x)\right|\le 1.$$

Многочлен $\dfrac{1}{2^{s}s!C^{n-s}_{n+s}}P^{(s)}_{n}(z)$ задовольняє умови теореми [2, с. 166]: *якщо для многочлена* $W_n(z)$ *n-го степеня на дійсному відрізку [-1;1] виконується нерівність* $|W_n(z)|\le M$, *то для будь-якого z ззовні цього відрізку справедлива оцінка*

$$|W_n(z)|\le M(a+b)^{n},$$

де a i b — півосі еліпса з фокусами в точках $z=\pm 1$, *який проходить через точку z. Звідси, оскільки півосі еліпса* Γ_r *з рівнянням* $z=\dfrac{1}{2}\left(r\,e^{i\varphi}+r^{-1}\,e^{-i\varphi}\right)$ $(1<r<R,\ \ 0\le\varphi<2\pi)$ *відповідно дорівнюють* $\dfrac{1}{2}\left(r+\dfrac{1}{r}\right)$, $\dfrac{1}{2}\left(r-\dfrac{1}{r}\right)$ *і* $r<R$, *випливає оцінка* (1.8).

II. Співвідношення між похідними многочленів Лежандра та деякими іншими ортогональними многочленами

Теорема 2.1. *Справедливі залежності між многочленами Лежандра та їхніми похідними*

$$P_n^{(s)}(z) = \frac{(2s)!}{2^s\,(s-1)!}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-s}{2}\right]}\frac{(2n-4j-2s+1)}{(s+j)\,(2n-2j-2s+1)}\frac{C_{2(n-j)}^{2s}C_n^j}{C_n^{j+s}}P_{n-2j-s}(z), \tag{2.1}$$

$$P_n(z) = \frac{2^s s!}{(2s)!}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^j\,(2n-4j+2s+1)}{(2n-2j+2s+1)}\frac{C_s^jC_{n-j+s}^s}{C_{2(n-j+s)}^{2s}}P_{n-2j+s}^{(s)}(z), \tag{2.2}$$

де $n \geq s$, $s \geq 1$.

Доведення. Прийнявши у співвідношенні (1.2) $k = 2i - s$, отримаємо

$$z^{2i-s} = \sum_{j=0}^{\left[\frac{2i-s}{2}\right]}\frac{2^{2i-2j-s}\,(4i-4j-2s+1)}{4i-2j-2s+1}\frac{C_{2i-s}^j}{C_{2(2i-j-s)}^{2i-j-s}}P_{2i-2j-s}(z) =$$

$$= \begin{vmatrix} k = i-j \\ j = i-k \end{vmatrix} = \sum_{k=\left[\frac{s}{2}\right]}^{i}\frac{2^{2k-s}\,(4k-2s+1)}{2i+2k-2s+1}\frac{C_{2i-s}^{i-k}}{C_{2(i+k-s)}^{i+k-s}}P_{2k-s}(z).$$

Останній вираз підставимо у співвідношення (0.2) і змінимо порядок підсумовування. Матимемо

$$P_{2n}^{(s)}(z) = \frac{s!C_{2n+s}^s}{2^{2n}}\sum_{i=\left[\frac{s}{2}\right]}^{n}(-1)^{n-i}C_{2n}^{n-i}C_{2(n+i)}^{2n+s}\sum_{k=\left[\frac{s}{2}\right]}^{i}\frac{2^{2k-s}\,(4k-2s+1)\,C_{2i-s}^{i-k}}{(2i+2k-2s+1)\,C_{2(i+k-s)}^{i+k-s}}P_{2k-s}(z) =$$

$$= \frac{s!C_{2n+s}^s}{2^{2n+s}}\sum_{k=\left[\frac{s}{2}\right]}^{n}2^{2k}\,(4k-2s+1)\,P_{2k-s}(z)\sum_{i=k}^{n}\frac{(-1)^{n-i}\,C_{2i-s}^{i-k}C_{2n}^{n-i}C_{2(n+i)}^{2n+s}}{(2i+2k-2s+1)\,C_{2(i+k-s)}^{i+k-s}}.$$

Скориставшись тотожністю

$$\sum_{i=k}^{n}\frac{(-1)^{n-i}\,C_{2i-s}^{i-k}C_{2n}^{n-i}C_{2(n+i)}^{2n+s}}{(2i+2k-2s+1)\,C_{2(i+k-s)}^{i+k-s}} = \frac{s2^{2(n-k)}C_{2n}^{n-k}C_{2(n+k)}^{2s}C_{2s}^s}{(n-k+s)\,(2n+2k-2s+1)\,C_{2n}^{n-k+s}C_{2n+s}^s},$$

остаточно знаходимо

$$P_{2n}^{(s)}(z) = \frac{s\,s!C_{2s}^s}{2^s}\sum_{k=\left[\frac{s}{2}\right]}^{n}\frac{(4k-2s+1)\,C_{2n}^{n-k}C_{2(n+k)}^{2s}}{(n-k+s)\,(2n+2k-2s+1)\,C_{2n}^{n-k+s}}P_{2k-s}(z) =$$

$$= \begin{vmatrix} j = n-k \\ k = n-j \end{vmatrix} = \frac{(2s)!}{2^s\,(s-1)!}\sum_{j=0}^{\left[\frac{2n-s}{2}\right]}\frac{(4n-4j-2s+1)\,C_{2n}^jC_{2(2n-j)}^{2s}}{(s+j)\,(4n-2j-2s+1)\,C_{2n}^{j+s}}P_{2n-2j-s}(z). \tag{2.3}$$

Якщо прийняти у співвідношенні (1.2) $k = 2i - s + 1$ і скористатись тотожністю

$$\sum_{i=k}^{n}\frac{(-1)^{n-i}\,C_{2i-s+1}^{i-k}C_{2n+1}^{n-i}C_{2(n+i+1)}^{2n+s+1}}{C_{2(i+k-s+1)}^{i+k-s+1}} = \frac{s2^{2(n-k)}C_{2n+1}^{n-k}C_{2(n+k+1)}^{2s}C_{2s}^s}{(n-k+s)\,(2n+2k-2s+3)\,C_{2n+1}^{n-k+s}C_{2n+s+1}^s},$$

то за аналогією до попереднього отримаємо

$$P_{2n+1}^{(s)}(z) = \frac{(2s)!}{2^s\,(s-1)!}\sum_{j=0}^{\left[\frac{2n-s+1}{2}\right]}\frac{(4n-4j-2s+3)\,C_{2n+1}^jC_{2(2n-j+1)}^{2s}}{(s+j)\,(4n-2j-2s+3)\,C_{2n+1}^{j+s}}P_{2n-2j-s+1}(z). \tag{2.4}$$

Об'єднуючи співвідношення (2.3) і (2.4), приходимо до (2.1).

Доведемо співвідношення (2.2). У роботі [5] отримано явні формули для парних та непарних степенів многочленів Лежандра комплексної змінної

$$P_{2n}(z) = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\,C_{2n}^{n-j}C_{2(n+j)}^{2n}z^{2j}, \tag{2.5}$$

$$P_{2n+1}(z) = \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} C_{2n+1}^{n-j} C_{2(n+j+1)}^{2n+1} z^{2j+1} \quad (n = 0, 1, \dots). \tag{2.6}$$

Прийнявши у співвідношенні (1.1) $j = k - s$, знаходимо

$$z^j = \frac{1}{s! C_{j+s}^s} \sum_{i=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]} \frac{2^{j+s-2i} (2j + 2s - 4i + 1) C_{j+s}^i}{(2j + 2s - 2i + 1) C_{2(j+s-i)}^{j+s-i}} P_{j+s-2i}^{(s)}(z),$$

звідки

$$z^{2j} = \frac{1}{s! C_{2j+s}^s} \sum_{i=0}^{j} \frac{2^{2j+s-2i} (4j + 2s - 4i + 1) C_{2j+s}^i}{(4j + 2s - 2i + 1) C_{2(2j+s-i)}^{2j+s-i}} P_{2j+s-2i}^{(s)}(z) =$$

$$= \begin{vmatrix} l = j - i \\ i = j - l \end{vmatrix} = \frac{1}{s! C_{2j+s}^s} \sum_{l=0}^{j} \frac{2^{2l+s} (4l + 2s + 1) C_{2j+s}^{j-l}}{(2j + 2l + 2s + 1) C_{2(j+l+s)}^{j+l+s}} P_{2l+s}^{(s)}(z). \tag{2.7}$$

Аналогічно

$$z^{2j+1} = \frac{1}{s! C_{2j+1+s}^s} \sum_{l=0}^{j} \frac{2^{2l+1+s} (4l + 2s + 3) C_{2j+1+s}^{j-l}}{(2j + 2l + 2s + 3) C_{2(j+l+s+1)}^{j+l+s+1}} P_{2l+1+s}^{(s)}(z). \tag{2.8}$$

Підставивши вираз (2.7) у співвідношення (2.5), отримаємо

$$P_{2n}(z) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{n-j} C_{2n}^{n-j} C_{2(n+j)}^{2n}}{s! C_{2j+s}^s} \sum_{l=0}^{j} \frac{2^{2l+s} (4l + 2s + 1) C_{2j+s}^{j-l}}{(2j + 2l + 2s + 1) C_{2(j+l+s)}^{j+l+s}} P_{2l+s}^{(s)}(z) =$$

$$= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{l=0}^{n} 2^{2l+s} (4l + 2s + 1) P_{2l+s}^{(s)}(z) \sum_{j=l}^{n} \frac{(-1)^{n-j} C_{2n}^{n-j} C_{2(n+j)}^{2n} C_{2j+s}^{j-l}}{(2j + 2l + 2s + 1) s! C_{2j+s}^s C_{2(j+l+s)}^{j+l+s}}.$$

Скориставшись тотожністю

$$\sum_{j=l}^{n} \frac{(-1)^{n-j} C_{2n}^{n-j} C_{2(n+j)}^{2n} C_{2j+s}^{j-l}}{(2j + 2l + 2s + 1) s! C_{2j+s}^s C_{2(j+l+s)}^{j+l+s}} = \frac{(-1)^{n+l} 2^{2(n-l)} s! C_s^{n-l} C_{n+l+s}^s}{(2n + 2l + 2s + 1) (2s)! C_{2(n+l+s)}^{2s}},$$

знаходимо

$$P_{2n}(z) = \frac{2^s s!}{(2s)!} \sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^{n+l} (4l + 2s + 1) C_s^{n-l} C_{n+l+s}^s}{(2n + 2l + 2s + 1) C_{2(n+l+s)}^{2s}} P_{2l+s}^{(s)}(z) =$$

$$= \begin{vmatrix} j = n - l \\ l = n - j \end{vmatrix} = \frac{2^s s!}{(2s)!} \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j (4n - 4j + 2s + 1) C_s^j C_{2n-j+s}^s}{(4n - 2j + 2s + 1) C_{2(2n-j+s)}^{2s}} P_{2n-2j+s}^{(s)}(z). \tag{2.9}$$

Підставивши вираз (2.8) у співвідношення (2.6) і скориставшись тотожністю

$$\sum_{j=l}^{n} \frac{(-1)^{n-j} C_{2n+1}^{n-j} C_{2(n+j+1)}^{2n+1} C_{2j+s+1}^{j-l}}{(2j + 2l + 2s + 3) s! C_{2j+s+1}^s C_{2(j+l+s+1)}^{j+l+s+1}} = \frac{(-1)^{n+l} 2^{2(n-l)} s! C_s^{n-l} C_{n+l+s+1}^s}{(2n + 2l + 2s + 3) (2s)! C_{2(n+l+s+1)}^{2s}},$$

аналогічно до попереднього отримаємо

$$P_{2n+1}(z) = \frac{2^s s!}{(2s)!} \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j (4n - 4j + 2s + 3) C_s^j C_{2n-j+s+1}^s}{(4n - 2j + 2s + 3) C_{2(2n-j+s+1)}^{2s}} P_{2n-2j+s+1}^{(s)}(z). \tag{2.10}$$

Об'єднуючи вирази (2.9) та (2.10), приходимо до співвідношення (2.2).

Наслідок 2.1. *Справедливі комбінаторні тотожності*

$$\sum_{l=m}^{n} \frac{(-1)^{n-l} s (4l + 2s + 1) (4m + 1) C_s^{n-l} C_{n+l+s}^s C_{2(l+m+s)}^{2s} C_{2l+s}^{l-m}}{(2n + 2l + 2s + 1) (2m + 2l + 1) (l - m + s) C_{2(n+l+s)}^{2s} C_{2l+s}^{l+m}} = \delta_{mn}, \tag{2.11}$$

$$\sum_{l=m}^{n} \frac{(-1)^{n-l} s (4l + 2s + 3) (4m + 3) C_s^{n-l} C_{n+l+s+1}^s C_{2(l+m+s+1)}^{2s} C_{2l+s+1}^{l-m}}{(2n + 2l + 2s + 3) (2m + 2l + 3) (l - m + s) C_{2(n+l+s+1)}^{2s} C_{2l+s+1}^{l+m+1}} = \delta_{mn}. \tag{2.12}$$

Доведення. Із співвідношення (2.2) отримаємо вирази многочленів Лежандра через їхні похідні для парних значень n

$$P_{2n}(z)=\frac{2^s s!}{(2s)!}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j\,(4n-4j+2s+1)\,C_s^jC_{2n-j+s}^s}{(4n-2j+2s+1)\,C_{2(2n-j+s)}^{2s}}P_{2n-2j+s}^{(s)}(z)=$$
$$=\begin{vmatrix}l=n-j\\ j=n-l\end{vmatrix}=\frac{2^s s!}{(2s)!}\sum_{l=0}^{n}\frac{(-1)^{n-l}\,(4l+2s+1)\,C_s^{n-l}C_{n+l+s}^s}{(2n+2l+2s+1)\,C_{2(n+l+s)}^{2s}}P_{2l+s}^{(s)}(z). \tag{2.13}$$

Аналогічно для непарних значень n

$$P_{2n+1}(z)=\frac{2^s s!}{(2s)!}\sum_{l=0}^{n}\frac{(-1)^{n-l}\,(4l+2s+3)\,C_s^{n-l}C_{n+l+s+1}^s}{(2n+2l+2s+3)\,C_{2(n+l+s+1)}^{2s}}P_{2l+s+1}^{(s)}(z). \tag{2.14}$$

На підставі виразу (2.1), знаходимо

$$P_{2l+s}^{(s)}(z)=\frac{(2s)!}{2^s\,(s-1)!}\sum_{j=0}^{l}\frac{(4l-4j+1)\,C_{2(2l-j+s)}^{2s}C_{2l+s}^j}{(s+j)\,(4l-2j+1)\,C_{2l+s}^{j+s}}P_{2l-2j}(z)=$$
$$=\begin{vmatrix}m=l-j\\ j=l-m\end{vmatrix}=\frac{(2s)!}{2^s\,(s-1)!}\sum_{m=0}^{l}\frac{(4m+1)\,C_{2(l+m+s)}^{2s}C_{2l+s}^{l-m}}{(l-m+s)\,(2l+2m+1)\,C_{2l+s}^{l+m}}P_{2m}(z).$$

Аналогічно

$$P_{2l+s+1}^{(s)}(z)=\frac{(2s)!}{2^s\,(s-1)!}\sum_{m=0}^{l}\frac{(4m+3)\,C_{2(l+m+s+1)}^{2s}C_{2l+s+1}^{l-m}}{(l-m+s)\,(2l+2m+3)\,C_{2l+s+1}^{l+m+1}}P_{2m+1}(z).$$

Вирази для многочленів $P_{2l+s}^{(s)}(z)$ підставимо у співвідношення (2.13). Матимемо

$$P_{2n}(z)=\frac{2^s s!}{(2s)!}\sum_{l=0}^{n}\frac{(-1)^{n-l}\,(4l+2s+1)\,C_s^{n-l}C_{n+l+s}^s}{(2n+2l+2s+1)\,C_{2(n+l+s)}^{2s}}\times$$
$$\times\frac{(2s)!}{2^s\,(s-1)!}\sum_{m=0}^{l}\frac{(4m+1)\,C_{2(l+m+s)}^{2s}C_{2l+s}^{l-m}}{(l-m+s)\,(2l+2m+1)\,C_{2l+s}^{l+m}}P_{2m}(z)=$$
$$=\sum_{m=0}^{n}P_{2m}(z)\sum_{l=m}^{n}\frac{(-1)^{n-l}\,s\,(4m+1)\,(4l+2s+1)\,C_s^{n-l}C_{n+l+s}^sC_{2(l+m+s)}^{2s}C_{2l+s}^{l-m}}{(2n+2l+2s+1)\,(l-m+s)\,(2l+2m+1)\,C_{2(n+l+s)}^{2s}C_{2l+s}^{l+m}}.$$

Аналогічно, підставивши вирази для многочленів $P_{2l+s+1}^{(s)}$ у співвідношення (2.14), знаходимо

$$P_{2n+1}(z)=\sum_{m=0}^{n}P_{2m+1}(z)\times$$
$$\times\sum_{l=m}^{n}\frac{(-1)^{n-l}\,s\,(4m+3)\,(4l+2s+3)\,C_s^{n-l}C_{n+l+s+1}^sC_{2(l+m+s+1)}^{2s}C_{2l+s+1}^{l-m}}{(2n+2l+2s+3)\,(l-m+s)\,(2l+2m+3)\,C_{2(n+l+s+1)}^{2s}C_{2l+s+1}^{l+m+1}}.$$

Врахувавши незалежність многочленів Лежандра, приходимо до тотожностей (2.11), (2.12).

Наслідок 2.2. *Справедливі комбінаторні тотожності*

$$\sum_{k=l}^{n}\frac{(-1)^{k-l}\,s\,(4k-2s+1)\,(4l+1)\,C_{2(n+k)}^{2s}C_{2n}^{n-k}C_s^{k-l}C_{k+l}^s}{(2n+2k-2s+1)\,(2k+2l+1)\,(n-k+s)\,C_{2n}^{n-k+s}C_{2(k+l)}^{2s}}=\delta_{ln}, \tag{2.15}$$

$$\sum_{k=l}^{n}\frac{(-1)^{k-l}\,s\,(4k-2s+3)\,(4l+3)\,C_{2(n+k+1)}^{2s}C_{2n+1}^{n-k}C_s^{k-l}C_{k+l+1}^s}{(2n+2k-2s+3)\,(2k+2l+3)\,(n-k+s)\,C_{2n+1}^{n-k+s}C_{2(k+l+1)}^{2s}}=\delta_{ln}. \tag{2.16}$$

Доведення. На підставі співвідношення (2.1) знаходимо для парних значень n

$$P_{2n}^{(s)}(z)=\frac{(2s)!}{2^s\,(s-1)!}\sum_{j=0}^{\left[n-\frac{s}{2}\right]}\frac{(4n-4j-2s+1)\,C_{2(2n-j)}^{2s}C_{2n}^j}{(s+j)\,(4n-2j-2s+1)\,C_{2n}^{j+s}}P_{2n-2j-s}(z)=$$
$$=\begin{vmatrix}k=n-j\\ j=n-k\end{vmatrix}=\frac{(2s)!}{2^s\,(s-1)!}\sum_{k=\left[\frac{s}{2}\right]}^{n}\frac{(4k-2s+1)\,C_{2(n+k)}^{2s}C_{2n}^{n-k}}{(n-k+s)\,(2n+2k-2s+1)\,C_{2n}^{n-k+s}}P_{2k-s}(z). \tag{2.17}$$

Аналогічно отримуємо для непарних значень n

$$P_{2n+1}^{(s)}(z)=\frac{(2s)!}{2^s\,(s-1)!}\sum_{k=\left[\frac{s-1}{2}\right]}^{n}\frac{(4k-2s+3)\,C_{2(n+k+1)}^{2s}C_{2n+1}^{n-k}}{(n-k+s)\,(2n+2k-2s+3)\,C_{2n+1}^{n-k+s}}P_{2k-s+1}(z). \tag{2.18}$$

Із співвідношення (2.2) маємо

$$P_{2k-s}(z)=\frac{2^s s!}{(2s)!}\sum_{j=0}^{\left[k-\frac{s}{2}\right]}\frac{(-1)^j\,(4k-4j+1)\,C_s^jC_{2k-j}^s}{(4k-2j+1)\,C_{2(2k-j)}^{2s}}P_{2k-2j}^{(s)}(z)=$$

$$=\begin{vmatrix}l=k-j\\ j=k-l\end{vmatrix}=\frac{2^s s!}{(2s)!}\sum_{l=\left[\frac{s}{2}\right]}^{k}\frac{(-1)^{k-l}\,(4l+1)\,C_s^{k-l}C_{k+l}^s}{(2k+2l+1)\,C_{2(k+l)}^{2s}}P_{2l}^{(s)}(z).$$

Аналогічно

$$P_{2k-s+1}(z)=\frac{2^s s!}{(2s)!}\sum_{l=\left[\frac{s-1}{2}\right]}^{k}\frac{(-1)^{k-l}\,(4l+3)\,C_s^{k-l}C_{k+l+1}^s}{(2k+2l+3)\,C_{2(k+l+1)}^{2s}}P_{2l+1}^{(s)}(z).$$

Підставивши вирази многочленів $P_{2k-s}(z)$ у (2.17), одержимо

$$P_{2n}^{(s)}(z)=\frac{(2s)!}{2^s\,(s-1)!}\sum_{k=\left[\frac{s}{2}\right]}^{n}\frac{(4k-2s+1)\,C_{2(n+k)}^{2s}C_{2n}^{n-k}}{(n-k+s)\,(2n+2k-2s+1)\,C_{2n}^{n-k+s}}\times$$

$$\times\frac{2^s s!}{(2s)!}\sum_{l=\left[\frac{s}{2}\right]}^{k}\frac{(-1)^{k-l}\,(4l+1)\,C_s^{k-l}C_{k+l}^s}{(2k+2l+1)\,C_{2(k+l)}^{2s}}P_{2l}^{(s)}(z)=$$

$$=\sum_{l=\left[\frac{s}{2}\right]}^{n}P_{2l}^{(s)}(z)\sum_{k=l}^{n}\frac{(-1)^{k-l}\,s\,(4l+1)\,(4k-2s+1)\,C_{2(n+k)}^{2s}C_{2n}^{n-k}C_s^{k-l}C_{k+l}^s}{(2k+2l+1)\,(n-k+s)\,(2n+2k-2s+1)\,C_{2n}^{n-k+s}C_{2(k+l)}^{2s}}.$$

Аналогічно, підставляючи вирази многочленів $P_{2k-s+1}(z)$ у (2.18), отримаємо

$$P_{2n+1}^{(s)}(z)=\sum_{l=\left[\frac{s-1}{2}\right]}^{n}P_{2l+1}^{(s)}(z)\times$$

$$\times\sum_{k=l}^{n}\frac{(-1)^{k-l}\,s\,(4l+3)\,(4k-2s+3)\,C_{2(n+k+1)}^{2s}C_{2n+1}^{n-k}C_s^{k-l}C_{k+l+1}^s}{(2k+2l+3)\,(n-k+s)\,(2n+2k-2s+3)\,C_{2n+1}^{n-k+s}C_{2(k+l+1)}^{2s}}.$$

Врахувавши незалежність похідних многочленів Лежандра, отримаємо тотожності (2.15), (2.16). Через $Q_n\,(z)$ позначимо многочлени, введені в [4], для яких справедливе співвідношення

$$Q_n(z)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k\,2^{n-2k}C_{n-k}^k}{n+1}z^{n-2k},\quad n=0,1,\ldots. \tag{2.19}$$

Теорема 2.2. *Справедливі залежності між похідними многочленів Лежандра та многочленами* $Q_n(z)$

$$P_n^{(s)}(z)=\frac{2^s\Gamma\left(\frac{3}{2}-s\right)}{\sqrt{\pi}}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-s}{2}\right]}\frac{(-1)^j\,(n-2j-s+1)^2\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+n-j\right)}{\Gamma(j+1)\Gamma\left(\frac{3}{2}-j-s\right)\Gamma(n-j-s+2)}Q_{n-2j-s}(z), \tag{2.20}$$

$$Q_n(z)=\frac{\pi\Gamma(2s+1)}{2^{3s+1}\,(n+1)\,s!}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^j\,(2n-4j+2s+1)\,\Gamma(n-j+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}-j+s\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+n-j+s\right)}P_{n-2j+s}^{(s)}(z), \tag{2.21}$$

де $n\geq s$.

Доведення. У роботі [4] отримано вирази степенів z^k $(k = 0, 1, \dots)$ через многочлени $Q_n(z)$

$$z^k = \sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{(k-2j+1)^2 C_k^j}{(k-j+1)\, 2^k} Q_{k-2j}(z). \tag{2.22}$$

Прийнявши у співвідношенні (2.22) $k = 2i - s$, отримаємо

$$z^{2i-s} = \sum_{j=0}^{\left[i-\frac{s}{2}\right]} \frac{(2i-s-2j+1)^2 C_{2i-s}^j}{(2i-s-j+1)\, 2^{2i-s}} Q_{2i-s-2j}(z) =$$
$$= \begin{vmatrix} k = i-j \\ j = i-k \end{vmatrix} = \sum_{k=\left[\frac{s}{2}\right]}^{i} \frac{(2k-s+1)^2 C_{2i-s}^{i-k}}{(i+k-s+1)\, 2^{2i-s}} Q_{2k-s}(z). \tag{2.23}$$

Останній вираз підставимо у співвідношення (0.2). Змінивши порядок підсумовування, одержимо

$$P_{2n}^{(s)}(z) = \frac{s! C_{2n+s}^s}{2^{2n}} \sum_{i=\left[\frac{s}{2}\right]}^{n} (-1)^{n-i} C_{2n}^{n-i} C_{2(n+i)}^{2n+s} \sum_{k=\left[\frac{s}{2}\right]}^{i} \frac{(2k-s+1)^2 C_{2i-s}^{i-k}}{(i+k-s+1)\, 2^{2i-s}} Q_{2k-s}(z) =$$
$$= \frac{1}{2^{2n-s}} \sum_{k=\left[\frac{s}{2}\right]}^{n} (2k-s+1)^2 Q_{2k-s}(z) \sum_{i=k}^{n} \frac{(-1)^{n-i} s! C_{2n+s}^s C_{2n}^{n-i} C_{2(n+i)}^{2n+s} C_{2i-s}^{i-k}}{(i+k-s+1)\, 2^{2i}}.$$

Скориставшись тотожністю

$$\sum_{i=k}^{n} \frac{(-1)^{n-i} s! C_{2n+s}^s C_{2n}^{n-i} C_{2(n+i)}^{2n+s} C_{2i-s}^{i-k}}{(i+k-s+1)\, 2^{2i}} =$$
$$= \frac{(-1)^{n+k} 2^{2n} \Gamma\left(\frac{1}{2}+n+k\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}-s\right)}{\sqrt{\pi}\, \Gamma(n-k+1) \Gamma\left(\frac{3}{2}-n+k-s\right) \Gamma(n+k-s+2)},$$

знаходимо

$$P_{2n}^{(s)}(z) = 2^s \Gamma\left(\tfrac{3}{2}-s\right) \sum_{k=\left[\frac{s}{2}\right]}^{n} \frac{(-1)^{n+k} (2k-s+1)^2 \Gamma\left(\frac{1}{2}+n+k\right) Q_{2k-s}(z)}{\sqrt{\pi}\, \Gamma(n-k+1) \Gamma\left(\frac{3}{2}-n+k-s\right) \Gamma(n+k-s+2)} =$$
$$= \begin{vmatrix} l = n-k \\ k = n-l \end{vmatrix} = \frac{2^s \Gamma\left(\frac{3}{2}-s\right)}{\sqrt{\pi}} \sum_{l=0}^{\left[n-\frac{s}{2}\right]} \frac{(-1)^l (2n-2l-s+1)^2 \Gamma\left(\frac{1}{2}+2n-l\right)}{\Gamma(l+1) \Gamma\left(\frac{3}{2}-l-s\right) \Gamma(2n-l-s+2)} Q_{2n-2l-s}(z). \tag{2.24}$$

Якщо прийняти у співвідношенні (2.22) $k = 2i - s + 1$ і скористатись тотожністю

$$\sum_{i=k}^{n} \frac{(-1)^{n-i} s! C_{2n+s}^s C_{2n+1}^{n-i} C_{2(n+i+1)}^{2n+s+1} C_{2i-s+1}^{i-k}}{(i+k-s+2)\, 2^{2i}} =$$
$$= \frac{(-1)^{n+k} 2^{2n+2} \Gamma\left(\frac{3}{2}+n+k\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}-s\right)}{\sqrt{\pi}\, \Gamma(n-k+1) \Gamma\left(\frac{3}{2}-n+k-s\right) \Gamma(n+k-s+3)},$$

то за аналогією до попереднього отримаємо

$$P_{2n+1}^{(s)}(z) = \frac{2^s \Gamma\left(\frac{3}{2}-s\right)}{\sqrt{\pi}} \sum_{l=0}^{\left[n-\frac{s-1}{2}\right]} \frac{(-1)^l (2n-2l-s+2)^2 \Gamma\left(\frac{1}{2}+2n-l+1\right)}{\Gamma(l+1) \Gamma\left(\frac{3}{2}-l-s\right) \Gamma(2n-l-s+3)} Q_{2n-2l-s+1}(z). \tag{2.25}$$

Об'єднуючи співвідношення (2.24) та (2.25), приходимо до (2.20).

Доведемо формулу (2.21). Із співвідношення (2.19) знаходимо для парних та непарних степенів многочленів $Q_n(z)$

$$Q_{2n}(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 2^{2n-2k} C_{2n-k}^k}{2n+1} z^{2n-2k} = \begin{vmatrix} j = n-k \\ k = n-j \end{vmatrix} = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{n-j} 2^{2j} C_{n+j}^{n-j}}{2n+1} z^{2j}, \tag{2.26}$$

$$Q_{2n+1}(z)=\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{n-j}\,2^{2j+1}C_{n+j+1}^{n-j}}{2n+2}\,z^{2j+1}. \tag{2.27}$$

Підставляючи вираз (2.7) у формулу (2.26) та врахувавши тотожність

$$\sum_{j=l}^{n}\frac{(-1)^{n-j}\,2^{2j}C_{n+j}^{n-j}C_{2j+s}^{j-l}}{(2j+2l+2s+1)\,C_{2j+s}^{s}C_{2(j+l+s)}^{j+l+s}}=$$
$$=\frac{(-1)^{n+l}\,\pi\Gamma(1+n+l)\Gamma(1+2s)}{2^{2l+4s+1}\Gamma(1+n-l)\Gamma\left(\frac{1}{2}-n+l+s\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+n+l+s\right)},$$

матимемо

$$Q_{2n}(z)=\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{n-j}\,2^{2j}C_{n+j}^{n-j}}{2n+1}\frac{1}{s!C_{2j+s}^{s}}\sum_{l=0}^{j}\frac{2^{2l+s}\,(4l+2s+1)\,C_{2j+s}^{j-l}}{(2j+2l+2s+1)\,C_{2(j+l+s)}^{j+l+s}}P_{2l+s}^{(s)}(z)=$$
$$=\frac{2^{s}}{(2n+1)\,s!}\sum_{l=0}^{n}2^{2l}\,(4l+2s+1)\,P_{2l+s}^{(s)}(z)\sum_{j=l}^{n}\frac{(-1)^{n-j}\,2^{2j}C_{n+j}^{n-j}C_{2j+s}^{j-l}}{(2j+2l+2s+1)\,C_{2j+s}^{s}C_{2(j+l+s)}^{j+l+s}}=$$
$$=\frac{2^{s}}{(2n+1)\,s!}\sum_{l=0}^{n}\frac{(-1)^{n+l}\,\pi\Gamma(1+n+l)\Gamma(1+2s)2^{2l}\,(4l+2s+1)}{2^{2l+4s+1}\Gamma(1+n-l)\Gamma\left(\frac{1}{2}-n+l+s\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+n+l+s\right)}P_{2l+s}^{(s)}(z)=$$
$$=\left|\begin{matrix}j=n-l\\ l=n-j\end{matrix}\right|=\frac{\pi\,(2s)!}{2^{3s+1}\,(2n+1)\,s!}\times$$
$$\times\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{j}\,(4n-4j+2s+1)\,\Gamma(1+2n-j)}{\Gamma(1+j)\Gamma\left(\frac{1}{2}-j+s\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+2n-j+s\right)}P_{2n-2j+s}^{(s)}(z). \tag{2.28}$$

Підставляючи вираз (2.8) у формулу (2.27) та врахувавши тотожність

$$\sum_{j=l}^{n}\frac{(-1)^{n-j}\,2^{2j}C_{n+j+1}^{n-j}C_{2j+s+1}^{j-l}}{(2j+2l+2s+3)\,C_{2j+s+1}^{s}C_{2(j+l+s+1)}^{j+l+s+1}}=$$
$$=\frac{(-1)^{n+l}\,\pi s\Gamma(2+n+l)\Gamma(1+2s)}{2^{2l+4s+3}\Gamma(1+n-l)\Gamma\left(\frac{1}{2}-n+l+s\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}+n+l+s\right)},$$

одержимо

$$Q_{2n+1}(z)=\frac{\pi\,(2s)!}{2^{3s+1}\,(2n+2)\,s!}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{j}\,(4n-4j+2s+3)\,\Gamma(2+2n-j)}{\Gamma(1+j)\Gamma\left(\frac{1}{2}-j+s\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}+2n-j+s\right)}P_{2n-2j+s}^{(s)}(z). \tag{2.29}$$

Об'єднуючи співвідношення (2.28) та (2.29), приходимо до (2.21).

Наслідок 2.3. *Справедливі залежності між похідними многочленів Лежандра, многочленами Чебишова та їхніми похідними*

$$P_{n}^{(s)}(z)=\frac{2^{s}\Gamma\left(\frac{3}{2}-s\right)}{\sqrt{\pi}}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-s}{2}\right]}\frac{(-1)^{j}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+n-j\right)}{\Gamma(j+1)\Gamma\left(\frac{3}{2}-j-s\right)\Gamma(n-j-s+2)}T'_{n-2j-s+1}(z), \tag{2.30}$$

$$P_{n}^{(s)}(z)=\frac{2^{s}\Gamma\left(\frac{3}{2}-s\right)}{\sqrt{\pi}}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-s}{2}\right]}\frac{(-1)^{j}\,(n-2j-s+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+n-j\right)}{\Gamma(j+1)\Gamma\left(\frac{3}{2}-j-s\right)\Gamma(n-j-s+2)}U_{n-2j-s}(z), \tag{2.31}$$

$$T'_{n+1}(z)=\frac{\pi\,(n+1)\,\Gamma(2s+1)}{2^{3s+1}s!}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^{j}\,(2n-4j+2s+1)\,\Gamma(n-j+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}-j+s\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+n-j+s\right)}P_{n-2j+s}^{(s)}(z), \tag{2.32}$$

$$U_{n}(z)=\frac{\pi\Gamma(2s+1)}{2^{3s+1}s!}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^{j}\,(2n-4j+2s+1)\,\Gamma(n-j+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}-j+s\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+n-j+s\right)}P_{n-2j+s}^{(s)}(z), \tag{2.33}$$

де $T_n(z)$, $U_n(z)$ — многочлени Чебишова першого і другого родів відповідно (див. [1, с. 11]).

Доведення. Співвідношення (2.30)-(2.33) випливають з (2.20), (2.21) на підставі відомих виразів [4]

$$Q_{n}(z)=\frac{1}{(n+1)^{2}}T'_{n+1}(z),\quad Q_{n}(z)=\frac{1}{n+1}U_{n}(z).$$

III. Функції, асоційовані з похідними многочленів Лежандра

Розглянемо однозначну аналітичну у крузі $|z| < R_o$, $1 < R_o \le \infty$, функцію $f(z)$ комплексної змінної. Тоді її можна зобразити рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n. \tag{3.1}$$

Знайдемо формальне розвинення функції $f(z)$ за системою многочленів $\left\{P_n^{(s)}(z)\right\}_{n=0}^{\infty}$ від комплексної змінної. Для цього підставимо вирази (1.3) та (1.4) у рівність (3.1)

$$f(z) = \sum_{k=s}^{\infty} \frac{f^{(k-s)}(0)}{(k-s)!} z^{k-s} = \sum_{2k=s}^{\infty} \frac{f^{(2k-s)}(0)}{(2k-s)!} z^{2k-s} + \sum_{2k+1=s}^{\infty} \frac{f^{(2k+1-s)}(0)}{(2k-s+1)!} z^{2k-s+1} =$$

$$= \sum_{2k=s}^{\infty} \frac{f^{(2k-s)}(0)}{(2k-s)!} \frac{1}{s! C_{2k}^{s}} \sum_{r=\left[\frac{s}{2}\right]}^{k} \frac{2^{2r}(4r+1) C_{2k}^{k-r}}{(2k+2r+1) C_{2(k+r)}^{k+r}} P_{2r}^{(s)}(z) +$$

$$+ \sum_{2k+1=s}^{\infty} \frac{f^{(2k-s+1)}(0)}{(2k-s+1)!} \frac{1}{s! C_{2k+1}^{s}} \sum_{r=\left[\frac{s-1}{2}\right]}^{k} \frac{2^{2r+1}(4r+3) C_{2k+1}^{k-r}}{(2k+2r+3) C_{2(k+1+r)}^{k+1+r}} P_{2r+1}^{(s)}(z).$$

Змінивши порядок підсумовування, отримаємо

$$f(z) = \sum_{r=\left[\frac{s}{2}\right]}^{\infty} P_{2r}^{(s)}(z) \sum_{k=r}^{\infty} \frac{2^{2r}(4r+1) C_{2k}^{k-r}}{(2k+2r+1) s! C_{2k}^{s} C_{2(k+r)}^{k+r}} \frac{f^{(2k-s)}(0)}{(2k-s)!} +$$

$$+ \sum_{r=\left[\frac{s-1}{2}\right]}^{\infty} P_{2r+1}^{(s)}(z) \sum_{k=r}^{\infty} \frac{2^{2r+1}(4r+3) C_{2k+1}^{k-r}}{(2k+2r+3) s! C_{2k+1}^{s} C_{2(k+1+r)}^{k+1+r}} \frac{f^{(2k+1-s)}(0)}{(2k+1-s)!} =$$

$$= \left| \begin{matrix} j = k-r \\ k = j+r \end{matrix} \right| = \sum_{r=\left[\frac{s}{2}\right]}^{\infty} P_{2r}^{(s)}(z) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{2r}(4r+1) C_{2(j+r)}^{j}}{(2j+4r+1) s! C_{2(j+r)}^{s} C_{2(j+2r)}^{j+2r}} \frac{f^{(2j+2r-s)}(0)}{(2j+2r-s)!} +$$

$$+ \sum_{r=\left[\frac{s-1}{2}\right]}^{\infty} P_{2r+1}^{(s)}(z) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{2r+1}(4r+3) C_{2(j+r)+1}^{j}}{(2j+4r+3) s! C_{2(j+r)+1}^{s} C_{2(j+2r+1)}^{j+2r+1}} \frac{f^{(2j+2r-s+1)}(0)}{(2j+2r-s+1)!} =$$

$$= \sum_{m=s}^{\infty} P_{m}^{(s)}(z) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{m}(2m+1) C_{2j+m}^{j}}{(2j+2m+1) s! C_{2j+m}^{s} C_{2(j+m)}^{j+m}} \frac{f^{(2j+m-s)}(0)}{(2j+m-s)!}. \tag{3.2}$$

Позначимо

$$L_{m-s}(f) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{m}(2m+1) C_{2j+m}^{j}}{(2j+2m+1) s! C_{2j+m}^{s} C_{2(j+m)}^{j+m}} \frac{f^{(2j+m-s)}(0)}{(2j+m-s)!}.$$

Перетворивши вираз

$$\frac{2^{m}(2m+1) C_{2j+m}^{j}}{(2j+2m+1) s! C_{2j+m}^{s} C_{2(j+m)}^{j+m}} = \frac{2^{m}(2m+1)(2j+m-s)!(j+m)!}{(2j+2m+1)! j!} =$$

$$= \frac{2^{m}(2m+1) C_{j+m}^{j}}{(s+1)! C_{m+s+1}^{m} C_{2j+2m+1}^{2j+m-s}},$$

матимемо

$$L_{m-s}(f) = \frac{2^{m}(2m+1)}{(s+1)! C_{m+s+1}^{m}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_{j+m}^{j}}{C_{2(j+m)+1}^{2j+m-s}} \frac{f^{(2j+m-s)}(0)}{(2j+m-s)!}. \tag{3.3}$$

Врахувавши співвідношення (3.2) та (3.3), отримаємо розвинення функції $f(z)$ за системою многочленів $\left\{P_n^{(s)}(z)\right\}_{n=0}^{\infty}$

$$f(z) = \sum_{m=s}^{\infty} L_{m-s}(f) P_m^{(s)}(z).$$

Введемо функції, асоційовані з многочленами $P_m^{(s)}(z)$ (див. [7, с. 120])

$$\omega_{m-s}(z) = \frac{2^m\,(2m+1)}{(s+1)!C_{m+s+1}^m} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_{j+m}^j}{C_{2j+2m+1}^{2j+m-s}} \frac{1}{z^{2j+m-s+1}} \quad (m \geq s)\,. \tag{3.4}$$

На підставі співвідношення (3.4) запишемо вирази асоційованих функцій $\omega_{m-s}(z)$ для парних та непарних значень індексів m

$$\omega_{2m-s}(z) = \frac{2^{2m}\,(4m+1)}{(s+1)!C_{2m+s+1}^{2m}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_{j+2m}^j}{C_{2j+4m+1}^{2j+2m-s}} \frac{1}{z^{2j+2m-s+1}}, \tag{3.5}$$

$$\omega_{2m-s+1}(z) = \frac{2^{2m+1}\,(4m+3)}{(s+1)!C_{2m+s+2}^{2m+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_{j+2m+1}^j}{C_{2j+4m+3}^{2j+2m+1-s}} \frac{1}{z^{2j+2m-s+2}}. \tag{3.6}$$

Твердження 3.1. *Функції $\omega_{m-s}(z)$ аналітичні в області $|z|>1$.*
Коефіцієнти $L_{m-s}\,(f)$ зображуються у вигляді контурних інтегралів

$$L_{m-s}\,(f) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(z)\omega_{m-s}(z)dz,$$

де Γ — додатно орієнтоване коло $|z|=q \quad (1<q<R_0)$.

Доведення. Дійсно, використовуючи асимптотичну формулу $n! \sim \dfrac{n^n}{e^n}$, $n\to\infty$, знайдемо оцінку для коефіцієнтів рядів (3.4)

$$\frac{2^m\,(2m+1)}{(s+1)!C_{m+s+1}^m}\frac{C_{j+m}^j}{C_{2j+2m+1}^{2j+m-s}} = \frac{2^m\,(2m+1)\,(j+m)!\,(2j+m-s)!}{j!\,(2j+2m+1)!} \sim$$
$$\sim \frac{2^m\,(2m+1)\,(j+m)^{j+m}\,e^j\,(2j+m-s)^{2j+m-s}\,e^{2j+2m+1}}{e^{j+m}j^j e^{2j+m-s}\,(2j+2m+1)^{2j+2m+1}} =$$
$$= \frac{2^m\,(2m+1)\,e^{s+1}j^{j+m}\left(1+\dfrac{m}{j}\right)^{j+m}(2j)^{2j+m-s}\left(1+\dfrac{m-s}{2j}\right)^{2j+m-s}}{j^j\,(2j)^{2j+2m+1}\left(1+\dfrac{2m+1}{2j}\right)^{2j+2m+1}} \sim$$
$$\sim \frac{(2m+1)\,e^{s+1}}{(2j)^{s+1}}\frac{\left(1+\dfrac{m}{j}\right)^{j}\left(1+\dfrac{m-s}{2j}\right)^{2j}}{\left(1+\dfrac{2m+1}{2j}\right)^{2j}} \sim \frac{(2m+1)\,e^{s+1}}{(2j)^{s+1}}\frac{e^m e^{m-s}}{e^{2m+1}} = \frac{2m+1}{(2j)^{s+1}}. \tag{3.7}$$

Звідси одержуємо

$$\lim_{j\to\infty}\sqrt[j]{\frac{2^m\,(2m+1)}{(s+1)!C_{m+s+1}^m}\frac{C_{j+m}^j}{C_{2j+2m+1}^{2j+m-s}}} = \lim_{j\to\infty}\sqrt[j]{\frac{2m+1}{(2j)^{s+1}}} = 1$$

і твердження 3.1 доведено.

Означення 3.1[2]. *Система асоційованих функцій $\{\omega_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ називається біортогональною із системою многочленів $V_n(z)$, якщо справджуються умови*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} V_n(z)\omega_k(z)dz = \delta_{nk},$$

де Γ — додатно орієнтований замкнений контур, що охоплює особливі точки функції $\omega_k(z)$.

Теорема 3.1. *Системи функцій $\left\{P_n^{(s)}(z),\,\omega_{n-s}(z)\right\}_{n=0}^{\infty}$ біортогональні вздовж замкненого контуру, що охоплює круг $|z|\leq 1$, тобто виконуються рівності*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} P_n^{(s)}(z)\omega_{m-s}(z)dz = \delta_{nm}, \tag{3.8}$$

де $\omega_{n-s}(z)$ *визначені співвідношенням* (3.4).

Доведення. Розглянемо спочатку випадок парних значень індексів m, n. Підставимо вирази (0.2) та (3.5) у ліву частину рівності (3.8). Матимемо

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} P_{2n}^{(s)}(z)\omega_{2m-s}(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\frac{s!C_{2n+s}^{s}2^{2m}\left(4m+1\right)}{2^{2n}\left(s+1\right)!C_{2m+s+1}^{2m}}\times$$

$$\times\sum_{r=\left[\frac{s}{2}\right]}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{n-r}\frac{C_{2n}^{n-r}C_{2(n+r)}^{2n+s}C_{j+2m}^{j}}{C_{2j+4m+1}^{2j+2m-s}}\int\limits_{\Gamma}\frac{dz}{z^{2j-2r+2m+1}}=\begin{vmatrix}l=j+m\\ j=l-m\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\frac{\left(4m+1\right)C_{2n+s}^{s}}{2^{2(n-m)}\left(s+1\right)C_{2m+s+1}^{2m}}\sum_{r=\left[\frac{s}{2}\right]}^{n}\sum_{l=m}^{\infty}(-1)^{n-r}\frac{C_{2n}^{n-r}C_{2(n+r)}^{2n+s}C_{l+m}^{l-m}}{C_{2l+2m+1}^{2l-s}}\int\limits_{\Gamma}\frac{dz}{z^{2(l-r)+1}}.$$

На підставі відомого результату [10, с. 81–82]

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{dz}{\left(z-a\right)^{n}}=\begin{cases}2\pi i,\ n=1,\\ \ \ 0,\ \ n\neq 1,\end{cases}\tag{3.9}$$

де Γ — довільний замкнений контур, що охоплює точку a і однократно пробігається в додатному напрямі, знаходимо

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} P_{2n}^{(s)}(z)\omega_{2m-s}(z)dz=\frac{\left(4m+1\right)C_{2n+s}^{s}}{2^{2(n-m)}\left(s+1\right)C_{2m+s+1}^{2m}}\sum_{r=m}^{n}(-1)^{n-r}\frac{C_{2n}^{n-r}C_{2(n+r)}^{2n+s}C_{r+m}^{r-m}}{C_{2r+2m+1}^{2r-s}}.$$

Аналогічно одержимо для непарних значень індексів m, n

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} P_{2n+1}^{(s)}(z)\omega_{2m-s+1}(z)dz=$$

$$=\frac{\left(4m+3\right)C_{2n+s+1}^{s}}{2^{2(n-m)}\left(s+1\right)C_{2m+s+2}^{2m+1}}\sum_{r=m}^{n}(-1)^{n-r}\frac{C_{2n+1}^{n-r}C_{2(n+r+1)}^{2n+1+s}C_{r+m+1}^{r-m}}{C_{2r+2m+3}^{2r-s+1}}.$$

Використавши комбінаторні тотожності

$$\frac{\left(4m+1\right)C_{2n+s}^{s}}{2^{2(n-m)}\left(s+1\right)C_{2m+s+1}^{2m}}\sum_{r=m}^{n}(-1)^{n-r}\frac{C_{2n}^{n-r}C_{2(n+r)}^{2n+s}C_{r+m}^{r-m}}{C_{2r+2m+1}^{2r-s}}=\delta_{nm},$$

$$\frac{\left(4m+3\right)C_{2n+s+1}^{s}}{2^{2(n-m)}\left(s+1\right)C_{2m+s+2}^{2m+1}}\sum_{r=m}^{n}(-1)^{n-r}\frac{C_{2n+1}^{n-r}C_{2(n+r+1)}^{2n+s+1}C_{r+m+1}^{r-m}}{C_{2r+2m+3}^{2r-s+1}}=\delta_{nm},$$

приходимо до рівностей (3.8).

Зауваження 3.1. *Система функцій* $\left\{P_{n}^{(s)}(z)\right\}_{n=0}^{\infty}$ *ортогональна з вагою* $\delta\left(x\right)=\dfrac{2n+1}{2\left(2s\right)!C_{n+s}^{n-s}}\left(1-x^{2}\right)^{s}$ *на відрізку* $[-1;1]$, *тобто справедливі співвідношення*

$$\frac{2n+1}{2\left(2s\right)!C_{n+s}^{n-s}}\int\limits_{-1}^{1}P_{n}^{(s)}\left(x\right)P_{r}^{(s)}\left(x\right)\left(1-x^{2}\right)^{s}dx=\delta_{nr}.\tag{3.10}$$

Доведення. Відомо, що для многочленів Гегенбауера C_{n}^{λ} виконуються умови ортогональності [6, с. 179]

$$\frac{n!\left(n+\lambda\right)\left[\Gamma(\lambda)\right]^{2}}{2^{1-2\lambda}\pi\Gamma(n+2\lambda)}\int\limits_{-1}^{1}C_{n}^{\lambda}\left(x\right)C_{r}^{\lambda}\left(x\right)\left(1-x^{2}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}dx=\delta_{nr}.\tag{3.11}$$

Застосовуючи останню рівність до многочленів Гегенбауера $C_{n-s}^{s+\frac{1}{2}}\left(x\right)$ та враховуючи їхній зв'язок із похідними многочленів Лежандра $C_{n-s}^{s+\frac{1}{2}}\left(x\right)=\dfrac{2^{s}}{s!C_{2s}^{s}}P_{n}^{(s)}\left(x\right)$, матимемо

$$\frac{2^{4s}\left(n-s\right)!\left(n+\frac{1}{2}\right)\left[\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\right]^{2}}{\pi\Gamma(n+s+1)\left(s!\right)^{2}\left(C_{2s}^{s}\right)^{2}}\int\limits_{-1}^{1}P_{n}^{(s)}\left(x\right)P_{r}^{(s)}\left(x\right)\left(1-x^{2}\right)^{s}dx=\delta_{nr}.\tag{3.12}$$

Використовуючи формулу Лежандра [6, с. 19]

$$\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$$

та рівність (1.10), спростимо вираз

$$\frac{2^{4s}\,(n-s)!\,\left(n+\frac{1}{2}\right)\left[\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\right]^2}{\pi\Gamma(n+s+1)\,(s!)^2\,\left(C_{2s}^s\right)^2}.$$

Одержимо

$$\frac{2^{4s}\,(n-s)!\,\left(n+\frac{1}{2}\right)\left[\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\right]^2}{\pi\Gamma(n+s+1)\,(s!)^2\,\left(C_{2s}^s\right)^2} = \frac{2^{4s-1}\,(n-s)!\,(2n+1)\,\pi\,[\Gamma(2s)]^2}{\pi\,(n+s)!\,(s!)^2\,\left(C_{2s}^s\right)^2\,2^{4s-2}\,[\Gamma(s)]^2} =$$
$$= \frac{2\,(2n+1)\,(n-s)!\,[(2s-1)!]^2\,(s!)^2}{(n+s)!\,[(2s)!]^2\,[(s-1)!]^2} = \frac{(2n+1)\,(n-s)!}{2\,(n+s)!} = \frac{2n+1}{2\,(2s)!C_{n+s}^{n-s}}.$$

Підставивши останній вираз у (3.12), приходимо до рівностей (3.10).

Теорема 3.2. *Асоційовані функції $\omega_{n-s}(z)$ мають інтегральне зображення*

$$\omega_{n-s}(z) = \frac{2n+1}{2\,(2s)!C_{n+s}^{n-s}}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\left(1-x^2\right)^s}{z-x}P_n^{(s)}(x)\,dx. \tag{3.13}$$

Доведення. Запишемо для многочлена $P_n^{(s)}(x)$ інтегральну формулу Коші

$$P_n^{(s)}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{P_n^{(s)}(z)}{z-x}\,dz,$$

де Γ — контур, який є границею області, що містить відрізок $[-1;1]$. Підставивши її у співвідношення (3.10), одержимо

$$\frac{2n+1}{2\,(2s)!C_{n+s}^{n-s}}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{P_n^{(s)}(z)}{z-x}\,dz\right)P_r^{(s)}(x)\left(1-x^2\right)^s dx = \delta_{nr}.$$

Змінюючи у лівій частині останньої рівності порядок інтегрування, знаходимо

$$\frac{2n+1}{2\,(2s)!C_{n+s}^{n-s}}\int\limits_{\Gamma}P_n^{(s)}(z)\left(\int\limits_{-1}^{1}\frac{P_r^{(s)}(x)\left(1-x^2\right)^s}{z-x}dx\right)dz = \delta_{nr}.$$

Звідси на підставі співвідношень (3.8), приходимо до зображення (3.13).

Позначимо $S_{n-s}(z) = P_n^{(s)}(z)$.

Теорема 3.3. *Справедливе розвинення*

$$\frac{1}{t-z} = \sum_{n=s}^{\infty}P_n^{(s)}(z)\,\omega_{n-s}(t), \tag{3.14}$$

яке рівномірно збігається для $t \in \bar{D}_\rho^\infty$, $z \in \bar{D}_r^0$, де ρ, r — будь-які числа, що задовольняють умови $0 < r < \infty$, $\rho > \max\{1, r\}$, $\bar{D}_\rho^\infty$ — замкнена область, що містить нескінченно віддалену точку, границею якої є еліпс Γ_ρ, $\bar{D}_r^0$ — замкнена область, що містить нульову точку, границею якої є еліпс Γ_r.

Доведення. Підставивши у праву частину рівності (3.14) вирази (3.5) та (3.6) для асоційованих функцій, отримаємо

$$\sum_{l=0}^{\infty} S_l(z)\omega_l(t) = \sum_{n=s}^{\infty} P_n^{(s)}(z)\omega_{n-s}(t) = \sum_{2n=s}^{\infty} P_{2n}^{(s)}(z)\omega_{2n-s}(t) + \sum_{2n+1=s}^{\infty} P_{2n+1}^{(s)}(z)\omega_{2n+1-s}(t) =$$

$$= \sum_{n=\left[\frac{s}{2}\right]}^{\infty} P_{2n}^{(s)}(z)\frac{2^{2n}(4n+1)}{(s+1)!C_{2n+s+1}^{2n}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_{j+2n}^{j}}{C_{2j+4n+1}^{2j+2n-s}} \frac{1}{t^{2j+2n+1-s}} +$$

$$+ \sum_{n=\left[\frac{s-1}{2}\right]}^{\infty} P_{2n+1}^{(s)}(z)\frac{2^{2n+1}(4n+3)}{(s+1)!C_{2n+s+2}^{2n+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_{j+2n+1}^{j}}{C_{2j+4n+3}^{2j+2n+1-s}} \frac{1}{t^{2j+2n+2-s}} =$$

$$= \left| \begin{matrix} l = j+n \\ j = l-n \end{matrix} \right| = \sum_{n=\left[\frac{s}{2}\right]}^{\infty} P_{2n}^{(s)}(z)\frac{2^{2n}(4n+1)}{(s+1)!C_{2n+s+1}^{2n}} \sum_{l=n}^{\infty} \frac{C_{l+n}^{l-n}}{C_{2l+2n+1}^{2l-s}} \frac{1}{t^{2l-s+1}} +$$

$$+ \sum_{n=\left[\frac{s-1}{2}\right]}^{\infty} P_{2n+1}^{(s)}(z)\frac{2^{2n+1}(4n+3)}{(s+1)!C_{2n+s+2}^{2n+1}} \sum_{l=n}^{\infty} \frac{C_{l+n+1}^{l-n}}{C_{2l+2n+3}^{2l+1-s}} \frac{1}{t^{2l-s+2}}.$$

Змінивши в двох останніх сумах порядок підсумовування, матимемо

$$\sum_{n=s}^{\infty} P_n^{(s)}(z)\,\omega_{n-s}(t) = \sum_{2l=s}^{\infty} \frac{1}{t^{2l-s+1}} \sum_{n=\left[\frac{s}{2}\right]}^{l} \frac{2^{2n}(4n+1)\,C_{l+n}^{l-n}}{(s+1)!C_{2n+s+1}^{2n}C_{2l+2n+1}^{2l-s}} P_{2n}^{(s)}(z) +$$

$$+ \sum_{2l+1=s}^{\infty} \frac{1}{t^{2l-s+2}} \sum_{n=\left[\frac{s-1}{2}\right]}^{l} \frac{2^{2n+1}(4n+3)\,C_{l+n+1}^{l-n}}{(s+1)!C_{2n+s+2}^{2n+1}C_{2l+2n+3}^{2l+1-s}} P_{2n+1}^{(s)}(z). \tag{3.15}$$

Перетворимо

$$\frac{2^{2n}(4n+1)\,C_{l+n}^{l-n}}{(s+1)!C_{2n+s+1}^{2n}C_{2l+2n+1}^{2l-s}} = \frac{2^{2n}(4n+1)\,(l+n)!\,(2l-s)!}{(l-n)!\,(2l+2n+1)!} =$$

$$= \frac{2^{2n}(4n+1)\,(l+n)!\,(2l-s)!\,(2l)!\,(l+n)!}{(l-n)!\,(2l+2n+1)!\,(2l)!\,(l+n)!} = \frac{1}{s!C_{2l}^{s}} \frac{2^{2n}(4n+1)\,C_{2l}^{l-n}}{(2l+2n+1)\,C_{2(l+n)}^{l+n}}.$$

Аналогічно

$$\frac{2^{2n+1}(4n+3)\,C_{l+n+1}^{l-n}}{(s+1)!C_{2n+s+2}^{2n+1}C_{2l+2n+3}^{2l+1-s}} = \frac{1}{s!C_{2l+1}^{s}} \frac{2^{2n+1}(4n+3)\,C_{2l+1}^{l-n}}{(2l+2n+3)\,C_{2(l+n+1)}^{l+n+1}}.$$

Підставивши отримані вирази у (3.15) та врахувавши співвідношення (1.4) та (1.5), остаточно знаходимо

$$\sum_{n=s}^{\infty} P_n^{(s)}(z)\,\omega_{n-s}(t) = \sum_{2l=s}^{\infty} \frac{z^{2l-s}}{t^{2l-s+1}} + \sum_{2l+1=s}^{\infty} \frac{z^{2l+1-s}}{t^{2l-s+2}} =$$

$$= \frac{1}{t}\left(\frac{t}{z}\right)^{s} \sum_{n=s}^{\infty} \left(\frac{z}{t}\right)^{n} = \frac{t^{s-1}}{z^{s}} \frac{\left(\frac{z}{t}\right)}{1-\frac{z}{t}} = \frac{1}{t-z}.$$

Покажемо, що ряд $\sum\limits_{n=s}^{\infty} P_n^{(s)}(z)\omega_{n-s}(t)$ рівномірно збіжний для $t \in \bar{D}_{\rho}^{\infty}$, $z \in \bar{D}_{r}^{0}$, де ρ, r — будь-які числа, що задовольняють умови $0 < r < \infty,\ \rho > \max\{1, r\}$.

Врахувавши оцінку (1.8) для похідних многочленів Лежандра, отримаємо

$$\left| \sum_{n=s}^{\infty} P_n^{(s)}(z)\,\omega_{n-s}(t) \right| \le \sum_{n=s}^{\infty} \left| P_n^{(s)}(z) \right| \left| \omega_{n-s}(t) \right| \le$$

$$\le 2^{s} s! \sum_{n=s}^{\infty} C_{n+s}^{n-s} r^{n-s} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{n}(2n+1)\,C_{j+n}^{j}}{(s+1)!C_{n+s+1}^{n}C_{2n+2j+1}^{2j+n-s}} \frac{1}{|t|^{2j+n-s+1}}. \tag{3.16}$$

На підставі асимптотичних рівностей (3.7) та

$$\frac{(m+s)!}{(m-s)!} \sim \frac{(m+s)^{m+s}\, e^{m-s}}{e^{m+s}\,(m-s)^{m-s}} = \frac{m^{2s}}{e^{2s}} \frac{\left(1+\dfrac{s}{m}\right)^{m+s}}{\left(1-\dfrac{s}{m}\right)^{m-s}} \sim m^{2s} \tag{3.17}$$

ряд у правій частині співвідношення (3.16) еквівалентний ряду

$$\frac{2^s s!}{(2s)!} \sum_{n=s_0}^{\infty} (2n+1)\, n^{2s} r^{n-s} \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{1}{(2j)^{s+1}\, |t|^{2j+n-s+1}}.$$

Оскільки $\dfrac{1}{(2j)^{s+1}} < 1$, то останній ряд оцінюється рядом

$$\frac{2^s s!}{(2s)!} \sum_{n=s}^{\infty} (2n+1)\, n^{2s} \left(\frac{r}{|t|}\right)^{n-s} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{|t|^{2j+1}} =$$

$$= \frac{2^s s!}{(2s)!} \sum_{n=s}^{\infty} (2n+1)\, n^{2s} \left(\frac{r}{|t|}\right)^{n-s} \frac{1}{|t|^2-1} < \frac{2^s s!}{(2s)!} \sum_{n=s}^{\infty} (2n+1)\, n^{2s} \left(\frac{r}{|t|}\right)^{n-s},$$

який збігається при $\rho > r$. Звідси випливає, що ряд у співвідношенні (3.14) рівномірно збігається у зазначених областях.

IV. Розвинення аналітичних функцій за системою похідних многочленів Лежандра

Теорема 4.1. *Нехай функція $f(z)$ комплексної змінної однозначна та аналітична у відкритій області D_R, границею якої є еліпс Γ_R $(1 < R \le \infty)$ з рівнянням $z = \dfrac{1}{2}\left(Re^{i\varphi} + R^{-1}e^{-i\varphi}\right)$, $(0 \le \varphi < 2\pi)$. Тоді ряд $\sum\limits_{m=s}^{\infty} L_{m-s}(f) P_m^{(s)}$ рівномірно збігається в замкненій області $\bar{D}_\rho$, обмеженій еліпсом Γ_ρ, де $1 \le \rho < R$.*

Доведення. Оскільки степеневий ряд (3.1) рівномірно збігається в крузі $\{z : |z| \le r\}$, $r < R_0$, то

$$\frac{\left|f^{(2j+m-s)}(0)\right|}{(2j+m-s)!} \le \frac{K}{r^{2j+m-s}}, \quad K = const. \tag{4.1}$$

Врахувавши співвідношення (3.3) та нерівності (1.8), (4.1), отримаємо

$$\left|\sum_{m=s}^{\infty} L_{m-s}(f) P_m^{(s)}\right| \le \sum_{m=s}^{\infty} |L_{m-s}(f)| \left|P_m^{(s)}\right| \le$$

$$\le 2^s s! K \sum_{m=s}^{\infty} C_{m+s}^{m-s} \left(\frac{R}{r}\right)^{m-s} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^m\,(2m+1)\, C_{j+m}^{j}}{(s+1)! C_{m+s+1}^{m} C_{2j+2m+1}^{2j+m-s}} \frac{1}{r^{2j}}.$$

Останній ряд на підставі асимптотичних рівностей (3.7) та (3.17) еквівалентний ряду

$$2^s s! K \sum_{m=s}^{\infty} \frac{m^{2s}}{(2s)!} \left(\frac{R}{r}\right)^{m-s} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2m+1}{(2j)^{s+1}} \frac{1}{r^{2j}}.$$

Мажорантним рядом для останнього є збіжний при $R < r$ ряд

$$2^s s! K \frac{r^2}{r^2-1} \sum_{m=s}^{\infty} \frac{(2m+1)\, m^{2s}}{(2s)!} \left(\frac{R}{r}\right)^{m-s}.$$

Звідси випливає рівномірна збіжність ряду $\sum\limits_{m=s}^{\infty} L_{m-s}(f) P_m^{(s)}$ у зазначеній області.

Приклад 4.1. Розкласти функцію $\dfrac{1}{a-z}$ в ряд за похідними многочленів Лежандра.

Зі співвідношення (3.14) маємо

$$\frac{1}{a-z} = \sum_{n=s}^{\infty} P_n^{(s)}(z) \omega_{n-s}(a) = \sum_{l=0}^{\infty} S_l(z) \omega_l(a) \quad (|a| > |z|),$$

де $\omega_l(a)$ – коефіцієнти, які визначаються за формулою (3.4).

Приклад 4.2. Розкласти функцію $\dfrac{a}{a^2-z^2}$ в ряд за похідними многочленів Лежандра.

Оскільки для многочленів Гегенбауера $C_n^\lambda(z)$ виконується рівність [11, с. 170]

$$C_n^\lambda(-z) = (-1)^n C_n^\lambda(z),$$

то зі співвідношення (1.12) маємо

$$P_n^{(s)}(-z) = (-1)^{n-s} P_n^{(s)}(z) \quad (n \ge s). \tag{4.2}$$

На підставі рівності

$$\frac{1}{(a-z)(a+z)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a-z} + \frac{1}{a+z}\right)$$

та співвідношення (3.14) знаходимо

$$\frac{a}{a^2-z^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=s}^{\infty}P_n^{(s)}(z)\omega_{n-s}(a)+\sum_{n=s}^{\infty}(-1)^{n-s}P_n^{(s)}(z)\omega_{n-s}(a)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=s}^{\infty}\left(1+(-1)^{n-s}\right)P_n^{(s)}(z)\omega_{n-s}(a)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\infty}\left(1+(-1)^{l}\right)S_l(z)\omega_l(a).$$

В останній сумі залишаться доданки при $l=2k$, тому

$$\frac{a}{a^2-z^2}=\sum_{l=0}^{\infty}S_{2k}(z)\omega_{2k}(a)\quad(|a|>|z|)\,,$$

де $\omega_l(a)$ — коефіцієнти, які визначаються за формулою (3.4).

Приклад 4.3. Розкласти функцію $\frac{z}{a^2-z^2}$ в ряд за похідними многочленів Лежандра.

Використовуючи рівність

$$\frac{z}{a^2-z^2}=\frac{a+z-a}{a^2-z^2}=\frac{1}{a-z}-\frac{a}{a^2-z^2},$$

приклади 4.1 та 4.2, матимемо

$$\frac{z}{a^2-z^2}=\sum_{l=0}^{\infty}S_l(z)\omega_l(a)-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\infty}\left(1+(-1)^{l}\right)S_l(z)\omega_l(a)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\infty}\left(1-(-1)^{l}\right)S_l(z)\omega_l(a).$$

В останній сумі залишаться доданки при $l=2k+1$, тому

$$\frac{a}{a^2-z^2}=\sum_{k=0}^{\infty}S_{2k+1}(z)\omega_{2k+1}(a)\quad(|a|>|z|)\,,$$

де $\omega_l(a)$ — коефіцієнти, які визначаються за формулою (3.4).

Висновки

Узагальненням методу розкладу функцій у степеневі ряди в комплексній області є їхнє розвинення за системою поліномів, біортогональною з деякою іншою системою (асоційованих) функцій. За певних умов [7] для будь-якої незалежної і повної системи функцій можна побудувати відповідну систему асоційованих функцій і конструювати ряди за нею.

У роботі побудовано систему функцій, асоційованих з похідними $P_n^{(s)}(z)$ многочленів Лежандра $P_n(z)$, встановлено умови розвинення аналітичних у крузі функцій в ряди за многочленами $P_n^{(s)}(z)$ та наведено приклади таких розкладів. Крім того, отримано співвідношення між похідними многочленів Лежандра та деякими ортогональними многочленами, а також комбінаторні тотожності, які мають самостійний інтерес.

Література

[1] Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышова. – М.: Наука, 1983. – 384 с.

[2] Полиа Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч.1. – М.: Наука, 1978. – 392 с.

[3] Сегё Г. Ортогональные многочлены. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 500 с.

[4] Сухорольський М.А. Система похідних від поліномів Чебишова у комплексній площині поліномів / Метода математики. – 2008. – №6. – С. 8–15.

[5] Сухорольський М.А. Наближення функцій поліномами Лежандра в комплексній області / Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Серія фізико-математичні науки. – 2009. – №643. – С. 3–14.

[6] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1. – М.: Наука, 1973. – 294 с.

[7] Маркушевич А.И. Избранные главы теории аналитических функций. – М.: Наука, 1976. – 192 с.

[8] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.2. – М.: Наука, 1973. – 294 с.

[9] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 800 с.

[10] Жевержеев В.Ф., Кальницкий Л.А., Сапогов Н.А. Специальный курс высшей математики для втузов. – М.: Высшая школа, 1970. – 416 с.

[11] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 336 с.

РАЗЛОЖЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ ПО СИСТЕМЕ ПРОИЗВОДНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ЛЕЖАНДРА

М.А. Сухорольский, В.В. Достойная

Национальный университет "Львівська політехніка",
ул. С. Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина

Исследованы свойства производных многочленов Лежандра в комплексной области и условия разложения аналитических в круге функций в ряды по ним.

Ключевые слова: аналитическая функция, многочлены Лежандра, биортогональная система функций, асоциированная функция.

2000 MSC: 33C47

УДК: 517.538.36

EXPANSION OF ANALYTICAL FUNCTIONS IN CIRCLE INTO SERIES BY SYSTEM OF THE DERIVATIVES OF LEGENDRE POLYNOMIALS IN THE COMPLEX DOMAIN

M.A. Sukhorolsky , V.V. Dostoyna

National University "Lvivska Politechnika"
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

Properties of the derivatives of Legandre polynomials in the complex domain and conditions of expansion of analytical functions in circle into series by them are investigated.

Keywords: analytical function, Legandre polynomials, biorthogonal system of functions, associated function.

2000 MSC: 33C47

УДК: 517.538.36