ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.687 № 687, (2010) с. 97–104

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.687 No 687, (2010) 97–104

НЕЛОКАЛЬНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ З АЛГЕБРИЧНО ЗАЛЕЖНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Ю.А. Дубінський[a], В.С. Ільків[b], І.Я. Савка[c], М.М. Симотюк[c]

[a] *Московський енергетичний інститут (Технічний університет)*
вул. Красноказарменна, 14, 111250, Москва, Росія
[b] *Національний університет "Львівська політехніка"*
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна
[c] *Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України*
вул. Наукова 3-б, 79000, Львів, Україна

(Отримано 21 червня 2010 р.)

Досліджено нелокальну крайову задачу для рівнянь із частинними похідними нескінченного порядку з алгебрично залежними коефіцієнтами. Вивчено її розв'язність та встановлено метричну теорему про вкладення просторів Соболєва нескінченного порядку і просторів еспоненціального типу.

Ключові слова: диференціальні рівняння, нелокальні умови, функціональні простори нескінченного порядку, малі знаменники, діофантові наближення, залежні коефіцієнти, алгебричний многовид, метричні оцінки.

2000 MSC: 35G15

УДК: 517.95

Вступ[1]

У роботі [2] вивчено розв'язність в циліндричній області $\mathcal{D}^p = (0,T)\times\Omega_p$, де $T>0$, Ω_p — p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, задачі для диференціального рівняння з частинними похідними нескінченного порядку

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\Big)u \equiv \sum_{|\hat{s}|=0}^{\infty} a_{\hat{s}}\frac{\partial^{|\hat{s}|}u}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}} = f(t,x), \quad (1)$$

з нелокальними умовами за часовою змінною

$$L_j u \equiv \frac{\partial^{j-1}u}{\partial t^{j-1}}\Big|_{t=0} - \mu\frac{\partial^{j-1}u}{\partial t^{j-1}}\Big|_{t=T} = 0, j=1,2,\ldots, \quad (2)$$

де $a_{\hat{s}}$ і μ ($\mu\neq 0$) — комплексні числа.

Істотна частина дослідження цієї задачі полягає у побудові та дослідженні відповідних функціональних просторів — просторів нескінченного порядку, а також у встановленні теорем вкладення між соболєвськими просторами нескінченного порядку і просторами скінченного порядку. Під час доведення цих теорем вкладення виникає проблема малих знаменників, яку вирішують за допомогою метричного підходу у припущенні незалежності коефіцієнтів рівняння (1). Умови існування таких вкладень просторів мають метричний характер.

Розв'язність нелокальних задач для систем рівнянь з частинними похідними нескінченного порядку в області $\mathcal{D}^p$ вивчено у роботах [6, 7].

Простори Соболєва нескінченного порядку введені у роботах [3, 4, 5] при дослідженні задачі Діріхле і задачі про періодичні розв'язки для рівнянь нескінченного порядку еліптичного і гіперболічного типів. Для безтипних рівнянь нескінченного порядку такі простори введені і вивчені у роботі [2].

[1]Дослідження підтримані ДФФД України (проект № 28.1/010).

I. Опис функціональних просторів скінченного і нескінченного порядків

Введемо спочатку такі функціональні простори:

$\mathbf{T}(\Omega_p)$ — простір тригонометричних поліномів $\varphi(x)=\sum_k \varphi_k \exp(ik,x)$,

$H_q(\Omega_p)$, $q\in\mathbb{R}$, — простір Соболєва 2π-періодичних функцій, отриманих поповненням множини $\mathbf{T}(\Omega_p)$ за нормою $\|\cdot\|_{H_q(\Omega_p)}$, яка породжується скалярним добутком

$$\big(\varphi,\psi\big)_{H_q(\Omega_p)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\widetilde{k}^{2q}\varphi_k\bar{\psi}_k, \quad \widetilde{k}=\sqrt{1+k_1^2+\cdots+k_p^2},$$

$H_q^n(\bar{\mathcal{D}}^p)$, $q\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}_+$, — банахів простір функцій $u=u(t,x)$ таких, що для кожного $t\in[0,T]$ функції $\dfrac{\partial^j u(t,\cdot)}{\partial t^j}$, $j=0,1,\ldots,n$, належать простору $H_{q-j}(\Omega_p)$ та неперервні на відрізку $[0,T]$ у нормі цього простору; норма в просторі $H_q^n(\bar{\mathcal{D}}^p)$ визначається формулою

$$\|u\|^2_{H_q^n(\bar{\mathcal{D}}^p)} = \sum_{j=0}^{n}\max_{t\in[0,T]}\Big\|\frac{\partial^j u(t,\cdot)}{\partial t^j}\Big\|^2_{H_{q-j}(\Omega_p)}.$$

Для опису класу функцій, в якому є розв'язна задача (1), (2), розглянемо в області $\mathcal{D}^p$ задачу на власні значення скінченного порядку n:

$$\tilde{L}\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\Big)u \equiv \sum_{|\hat{s}|=0}^{n} a_{\hat{s}} \frac{\partial^{|\hat{s}|}u}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}} = \lambda u, \qquad (3)$$

$$L_j u \equiv \frac{\partial^{j-1}u}{\partial t^{j-1}}\Big|_{t=0} - \mu \frac{\partial^{j-1}u}{\partial t^{j-1}}\Big|_{t=T} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \qquad (4)$$

що відповідає задачі (1), (2).

Під розв'язком задачі (3), (4) із простору $H_q^n(\bar{\mathcal{D}}^p)$ розуміємо функцію u, $u \neq 0$, яка задовольняє умови

$$\left\|\tilde{L}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u - \lambda u\right\|_{H^0_{q-n}(\bar{\mathcal{D}}^p)} = 0,$$

$$\|L_j\, u\|_{H_{q-1+j}(\Omega_p)} = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Через $R_{k,m}$, $(k,m) \in \mathbb{Z}^{p+1}$, позначимо множину всіх розв'язків у цілих числах m^*, $k^* = (k_1^*, \dots, k_p^*)$ рівняння

$$\tilde{L}(\tau(m^*), ik^*) = \tilde{L}(\tau(m), ik),$$

де

$$\tau(m) = -(\ln\mu)/T + i2\pi m/T,$$

а $\ln\mu$ розуміється як головне значення логарифма.

Теорема 1. [1, с. 159] *1. Власними значеннями задачі* (3), (4) *є числа*

$$\lambda_{k,m} = \tilde{L}(\tau(m), ik), \quad (k,m) \in \mathbb{Z}^{p+1}.$$

2. Власними функціями, що відповідають власному значенню $\lambda_{k,m}$, є функції

$$u_{k^*,m^*} = e^{\tau(m^*)t + i(k^*,x)}, \quad (k^*, m^*) \in R_{k,m}.$$

3. Множина функцій $e^{\tau(m)t+i(k,x)}$, $(k,m) \in \mathbb{Z}^{p+1}$, утворює базу Рісса у просторі $L_2(\bar{\mathcal{D}}^p)$.

Для задачі (3), (4) скінченного порядку природно розглядати простори Соболєва скінченного порядку $W^q(\bar{\mathcal{D}}^p)$, $q \in \mathbb{R}$, що є поповненнями скінченних сум вигляду

$$u(t,x) = \sum_{(k,m)} u_{k,m} e^{\tau(m)t + i(k,x)}$$

за нормою

$$\|u\|_q^2 = (2\pi)^p T \sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}} (m^2 + \widetilde{k}^2)^q |u_{k,m}|^2.$$

Для визначення відповідних просторів у випадку рівняння нескінченного порядку введемо позначення:

$$\begin{aligned} &\Lambda = \mathbb{Z}^{p+1}\backslash\Lambda_0, \\ &\Lambda_0 = \{(k,m) \in \mathbb{Z}^{p+1} : L(\tau(m), ik) = 0\}, \end{aligned} \qquad (5)$$

$$\lambda_{k,m} = \begin{cases} 1, & (k,m) \in \Lambda_0 \\ |L(\tau(m), ik)|, & (k,m) \in \Lambda. \end{cases} \qquad (6)$$

Якщо для деякого вектора $(k,m) \in \mathbb{Z}^{p+1}$ ряд $L(\tau(m), ik)$ розбіжний, то відповідне значення $\lambda_{k,m} = \infty$, а $u_{k,m}$ вважаємо нулем.

Простором Соболєва нескінченного порядку для задачі (1), (2) називаємо простір [2]

$$\begin{aligned} W^\infty\{a_{\hat{s}}\} = \Big\{ u = &\sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}} u_{k,m} e^{\tau(m)t + i(k,x)} : \\ &\|u\|_\infty^2 = \sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}} \lambda_{k,m} |u_{k,m}|^2 < \infty \Big\}. \end{aligned} \qquad (7)$$

Простір $W^\infty\{a_{\hat{s}}\}$ називається нетривіальним, якщо він нескінченновимірний.

Теорема 2. [9, с. 253] *Простір $W^\infty\{a_{\hat{s}}\}$ нетривіальний тоді і тільки тоді, коли існує послідовність векторів $(k_j, m_j) \in \mathbb{Z}^{p+1}$, $j = 1, 2, \dots$, така, що $\lambda_{k_j,m_j} < \infty$.*

Для того, щоб уникнути виродженого випадку, коли функції залежать від меншого, ніж $p+1$, числа аргуметів, надалі розглядатимемо лише ті нетривіальні простори $W^\infty\{a_{\hat{s}}\}$, які щільні в $W^0(\bar{\mathcal{D}}^p)$.

Теорема 3. [9, с. 254] *Простір $W^\infty\{a_{\hat{s}}\}$ щільний в $W^0(\bar{\mathcal{D}}^p)$ тоді і тільки тоді, коли $\lambda_{k,m} < \infty$ для всіх векторів $(k,m) \in \mathbb{Z}^{p+1}$.*

Теорема 4. [9, с. 255] *Простір $W^\infty\{a_{\hat{s}}\}$ є щільним в $W^0(\bar{\mathcal{D}}^p)$, якщо функція*

$$\varphi(z_0, z_1, \dots, z_p) = \sum_{|\hat{s}|=0}^{\infty} a_{\hat{s}} z_0^{s_0} z_1^{s_1} \dots z_p^{s_p}$$

належить класу цілих функцій від комплексних змінних $z_0, z_1, \dots, z_p$.

Розглянемо також простір, спряжений з простором $W^\infty\{a_{\hat{s}}\}$, а саме:

$$\begin{aligned} W^{-\infty}\{a_{\hat{s}}\} = \Big\{ f = &\sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}} f_{k,m} e^{\tau(m)t + i(k,x)} : \\ &\|f\|_{-\infty}^2 = \sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}} \lambda_{k,m}^{-1} |f_{k,m}|^2 < \infty \Big\}. \end{aligned}$$

Очевидно, що

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) : W^\infty\{a_{\hat{s}}\} \to W^{-\infty}\{a_{\hat{s}}\}.$$

Тут $W^{-\infty}\{a_{\hat{s}}\}$ — простір антилінійних неперервних функціоналів, що визначені на просторі функцій $W^\infty\{a_{\hat{s}}\}$. Значення функціоналу $f \in W^{-\infty}\{a_{\hat{s}}\}$ на функкції $u \in W^\infty\{a_{\hat{s}}\}$ задається формулою $f(u) = (f,u)_0 \equiv (2\pi)^p T \sum\limits_{k,m\in\mathbb{Z}^{p+1}} f_{k,m} \cdot \bar{u}_{k,m}$.

II. Теорема вкладення просторів у випадку алгебричної залежності коефіцієнтів рівняння

Нехай $M \subset \mathbb{C}^\infty$ — множина нескінченновимірних векторів

$$\{a_{\hat{s}} : |\hat{s}| = 0, 1, \ldots\},$$

кожний з яких визначає щільний в $W^0(\bar{\mathcal{D}}^p)$ простір $W^\infty\{a_{\hat{s}}\}$, і нехай M_n ($M_n \subset \mathbb{C}^{p+1}$) — проекція множини M на підпростір векторів $(z_0, z) = (z_0, z_1, \ldots, z_p)$, де

$$z_j = a_{\hat{s}(j)}$$

при $\hat{s}(j) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{j}, n, 0, \ldots, 0)$, $j = 0, 1, \ldots, p$.

У випадку незалежності коефіцієнтів $z_0, z_1, \ldots, z_p$ рівняння (1) за допомогою метричного підходу встановлена теорема про відношення вкладення між введеними просторами $W^\infty\{a_{\hat{s}}\}$ і $W^{-\infty}\{a_{\hat{s}}\}$ та просторами $W^q(\bar{\mathcal{D}}^p)$, $q \in \mathbb{R}$.

Теорема 5. [2] *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{C}^{p+1}$) векторів $z \in M_n$ справедливі включення*

$$W^\infty\{a_{\hat{s}}\} \subset W^q(\bar{\mathcal{D}}^p), \quad W^{-q}(\bar{\mathcal{D}}^p) \subset W^{-\infty}\{a_{\hat{s}}\}$$

при $q < (2n - p - 1)/4$, причому $||u||_q \le C_1 ||u||_\infty$, $||f||_{-\infty} \le C_1 ||f||_{-q}$, де $C_1 = C_1(\{a_{\hat{s}}\}) > 0$.

Встановлені у теоремі співвідношення для просторів Соболєва скінченного та нескінченного порядків, взагалі, не можна використовувати для залежних коефіцієнтів $z_0, z_1, \ldots, z_p$ рівняння (1). У роботі встановлено клас функціональних просторів, для яких доведено теорему вкладення для алгебрично залежних $z_0, z_1, \ldots, z_p$, а саме:

$$R(z_0, z) \equiv \sum_{j=0}^{d} A_j(z) z_0^{d-j} = 0, \qquad (8)$$

де

$$A_j(z) = \sum_{|s| \le j} \alpha_{j,s} z_1^{s_1} \ldots z_p^{s_p}, \quad \alpha_{0,0} = 1,$$

$$\alpha_{j,s} \in \mathbb{C}, \quad j = 0, 1, \ldots, d.$$

Відомо, що для кожного фіксованого $z \in \mathbb{C}$ рівняння $R(z_0, z) = 0$ має рівно d коренів

$$z_0^1(z), \ldots, z_0^d(z),$$

тому $R(z_0, z) = (z_0 - z_0^1(z)) \ldots (z_0 - z_0^d(z))$.

Система з двох алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} R(z_0, z) = 0 \\ \dfrac{\partial R(z_0, z)}{\partial z_0} = 0 \end{cases}$$

має розв'язок, якщо дискримінант $D_R(z)$ многочлена $R(z_0, z)$ за змінною z_0 перетворюється в нуль, тобто $D_R(z) = 0$. Тоді, якщо $D_R(z) \ne 0$ для будь-якої точки $z \in \mathbb{C}^p$, то функція R є регулярною порядку 1 за змінною z_0 (інакше кажучи, функція R як функція однієї змінної z_0 має нуль порядку 1), тобто

$$R(z_0, z) = 0, \quad \frac{\partial R(z_0, z)}{\partial z_0} \ne 0,$$

і за теоремою про неявну функцію комплексної змінної [10, ст. 467] отримаємо d аналітичних функцій $z_0^1(z), \ldots, z_0^d(z)$ — однозначних віток функції $z_0(z)$, які задовольняють рівняння $R(z_0, z) = 0$.

Зауваження. [8, с. 20] *Якщо функція D_R не дорівнює тотожно нулю, то*

$$\operatorname{meas}_{\mathbb{C}^p}\{z \in \Pi(\rho) : D_R(z) = 0\} = 0,$$

де $\Pi(\rho) = \{z \in \mathbb{C}^p : |z_j| \le \rho, \, j = 1, \ldots, p\}$ — полікруг.

Для формулювання аналогу теореми 5 у випадку $R(z_0, z) = 0$ замість $W^q(\bar{\mathcal{D}}^p)$ запровадимо такий функціональний простір $W^\sigma_{\beta_1,\beta_2}$, де $\sigma > 0$, $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$, що отриманий поповненням скінченних сум вигляду

$$u(t, x) = \sum_{(k,m)} u_{k,m} e^{\tau(m)t + i(k,x)}$$

за нормою

$$\|u\|^2_{W^\sigma_{\beta_1,\beta_2}} = \sum_{(k,m) \in \mathbb{Z}^{p+1}} (m^2 + \widetilde{k}^2)^{\beta_1} \times$$

$$\times \exp\big(\beta_2(|\tau(m)| + |k|)^\sigma\big) |u_{k,m}|^2.$$

Зауважимо, що $W^\sigma_{q,0} = W^q(\bar{\mathcal{D}}^p)$.

Теорема 6 (теорема вкладення). *Нехай існують такі дійсні сталі $\omega > 0$ і ψ, що при кожному $r = 1, \ldots, p$ для коефіцієнтів*

$$\alpha_{\theta(r,j)}, \quad \theta(r, j) = (j, \underbrace{0, \ldots, 0}_{r-1}, j, 0, \ldots, 0), j = 0, 1, \ldots, d,$$

алгебричного многовиду $R(z_0, z) = 0$ виконується нерівність

$$\Big| \sum_{j=0}^{d} (-1)^{d-j} \alpha_{\theta(r,j)} \xi^j \eta^{d-j} \Big| \ge \omega(|\xi| + |\eta|)^\psi \qquad (9)$$

для будь-якого вектора $(\xi, \eta) \in \mathbb{C}^2$, і нехай дискримінант $D_R(z)$ многочлена $R(z_0, z)$ за змінною z_0 не дорівнює тотожно нулю, тобто

$$D_R(z) \not\equiv 0, \qquad (10)$$

а також $L(z_0, z)$ є цілою функцією скінченного порядку σ, $\sigma > 0$. Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{C}^p$) векторів z із полікруга $\Pi(\rho)$ справедливі включення

$$W^\infty\{a_{\hat{s}}\} \subset W^\sigma_{-\delta,1-d}, \qquad W^\sigma_{\delta,d-1} \subset W^{-\infty}\{a_{\hat{s}}\} \qquad (11)$$

і оцінки

$$\|u\|_{W^\sigma_{-\delta,1-d}} \le C_2 \|u\|_\infty, \quad \|f\|_{-\infty} \le C_2 \|f\|_{W^\sigma_{\delta,d-1}} \qquad (12)$$

при $\delta > (d(p+1) - n\psi)/2$, $C_2 = C_2(a_{\hat{s}}) > 0$.

Для доведення цієї теореми вкладення використаємо допоміжні леми.

Лема 1. *Якщо*

$$F(z) = \alpha_1 z_1^d + \ldots + \alpha_p z_p^d + \sum_{\substack{|s|\le d,\\ s_i\ne d,\, i=1,\ldots,p}} \beta_s z_1^{s_1} \ldots z_p^{s_p},$$

$$|\alpha| \equiv |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_p| \ne 0, \quad \alpha_i \in \mathbb{C}, \quad \beta_s \in \mathbb{C}.$$

то

$$\mathrm{meas}_{\mathbb{C}^p}\{z \in \Pi(\rho) : |F(z)| < \varepsilon\} \le C_3 \left(\frac{\varepsilon}{|\alpha|}\right)^{2/d},$$

де додатна стала C_3 визначається формулою

$$C_3 = d\pi^p \rho^{2(p-1)} p^{2/d}.$$

Доведення. Нехай $\Pi_i(\rho) = \{z_i \in \mathbb{C} : |z_i| \le \rho\}$, $i = 1, \ldots, d$, $\alpha_1 = \max\limits_{i=1,\ldots,p} |\alpha_i|$, тоді $\alpha_1 \ge \dfrac{|\alpha|}{p} > 0$. Зобразимо многочлен $F(z)$ у вигляді

$$F(z) = \alpha_1\big(z_1 - \lambda_1(z_2, \ldots, z_p)\big) \ldots \big(z_1 - \lambda_d(z_2, \ldots, z_p)\big),$$

де $\lambda_i(z_2, \ldots, z_p)$, $i = 1, \ldots, d$, — корені рівняння $F(z) = 0$ за змінною z_1, звідки

$$A \equiv \{z \in \Pi(\rho) : |F(z)| < \varepsilon\} = \Big\{z \in \Pi(\rho) :$$

$$\big|z_1 - \lambda_1(z_2, \ldots, z_p\big| \ldots \big|z_1 - \lambda_d(z_2, \ldots, z_p)\big| < \frac{\varepsilon}{|\alpha_1|}\Big\}.$$

Легко бачити, що хоча б для одного індексу j виконуватиметься нерівність

$$\big|z_1 - \lambda_j(z_2, \ldots, z_p\big| < \left(\frac{\varepsilon}{|\alpha_1|}\right)^{1/d}, \quad j \in \{1, \ldots, p\}.$$

Зафіксуємо змінні $(z_2, \ldots, z_p) = (z_2^0, \ldots, z_p^0)$ і введемо множини

$$A(z_2^0, \ldots, z_p^0) = \Big\{z_1 \in \Pi_1(\rho) :$$

$$\big|z_1 - \lambda_1(z_2^0, \ldots, z_p^0\big| \ldots \big|z_1 - \lambda_d(z_2^0, \ldots, z_p^0)\big| < \frac{\varepsilon}{|\alpha_1|}\Big\},$$

$$A_i(z_2^0, \ldots, z_p^0) = \Big\{z_1 \in \Pi_1(\rho) :$$

$$\big|z_1 - \lambda_i(z_2^0, \ldots, z_p^0)\big| < \left(\frac{\varepsilon}{|\alpha_1|}\right)^{1/d}\Big\}, i = 1, \ldots, p.$$

Оцінимо міру множини $A_i(z_2^0, \ldots, z_p^0)$. Оскільки ця множина на комплексній площині є кругом, або частиною круга з центром у точці $\lambda_i(z_2^0, \ldots, z_p^0)$ та радіусом $(\varepsilon/|\alpha_1|)^{1/d}$, то

$$\mathrm{meas}_{\mathbb{C}} A_i(z_2^0, \ldots, z_p^0) \le \pi \left(\frac{\varepsilon}{|\alpha_1|}\right)^{2/d}, \quad i = 1, \ldots, p.$$

Із включень для деякого $j \in \{1, \ldots, p\}$

$$A(z_2^0, \ldots, z_p^0) \subset A_j(z_2^0, \ldots, z_p^0) \subset \bigcup_{i=1}^{d} A_i(z_2^0, \ldots, z_p^0)$$

випливає нерівність

$$\mathrm{meas}_{\mathbb{C}} A(z_2^0, \ldots, z_p^0) \le$$

$$\le \bigcup_{i=1}^{d} \mathrm{meas}_{\mathbb{C}} A_i(z_2^0, \ldots, z_p^0) \le d\pi \left(\frac{\varepsilon}{|\alpha_1|}\right)^{2/d}.$$

За теоремою Фубіні

$$\mathrm{meas}_{\mathbb{C}^p} A =$$

$$= \int_{\Pi_2(\rho)\times\ldots\times\Pi_p(\rho)} \mathrm{meas}_{\mathbb{C}} A(z_2^0, \ldots, z_p^0) dz_2^0 \ldots dz_p^0,$$

звідки випливає оцінка для міри множини A

$$\mathrm{meas}_{\mathbb{C}^p} A \le d\pi\, (\varepsilon/|\alpha_1|)^{2/d} \times$$

$$\times \left| \int_{\Pi_2(\rho)\times\ldots\times\Pi_p(\rho)} dz_2^0 \ldots dz_p^0 \right| \le$$

$$\le d\pi(\pi\rho^2)^{p-1} \left(\frac{\varepsilon}{|\alpha_1|}\right)^{2/d} \le d\pi^p \rho^{2(p-1)} p^{2/d} \left(\frac{\varepsilon}{|\alpha|}\right)^{2/d},$$

тобто

$$\mathrm{meas}_{\mathbb{C}^p} A \le C_3\, (\varepsilon/|\alpha|)^{2/d},$$

що і треба було довести.

Лема 2. *Якщо компоненти вектора $\alpha_{mk} = (\alpha_{mk_1}, \ldots, \alpha_{mk_p})$, $(m, k) \in \mathbb{Z}^{p+1}$, задовольняють для $r = 1, \ldots, p$ нерівності*

$$|\alpha_{mk_r}| \ge \omega(|\tau(m)|^n + |k_r|^n)^{\psi}, \quad (m, k_r) \in \mathbb{Z}^2, \tag{13}$$

де $\omega > 0$, $\psi \in \mathbb{R}$, то норма цього вектора справджує оцінку знизу

$$|\alpha_{mk}| \equiv |\alpha_{mk_1}| + \ldots + |\alpha_{mk_p}| \ge$$

$$\ge \begin{cases} C_4(m^2 + \widetilde{k}^2)^{n\psi/2}, & (m,k) \ne 0, \quad \psi \ne 0, \\ p\,\omega |\ln\mu|^{n\psi} T^{-n\psi}, & (m,k) = 0, \quad \psi \ne 0, \\ p\,\omega, & (m,k) \in \mathbb{Z}^{p+1}, \psi = 0, \end{cases} \tag{14}$$

де

$$C_4 = \begin{cases} 2^{-n\psi}\omega \min\{(\pi/T)^{n\psi}, p^{-n\psi/2}\}, & \psi > 0, \\ p\,\omega / \max\Big\{1, T^{n\psi}(|\ln\mu| + 2\pi)^{-n\psi}\Big\}, & \psi < 0. \end{cases}$$

Доведення. Позначимо $||k|| = \sqrt{\widetilde{k}^2 - 1}$. Оскільки $\tau(m) = \big(-\ln|\mu| + i(2\pi m - \arg\mu)\big)/T$, $|\arg\mu| \le \pi$, то

$$\begin{gathered} \frac{\pi}{T}|m| \le |\tau(m)| \le \frac{|\ln\mu| + 2\pi}{T}|m|, \quad m \ne 0, \\ |\tau(0)| = \frac{|\ln\mu|}{T}. \end{gathered} \tag{15}$$

З нерівностей (13), (15) та оцінок

$$|m|^n + ||k||^n \ge 2^{-n/2}(m^2 + ||k||^2)^{n/2} \ge$$

$$\ge 2^{-n}(m^2 + \widetilde{k}^2)^{n/2}, \quad (m,k) \ne 0,$$

$$|m|^n + ||k||^n \le (m^2 + \widetilde{k}^2)^{n/2}$$

випливає, що при $\psi > 0$ та $(m,k) \neq 0$

$$|\alpha_{mk}| \geq \omega\Big((\pi/T)^n|m|^n + p^{-n/2}||k||^n\Big)^{\psi} \geq$$

$$\geq \omega \min\{(\pi/T)^{n\psi}, p^{-n\psi/2}\}\big(|m|^n + ||k||^n\big)^{\psi} \geq$$

$$\geq 2^{-n\psi}\omega \min\{(\pi/T)^{n\psi}, p^{-n\psi/2}\}(m^2+\widetilde{k}^2)^{n\psi/2},$$

а при $\psi < 0$ та $(m,k) \neq 0$

$$|\alpha_{mk}| \geq \omega p\Big(\frac{|\ln\mu| + 2\pi}{T}|m|^n + ||k||^n\Big)^{\psi} \geq$$

$$\geq \frac{p\omega}{\max\Big\{1, \frac{T^{n\psi}}{(|\ln\mu|+2\pi)^{n\psi}}\Big\}}(m^2+\widetilde{k}^2)^{n\psi/2}.$$

Якщо $\psi \neq 0$ і $(m,k) = 0$, то легко бачити, що

$$|\alpha_{mk}| \geq p\,\omega|\ln\mu|^{n\psi}T^{-n\psi}.$$

Очевидно, що у випадку $\psi = 0$ для будь-якого $(m,k) \in \mathbb{Z}^{p+1}$ виконується нерівність

$$|\alpha_{mk}| \geq p\,\omega.$$

З отриманих вище нерівностей остаточно випливає нерівність (14). Лему доведено.

Введемо позначення

$$\bar{L}_{mk}(z_0,z) \equiv L(\tau(m), ik) =$$

$$= z_0[\tau(m)]^n + z_1(ik_1)^n + \ldots + z_p(ik_p)^n + L_1(m,k),$$

$F_{mk}(z)$ — результант многочленів $\bar{L}_{mk}(z_0,z)$ і $R(z_0,z)$ за змінною z_0, тобто

$$F_{mk}(z) = \mathrm{Res}_{z_0}[\bar{L}_{mk}(z_0,z), R(z_0,z)].$$

Лема 3. *Нехай виконуються нерівності* (9)*. Тоді для майже всіх векторів z із полікруга $\Pi(\rho)$ (стосовно міри Лебега в $\mathbb{C}^p$) нерівність*

$$|F_{mk}(z)| \geq (m^2+\widetilde{k}^2)^{-\delta} \tag{16}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $(k,m) \in \mathbb{Z}^{p+1}$ при $\delta > (d(p+1) - n\psi)/2$.

Доведення.

Результант многочленів $\bar{L}_{mk}(z_0,z)$ і $R(z_0,z)$ за змінною z_0 зображається формулою

$$F_{mk}(z) = [\tau(m)]^{nd}R(\tilde{z}_0,z) = [\tau(m)]^{nd}\sum_{j=0}^{d}A_j(z)\tilde{z}_0^{d-j}, \tag{17}$$

де $\tilde{z}_0 = \tilde{z}_0(z,k,m)$ — корінь рівняння $\bar{L}_{mk}(z_0,z) = 0$ за змінною z_0, а саме:

$$\tilde{z}_0 = -\frac{z_1(ik_1)^n + \ldots + z_p(ik_p)^n + L_1(m,k)}{[\tau(m)]^n}. \tag{18}$$

Із формул (17), (18) маємо

$$F_{mk}(z) = \sum_{j=0}^{d}(-1)^{d-j}[\tau(m)]^{nj}\Big(\sum_{|s|\leq j}\alpha_{j,s}z^s\Big)\times$$

$$\times\big(z_1(ik_1)^n + \ldots + z_p(ik_p)^n + L_1(m,k)\big)^{d-j}.$$

Для зручності подамо функцію $F_{mk}(z)$ у вигляді

$$F_{mk}(z) = \alpha_{mk_1}z_1^d + \ldots + \alpha_{mk_p}z_p^d + G_{mk}(z)$$

де $\alpha_{mk_r} = \sum\limits_{j=0}^{d}(-1)^{d-j}\alpha_{\theta(r,j)}[\tau(m)]^{nj}(ik_r)^{n(d-j)}$, а $G_{mk}(z)$ — многочлен, який не містить чистих старших членів.

Введемо множини

$$A_{mk} = \{z \in \Pi(\rho) : |F_{mk}(z)| < \varepsilon_{mk}\},$$

де $\varepsilon_{mk} = (1 + m^2 + ||k||)^{-\delta}$, $\delta \in \mathbb{R}$, A – множина точок $z \in \Pi(\rho)$, для яких безліч разів (стосовно вектора (m,k)) виконується нерівність

$$|F_{mk}(z)| < \varepsilon_{mk}.$$

Для оцінки міри множини A_{mk} за фіксованого вектора $(m,k) \in \mathbb{Z}^{p+1}$ застосуємо до функції $F_{mk}(z)$ лему 1. Тоді

$$\mathrm{meas}_{\mathbb{C}^p}A_{mk} \leq C_3\left(\frac{\varepsilon_{mk}}{|\alpha_{mk}|}\right)^{2/d},$$

$$|\alpha_{mk}| = |\alpha_{mk_1}| + \ldots + |\alpha_{mk_p}|.$$

З умов (9) випливають нерівності

$$|\alpha_{mk_r}| \geq \omega(|\tau(m)|^n + |k_r|^n)^{\psi},\ (m,k_r) \in \mathbb{Z}^2,\ r = 1,\ldots,p,$$

звідки за лемою 2 отримаємо нерівність (14) для норми вектора α_{mk}. Тому,

$$\mathrm{meas}_{\mathbb{C}^p}A_{mk} \leq C_3\times$$

$$\times\begin{cases}\dfrac{(m^2+\widetilde{k}^2)^{-(2\delta+n\psi)/d}}{C_4^{2/d}}, & (m,k)\neq 0,\quad \psi\neq 0,\\ (p\,\omega|\ln\mu|^{n\psi}T^{-n\psi})^{-2/d}, & (m,k)=0,\ \psi\neq 0,\ \mu\neq 1,\\ \dfrac{(m^2+\widetilde{k}^2)^{-2\delta/d}}{(p\,\omega)^{2/d}}, & (m,k)\in\mathbb{Z}^{p+1}, \psi = 0.\end{cases}$$

Оскільки ряд $\sum\limits_{(m,k)\in\mathbb{Z}^{p+1}\setminus\{0\}}\mathrm{meas}_{\mathbb{C}^p}A_{mk}$ є збіжним при $\delta > (d(p+1) - n\psi)/2$, то на підставі леми Бореля-Кантеллі маємо, що множина тих точок $z \in \Pi(\rho)$, які потрапляють у нескінченну кількість множин A_{mk}, де $(m,k) \in \mathbb{Z}^{p+1}\setminus\{0\}$, дорівнює нулеві, тобто $\mathrm{meas}_{\mathbb{C}^p}A = 0$. Отже, для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{C}^p$) векторів $z \in \Pi(\rho)$ нерівності (16) виконуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів $(m,k) \in \mathbb{Z}^{p+1}$. Лему доведено.

Лема 4. *Нехай виконуються умови* (9), (10) *і нехай $L(\xi_0,\xi)$ є цілою функцією скінченного порядку σ, $\sigma > 0$. Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{C}^p$) векторів z із полікруга $\Pi(\rho)$ нерівності*

$$\begin{aligned}\big|\bar{L}_{mk}(z_0^r(z),z)\big| \geq C_4^{1-d}(m^2+\widetilde{k}^2)^{-\delta}\times\\ \times\exp[(1-d)(|\tau(m)|+|k|)^{\sigma}],\quad r = 1,\ldots,d.\end{aligned} \tag{19}$$

виконується для всіх (крім можливо скінченної кількості) векторів $(k,m) \in \mathbb{Z}^{p+1}$ *при* $\delta > (d(p+1)-n\psi)/2$*, де* C_4 *— незалежна від вектора* (k,m) *додатна стала.*

Доведення. З умови $D_R \not\equiv 0$ та з теореми про неявну функцію випливає, що результант $F_{mk}(z)$ можна подати у вигляді добутку

$$F_{mk}(z) = \prod_{j=1}^{d} \bar{L}_{mk}(z_0^j(z), z),$$

де $z_0^j = z_0^j(z)$, $j = 1,\ldots,d$, є однозначними вітками функції $z_0(z)$ для майже всіх векторів z із $\Pi(\rho)$ (див. вище зауваження), звідки

$$\bar{L}_{mk}(z_0^r, z) = \frac{F_{mk}(z)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{d} \bar{L}_{mk}(z_0^j, z)}, \quad r = 1,\ldots,d. \qquad (20)$$

Як бачимо з останньої формули, для оцінки знизу значення виразу L на вибраній вітці z_0^r функції $z_0(z)$ крім оцінки знизу результанта $F_{mk}(z)$ потрібно також знати оцінку зверху L. Оскільки за нашим припущенням $L(\xi_0,\xi)$ є цілою функцією скінченного порядку σ, $\sigma > 0$, тобто для будь-яких $(\xi_0,\xi) \in \mathbb{C}^{p+1}$ виконуються нерівності

$$|L(\xi_0,\xi)| \le C_4 \exp\left(|\xi_0| + |\xi|\right)^{\sigma}, \quad C_4 > 0,$$

то

$$|\bar{L}_{mk}(z_0,z)| \equiv L(\tau(m), ik) \le C_4 \exp\left(|\tau(m)| + |k|\right)^{\sigma} \qquad (21)$$

для будь-яких $(z_0,z,m,k) \in \mathbb{C}^{p+1} \times \mathbb{Z}^{p+1}$.

Тоді з формули (20) та нерівностей (16), (21) випливає, що для майже всіх векторів z із полікруга $\Pi(\rho)$ нерівності (19) виконуються для всіх (крім можливо скінченної кількості) векторів $(k,m) \in \mathbb{Z}^{p+1}$ при $\delta > (d(p+1)-n\psi)/2$. Лему доведено.

Доведемо тепер теорему вкладення 6.

Доведення. Нехай $f(t,x) = \sum\limits_{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}} f_{k,m} e^{\tau(m)t + i(k,x)}$ довільна функція із $W^{\sigma}_{\delta,d-1}$. Покажемо, що для майже всіх векторів z із полікруга $\Pi(\rho)$ вона належить простору $W^{-\infty}\{a_{\hat{s}}\}$.

Нехай $\mathbb{Z}_0^{p+1}$ — підмножина множини $\mathbb{Z}^{p+1}$, яка містить скінченну кількість векторів (k,m).

Із рівності $\lambda_{k,m} = \left|\bar{L}_{mk}\big(z_0(z), z\big)\right|$ та нерівності (19) випливає оцінка

$$\|f\|^2_{-\infty} = \sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}} \lambda^{-1}_{k,m} |f_{k,m}|^2 \le C_5 \times$$

$$\times \sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}_0^{p+1}} (m^2 + \widetilde{k}^2)^{\delta} e^{(d-1)(|\tau(m)|+|k|)^{\sigma}} |f_{k,m}|^2 +$$

$$+ C_4^{d-1} \sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}\setminus\mathbb{Z}_0^{p+1}} (m^2 + \widetilde{k}^2)^{\delta} e^{(d-1)(|\tau(m)|+|k|)^{\sigma}} \times$$

$$\times |f_{k,m}|^2 \le C_2^2 \|f\|^2_{W^{\sigma}_{\delta,d-1}}$$

при $\delta > (d(p+1)-n\psi)/2$, де $C_5 = \max\limits_{(k,m)\in\mathbb{Z}_0^{p+1}} \{\lambda^{-1}_{k,m}(1 + m^2 + \|k\|^2)^{-\delta} e^{(1-d)(|\tau(m)|+|k|)^{\sigma}}\}$, $C_2^2 = \max\{C_5, C_4^{d-1}\}$.

Тепер нехай $u = \sum\limits_{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}} u_{km} e^{\tau(m)t + i(k,x)}$ належить простору $W^{\infty}\{a_{\hat{s}}\}$, тоді

$$\|u\|^2_{W^{\sigma}_{-\delta,1-d}} = \sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}} (m^2 + \widetilde{k}^2)^{-\delta} \times$$

$$\times e^{(1-d)(|\tau(m)|+|k|)^{\sigma}} |u_{k,m}|^2 \le$$

$$\le C_2^2 \sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}} \lambda_{k,m} |u_{k,m}|^2 \le C_2^2 \|u\|^2_{\infty}.$$

Теорему доведено.

III. Теореми існування та єдиності розв'язку задачі, умови на алгебричний многовид

Позначимо $\mathbf{P} = I - \mathbf{P}_0$, де I – одиничний оператор, $\mathbf{P}_0$ – оператор проектування, який елементові

$$v = \sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}^{p+1}} v_{k,m} e^{\tau(m)t + i(k,x)}$$

ставить у відповідність елемент

$$\mathbf{P}_0 v = \sum_{(k,m)\in\Omega_0} v_{k,m} e^{\tau(m)t + i(k,x)}.$$

Функцію $u \in W^{\infty}\{a_{\hat{s}}\}$ називатимемо розв'язком задачі (1), (2), якщо для всякої функції $v \in W^{\infty}\{a_{\hat{s}}\}$ виконується рівність

$$\left(L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\Big) u, v\right)_0 = (f,v)_0.$$

Теорема 7. [2] *Розв'язок* u *задачі* (1), (2) *із простору* $W^{\infty}\{a_{\hat{s}}\}$ *існує тоді і тільки тоді, коли* $\mathbf{P}_0 f = 0$ *і* $f \in W^{-\infty}\{a_{\hat{s}}\}$*:*

при цьому $\quad ||\mathbf{P}u||_{\infty} = ||f||_{-\infty}.$

Розв'язок буде єдиним тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{P}_0 = 0$.

Очевидно, що $\mathbf{P}_0 = 0$ тоді і тільки тоді, коли

$$\forall\ (k,m) \in \mathbb{Z}^{p+1} \qquad L(\tau(m), ik) \neq 0.$$

Із цієї теореми та теореми вкладення випливає твердження, яке стосується розв'язності задачі (1), (2) з алгебрично залежними коефіцієнтами $z_0, z_1, \ldots, z_p$ у випадку належності правої частини f до простору $W^{\sigma}_{\delta,d-1}$.

Теорема 8. *Нехай виконуються умови теореми вкладення* (теореми 6)*. Тоді, якщо* $f \in W^{\sigma}_{\delta,d-1}$*, де* $\delta > (d(p+1)-n\psi)/2$*, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{C}^p$*) векторів* z *із полікруга* $\Pi(\rho)$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *із простору* $W^{\sigma}_{-\delta,1-d}$.

Доведення. Якщо $f \in W^{\sigma}_{\delta,d-1}$, то за теоремою 6 отримуємо $f \in W^{-\infty}\{a_{\hat{s}}\}$. На основі теореми 7 існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) із простору $W^{\infty}\{a_{\hat{s}}\}$, який за теоремою 6 належить простору $W^{\sigma}_{-\delta,1-d}$, що і треба було довести.

Теорема 9. *Нехай* $a_{\hat{s}} = 0$ *при* $|\hat{s}| > n$, *тобто рівняння (1) має скінченний порядок* n, *і нехай виконуються умови* (9), (10). *Якщо* $f \in W^q(\bar{\mathcal{D}}^p)$ *при* $q > \dfrac{d(p+1)+n(d-\psi-1)}{2}$, *то для майже всіх векторів* z *із полікруга* $\Pi(\rho)$ *(стосовно міри Лебега в* $\mathbb{C}^p$*) існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *із простору* $W^{-q}(\bar{\mathcal{D}}^p)$.

Доведення. Оскільки рівняння (1) має скінченний порядок n, то для будь-якого вектора $(z_0, z, m, k) \in \mathbb{C}^{p+1} \times \mathbb{Z}^{p+1}$ виконуються нерівності

$$|\bar{L}_{mk}(z_0,z)| \equiv L(\tau(m), ik) \le C_5(m^2 + \widetilde{k}^2)^{n/2}, \quad (22)$$

де $C_5 > 0$, звідки з формули (20) та нерівностей (16) випливає, що для майже всіх векторів z із полікруга $\Pi(\rho)$ виконуються нерівності $(r = 1, \ldots, d)$

$$\left|\bar{L}_{mk}\big(z_0^r(z), z\big)\right| \ge C_5^{1-d}(m^2 + \widetilde{k}^2)^{-(\delta+n(d-1)/2)}, \quad (23)$$

і включення

$$W^{\infty}\{a_{\hat{s}}\} \subset W^{-q}(\bar{\mathcal{D}}^p), \quad W^q(\bar{\mathcal{D}}^p) \subset W^{-\infty}\{a_{\hat{s}}\}$$

для всіх (крім можливо скінченної кількості) векторів $(k,m) \in \mathbb{Z}^{p+1}$ при

$$\delta > \frac{d(p+1) - n\psi}{2}, \quad q > \frac{d(p+1)+n(d-\psi-1)}{2}.$$

Із цих включень і теореми 7 випливає твердження теореми.

Висновки

У порівнянні з розглянутим у [2, 9] випадком незалежності коефіцієнтів $z_0,\ z_1, \ldots, z_p$ рівняння (1), для якого встановлено співвідношення між просторами Соболєва скінченного і нескінченного порядків для майже всіх (стосовно індукованої міри Лебега в $\mathbb{C}^{p+1}$) векторів $(z_0, z_1, \ldots, z_p)$, а саме $W^{\infty}\{a_{\hat{s}}\} \subset W^q(\bar{\mathcal{D}}^p)$, $W^{-q}(\bar{\mathcal{D}}^p) \subset W^{-\infty}\{a_{\hat{s}}\}$ при $q < (2n-p-1)/4$, випадок алгебричної залежності $R(z_0, z) = 0$ цих коефіцієнтів вимагає запровадження замість просторів скінченного порядків $W^q(\bar{\mathcal{D}}^p)$ просторів $W^{\sigma}_{\beta_1,\beta_2}$ – просторів нескінченного порядку.

У цьому більш тонкому випадку показано вкладення просторів

$$W^{\infty}\{a_{\hat{s}}\} \subset W^{\sigma}_{-\delta,1-d}, \qquad W^{\sigma}_{\delta,d-1} \subset W^{-\infty}\{a_{\hat{s}}\},$$

та розв'язність задачі (1), (2) у просторі $W^{\sigma}_{-\delta,1-d}$ при $f \in W^{\sigma}_{\delta,d-1}$ для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{C}^p$) векторів $z = (z_1, \ldots, z_p)$ із полікруга $\Pi(\rho)$ при $\delta > (d(p+1) - n\psi)/2$, якщо $L(z_0, z)$ є цілою функцією скінченного порядку σ, $D_R(z) \not\equiv 0$ та виконуються умови (9) на коефіцієнти многочлена $R(z_0, z)$.

Отже, показники простору $W^{\sigma}_{-\delta,1-d}$, до якого належить розв'язок u задачі (1), (2), залежать від порядку σ, цілої функції $L(z_0, z)$ та степеня d многочлена $R(z_0, z)$.

При $d = 1$ обмеження на скінченний порядкок σ цілої функції $L(z_0, z)$ можна зняти. В цьому випадку маємо рівність $W^{\delta}(\bar{\mathcal{D}}^p) = W^{\sigma}_{\delta,0}$.

Література

[1] Ильків В.С. Нелокальная краевая задача для дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – В 5. – С. 15–19.

[2] Ильків В.С. Нелокальная краевая задача для уравнений в частных производных бесконечного порядка // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, В 4. – С. 498–502.

[3] Дубинский Ю.А. Пространства Соболева бесконечного порядка на торе и некоторые вопросы теории периодических решений дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. – 1975. – **222**, В 2. – С. 269–272.

[4] Дубинский Ю.А. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения // Итоги науки и техники (ВИНИТИ). Сер. Современ. проблемы математики. – М., 1976. – Т. 9. – С. 5–130.

[5] Дубинский Ю.А. Об одном методе решения дифференциальных уравнений с частными производными // Докл. АН СССР. – 1981. – **258**, В 4.

[6] Ільків В. С. Нелокальна задача для систем рівнянь із частинними похідними у просторах Соболєва нескінченного порядку // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 4. – С. 115–119.

[7] Ильків В. С. Нелокальная краевая задача для систем дифференциальных уравнений в частных производных бесконечного порядка // Дифференц. уравн. – 2005. – **41**, № 2. – С. 250–257.

[8] Ганнинг Р., Росси Х. Аналитические функции многих комплексных переменных. – М.: Мир, 1969. – 390 с.

[9] Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. — К.: Наук. думка, 2002. — 216 с.

[10] Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Начало теории. – М.: Наука, 1967. – Т.1. – 486 с.

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ

С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА С АЛГЕБРАИЧЕСКИ ЗАВИСИМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Ю.А. Дубинский[a], В.С. Илькив[b,c], И.Я. Савка[c], М.М. Сымотюк[c]

[a] *Московский энергетический институт (Технический университет) ул. Красноказарменная 14, 111250, Москва, Россия*
[b] *Национальный университет "Львивська политехника", ул. С. Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина*
[c] *Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН Украины, ул. Научная, 3-б, Львов, 79060, Украина*

Исследовано нелокальную краевую задачу для уравнений с частными производными бесконечного порядка с алгебраически зависимыми коэффициентами. Изучено разрешимость этой задачи и установлено метрическую теорему о вложении пространств Соболева бесконечного порядка и пространств экспоненциального типа.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, нелокальные условия, функциональные пространтства бесконечного порядка, малые знаменатели, диофантовые приближения, зависимые коэффициенты, алгебраический многовид, метрические оценки.

2000 MSC: 35G15

УДК: 517.95

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR INFINITE ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH ALGEBRAIC DEPENDENT COEFFICIENTS

Ju.A. Dubinskii[a], V.S. Il'kiv[b], I.Ya. Savka[c], M.M. Symotyuk[c]

[a] *Moscow Power Engineering Institute (Technical University) Krasnokazarmennaya Str., 14, Moscow, 111250, Russia*
[b] *National University "Lvivska Politechnika" 12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine*
[c] *Pidstryhach Institute for Applied Problems in Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine 3b Naukova Str., Lviv 79000, Ukraine*

The paper is devoted to investigation of non-local boundary problem for partial differential equations of infinite order with algebraic dependent coefficients. Solvability of this problem is studied. Metric theorem on embedding spaces Sobolev of infinite order and spaces of exponential type is established.

Keywords: differential equations, nonlocal conditions, functional spaces of infinite order, small denominators, diophantine approximation, dependent coefficients, algebraic manifold, metric estimations.

2000 MSC: 35G15

УДК: 517.95