Проаналізувавши графіки на рис. 6, можна побачити, що коефіцієнти нерівномірності руху, динамічності та узагальнений коефіцієнт оцінки руху, мінімальне значення мають за значення кута зміщення кривошипів $\Delta\varphi = 90^0$.

Отже, в результаті проведених досліджень встановлено, що оптимальне значення кута зміщення кривошипів роликової формувальної установки з рекупераційним приводом становить $\Delta\varphi = 90^0$.

1. Гарнець В.М. Прогресивні бетоноформувальні агрегати і комплекси. – К.: Будівельник, 1991. – 144 с. 2. Кузин В.Н. Технология роликового формования плоских изделий из мелкозернистых бетонов: Автореф. ... дис. канд. наук. – М, 1981. – 20 с. 3. Рюшин В.Т. Исследование рабочего процесса и разработка методики расчета машин роликового формования бетонных смесей: Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. – К., 1986. 4. Патент України № 67091А. Установка для формування виробів з бетонних сумішей / В.С. Ловейкін, В.М. Гарнець, К.І. Почка. – Заяв. 08.07.2003, № 2003076371. 5. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин. – М.: Наука. – 1975. – 640 с. 6. Электротехнический справочник. – Т. 2: Электротехнические изделия и устройства / Под ред. И.Н. Орлова. – 7-е изд., испр. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 712 с. 7. Шейнблит А.Е. Курсовое проектирование деталей машин: Учеб. пособие для техникумов. – М.: Высш. шк., 1991. – 432 с. 8. Ловейкин В.С. Оценка движения механизмов и машин // Подъемно-транспортное оборудование. – К.: Техника. – 1989. – С. 16–18.

УДК 530.18; 621.873

В.С. ЛОВЕЙКІН, Ю.В. ЧОВНЮК

Київський національний університет будівництва і архітектури

СПЕЦІАЛЬНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ ВАНТАЖОПІДЙОМНИХ КРАНІВ: НЕЛІНІЙНИЙ РЕЗОНАНС ТА ЙОГО СТОХАСТИЧНИЙ ПРОШАРОК

Запропоновано спеціальні методи аналізу нелінійної динаміки вантажопідйомних кранів, які досліджують нелінійний резонанс та його стохастичний прошарок.

The special methods for the analysis of the nonlinear dynamics of loading cranes are proposed. One may research with the help of such methods the nonlinear resonance and its stochastic layer.

Постановка проблеми. Під час роботи кранів спостерігаються маятникові коливання вантажу [1], які викликають нерівномірний рух кранів чи вантажних візків, додаткові навантаження на силові елементи кранів, створюють незручності під час їх експлуатації, що необхідно враховувати за уточнених розрахунків кранів (зокрема, їх динамічних навантажень під час пуску та гальмування).

У мостових, козлових та деяких інших кранів стандартних параметрів, які переміщаються вздовж рейкового шляху, частота маятникових коливань вантажу щодо крана істотно нижча від частоти пружних коливань кранової металоконструкції та трансмісії механізму пересування. Навіть за малої довжини виска канатів (не більше 3 м) частота маятникових коливань вантажу не перевищує 2...2,6 рад/с, у той самий час частота пружних коливань кранів у декілька разів, а то й у десятки разів вища.

Отже, маятникові коливання вантажу можна вважати практично не залежними від пружних коливань крана і під час їх розрахунку металоконструкцію та трансмісію механізму пересування можна приймати абсолютно жорсткими. Під час визначення динамічних навантажень, що діють на металоконструкцію і трансмісію механізму пересування, закон зміни горизонтальної складової натягу канатів, що виникає у результаті маятникових коливань вантажу, можна задавати у вигляді відомої функції часу, яка визначається за схемою абсолютно жорсткого крана. Цей прийом дає змогу знизити порядок рівнянь руху кранової динамічної системи на дві одиниці.

Автор [1], відповідно до вищевикладеного, провів розрахунок маятникових коливань вантажу на канатах за простою (лінійною) схемою двомасової системи, оскільки максимальні відхилення канатів від вертикалі не перевищують $10...12^0$. Однак у режимах пуску та гальмування кранів результуюча сила, яка є векторною сумою тягового (чи гальмівного) зусилля привідних коліс крана (чи візка) і сили опору пересуванню крана (чи візка), може мати регулярну горизонтальну/вертикальну вібраційну складову, що викликана різноманітними нерівностями поверхні контакту реборд (коліс) візка та рейкового шляху. Навіть за малої амплітуди коливань таких сил у системі „вантажний візок крана–канат–вантаж" можуть виникати нелінійні коливання, які, своєю чергою, призводять до т. з. „динамічного хаосу" [2, 3]. Крім того, точна математична модель руху подібної системи передбачає наявність нелінійного диференціального рівняння маятникових коливань вантажу стосовно кута відхилення (φ) останнього від вертикалі. Наявність нелінійностей (у даному випадку геометричних) тим паче призводить до генерації хаотичних коливань у цій системі. Фізичні явища, процеси, які супроводжують нелінійну динаміку вантажопідйомних кранів, раніше не враховувались.

Аналіз останніх досліджень. Динамічна система „вантажний візок крана – канат – вантаж", у якій в процесі пуску/гальмування крана виникають маятникові коливання вантажу внаслідок розгойдування останнього, може бути віднесена до гамільтонівських систем (тобто таких систем, які можуть бути описані гамільтонівськими рівняннями руху [2, 3]). Динамічний хаос у подібних системах виникає внаслідок специфічної локальної нестійкості щодо як завгодно малих збурень орбіт системи. Він проявляє себе у певних областях фазового простору, а також за певних значень параметрів самої системи. Однак – найбільш визначною властивістю хаосу є його незнищуваність у типових фізичних ситуаціях. Йдеться про таке. За досить загальних умов завжди існують області у фазовому просторі і у просторі значень параметрів, в яких динаміка системи стохастична. Ці області можуть бути як завгодно малі, однак вони не знищувані за будь-яких скінченних значень параметрів і фіксованої конструкції динамічної системи (тобто у вигляді її гамільтоніана).

Перехід від систем, у яких взагалі відсутня хаотична динаміка, до систем з хаосом супроводжується появою малих областей – породжень хаосу. У гамільтонівських системах такими породженнями є стохастичні прошарки і „стохастичне павутиння". Вони саме й реалізують слабкий хаос у системах і одночасно створюють деяке розбиття фазового простору. Внаслідок цього топологічні властивості фазового простору виявляються тісно переплетеними з умовами і формою самих областей – породжень хаосу. Результат про існування незнищуваних стохастичних прошарків є універсальним. У подальшому стало зрозуміло, що система стохастичних прошарків може об'єднуватись у деяку зв'язану мережу, утворюючи „стохастичне павутиння". Пронизуючи увесь фазовий простір, „стохастичне павутиння" відіграє визначальну роль у проблемі глобальної стійкості. Тому немає нічого дивного у тому, що коло застосувань цих питань виявилось дуже широким.

Під назвою „спеціальні методи" у цій роботі приховуються не тільки окремі методи аналізу нелінійної динаміки вантажопідйомних кранів, а порівняно новітні й поки що сучасні методи [2, 3]. Крім того, поняття їх новизни відображає не обов'язково час їх виникнення, а скоріше час, коли їх застосування стає звичайним засобом розв'язання широкого кола задач. Звичайно, усі ці поняття відносні. Досить, наприклад, згадати формули векторного аналізу, які ще у книгах 30-х років минулого століття мали надзвичайно складну форму подання порівняно з більш пізнім компактним записом. А використання диференціальних форм дає змогу піти набагато далі, хоча вони ще не настільки широко використовуються у фізичній літературі. В усякому випадку, називаючи деякі методи, які розглянуті у цій роботі, спеціальними, ми хотіли б тим самим дати їм певну оцінку.

Для науковців це повинно бути вказівкою на те, що їх роль зараз є ведучою. Різні принципові питання можуть бути зрозумілими зараз саме завдяки методам, викладеним нижче.

Варто зазначити, що велика кількість задач (нелінійної) динаміки вантажопідйомних кранів може бути класифікована як задачі про збурення. Це означає, що за відсутності збурення є повна інформація про систему, і потрібно зрозуміти, що відбувається за дії збурення. Однак навіть за подібних спрощень ми стикаємось з настільки складними проблемами, що досить часто не вдається навіть оцінити ступінь їх важкості. Крім того, сама процедура зведення реальних фізичних задач, задач вібраційної механіки до задач про вплив збурень, є певною поступкою складним проблемам динаміки.

Дуже рідко зустрічаються ситуації, в яких можна одразу встановити факт інтегрованості системи. Значно частіше можна задовольнитись такою постановкою задачі, в якій є мале збурення інтегрованої системи. Існує велика кількість різноманітних методів й прийомів аналізу впливу збурення. Усі вони в той чи інший спосіб пов’язані з розв’язком задачі про стійкість системи. І тут потрібно взяти до уваги у найвищому ступені умовний характер як постановки задачі про стійкість, так і самого поняття стійкості. Те чи інше питання, яке виникає щодо властивостей системи, диктує одночасно не тільки метод, за допомогою якого можна знайти на нього відповідь, але й своє визначення стійкості. Малі збурення системи можуть призводити, наприклад, до малих змін параметрів системи протягом обмеженого чи необмеженого часу. В останньому випадку топологія фазового портрету може не змінюватись, але може й змінюватись істотно.

Сьогодні дослідження стійкості динамічних систем (і, зокрема тих, що розглянуті у цій роботі) набуло і нових методів, і нових явищ. Це пов’язано із відкриттям нового явища – динамічного хаосу, чи, просто, хаосу. Воно полягає у тому, що траєкторії системи можуть уявляти собою реалізацію випадкових у часі процесів, хоча ніяких випадкових джерел у рівняннях моделі задачі немає. Властивість хаосу автоматично означає неінтегрованість системи. Вона притаманна лише нелінійним системам.

Просте викладення різних питань стійкості та хаосу, їх застосування до різноманітних фізичних задач є у [2]. Спеціальні проблеми теорії хаосу (динамічної стохастичності) можна знайти у [4, 5]. Чіткий аналіз та точні теореми про нелінійний резонанс є у книзі Арнольда В.І. [6].

Мета роботи полягає у встановленні основних властивостей нелінійних резонансів, які притаманні задачам нелінійної динаміки вантажопідйомних кранів, за допомогою методів, розвинених у [2–6].

Виклад основного матеріалу. Нелінійний резонанс розглядатимемо у найпростішому випадку, коли під дією збурення у динамічній системі з одним ступенем вільності руху можливий нелінійний резонанс.

Рівняння резонансу. Незбурений рух динамічної системи (наприклад, „вантажний візок (мостового) крана – канат – вантаж”) описуватимемо гамільтоніаном $H_0(I)$, де I – дія [7], а збурений рух – гамільтоніаном:

$$H = H_0(I) + \varepsilon \cdot V(I, \theta, t), \tag{1}$$

де ε – безрозмірний малий параметр ($\varepsilon << 1$), θ – кут [7]; V – збурення, яке є періодичним за часом t з періодом $T = 2\pi / \nu$, ν – (лінійна) частота. Тому V можна розкласти у подвійний ряд Фур’є:

$$V(I,\theta,t)=1/2\sum_{k,l}V_{kl}(I)\cdot\exp[i\cdot(k\theta-l\nu t)]+к.с.,\quad V_{kl}=V_{-k,-l}{}^{*}. \tag{2}$$

Рівняння руху, що випливають з (1), (2), набирають такого вигляду:

$$\dot{I}=-\varepsilon\cdot\frac{\partial V}{\partial\theta}=-\frac{i}{2}\cdot\varepsilon\sum_{k,l}kV_{kl}(I)\cdot\exp[i\cdot(k\theta-l\nu t)]+к.с.;$$

$$\dot{\theta}=\frac{\partial H}{\partial I}=\frac{dH_0}{dI}+\varepsilon\cdot\frac{\partial V}{\partial I}=\omega(I)+1/2\cdot\varepsilon\cdot\sum_{k,l}\frac{dV_{kl}(I)}{dI}\cdot\exp[i\cdot(k\theta-l\nu t)]+к.с. \tag{3}$$

Відомо [2], що у рівняннях (3) можливий резонанс, якщо умова

$$k\omega-l\nu\approx 0 \tag{4}$$

може бути виконана за будь-яких цілих значень k та l.

Основна ідея дослідження резонансу дуже проста. „Небезпечний” резонансний член виділяють окремо від розкладу (2) і досліджують динаміку, обумовлену тільки цим членом збурення. Потім можна спробувати оцінити вплив відкинутих членів та, якщо це вдається, отримати умову, за якої подібний аналіз справедливий.

Нехай умова резонансу (4) виконується точно для деякої трійки чисел (k_0, l_0, I_0), тобто

$$k_0\cdot\omega(I_0)=l_0\cdot\nu. \tag{5}$$

Таких трійок може бути декілька, однак ми зафіксуємо лише одну певну й обговоримо у подальшому, що робити з іншими. Залишаємо у системі (3) тільки резонансну гармоніку у правій частині. Це дає

$$\dot{I}=\varepsilon V_0k_0\cdot\sin(k_0\theta-l_0\nu t+\varphi);$$

$$\dot{\theta}=\omega(I)+\varepsilon\cdot\frac{dV_0}{dI}\cdot\cos(k_0\theta-l_0\nu t+\varphi), \tag{6}$$

де позначено: $V_{k_0,l_0}=\left|V_{k_0,l_0}\right|\cdot e^{i\varphi}=V_0\cdot e^{i\varphi}$. Зручно також увести нову фазу

$$\psi=k_0\theta-l_0\nu t+\varphi \tag{7}$$

і переписати систему (6) у вигляді

$$\dot{I}=\varepsilon k_0V_0(I)\sin\psi,$$

$$\dot{\psi}=k_0\omega(I)-l_0\nu+\varepsilon\cdot\frac{dV_0(I)}{dI}\cdot\cos\psi. \tag{8}$$

Якщо у гамільтоніані (1) і у розкладі (2) також залишити тільки резонансний член, то це дало б

$$H=H_0(I)+\varepsilon V_0(I)\cdot\cos\psi. \tag{9}$$

Незважаючи на доволі істотне спрощення, ні систему (8), ні рівняння, породжені гамільтоніаном (9), розв’язати ще не дуже просто. Тут, однак, слід згадати, що параметр ε малий, і тому відхилення дії I від її резонансного значення I_0 можна вважати малим.

Якісна картина динаміки в околі резонансу може бути подана в такий спосіб. Нехай I дуже близьке до значення I_0. Тоді внаслідок резонансу дія нарощується. Завдяки нелінійності частота ω залежить від I, тому зміна дії призводить одночасно до зміни частоти ω, а це означає, що резонансна умова (5) була розстроєна. Отже, зміни дії слід чекати в обмеженій кількості завдяки нелінійності системи. Внаслідок гамільтонівності у системі не може бути множин, що притягують, і тому в околі резонансного значення I_0 повинні відбуватись осциляції з малою амплітудою за малих ε. Подивимось тепер, як ці попередні міркування реалізуються.

Вважаючи малими відхилення $\Delta I=I-I_0$, розкладемо $H_0(I)$ у ряд по ΔI до другого порядку включно, $\omega(I)-$ до членів першого порядку, а величину V_0 візьмемо у точці I_0. Знехтуємо також членом $\sim\varepsilon$ у рівнянні (9) для $\dot{\psi}$. Це приведе до системи:

$$\frac{d}{dt}\Delta I = \varepsilon k_0 V_0 \sin\psi, \quad V_0 = V_0(I_0);$$

$$\frac{d\psi}{dt} = k_0 \omega' \Delta I, \quad \omega' \equiv \frac{d\omega(I_0)}{dI}. \tag{10}$$

Ті самі процедури перетворюють вираз (9) у такий:

$$H = H_0(I_0) + \omega(I_0)\cdot(I - I_0) + 1/2\omega'\cdot(I - I_0)^2 + \varepsilon \cdot V_0 \cdot \cos\psi. \tag{11}$$

Не важко побачити, що система (10) породжується гамільтоніаном:

$$\overline{H} = 1/2k_0\omega'\cdot(\Delta I)^2 + \varepsilon k_0 V_0 \cos\psi, \tag{12}$$

у якому канонічними змінними є пара $(\Delta I, \psi)$: $\frac{d(\Delta I)}{dt} = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial \psi}$, $\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial(\Delta I)}$. Перехід від H у формі (11) до $\overline{H}$ здійснюється за допомогою канонічного перетворення

$$(I, \theta) \to (\Delta I, k_0\theta - l_0 \nu t), \quad \nu = \omega(I_0), \quad \overline{H} = k_0 H - l_0 \nu \Delta I \tag{13}$$

з точністю до несуттєвої константи $k_0 H_0(I_0)$. Воно називається переходом у систему координат, що обертається (з частотою $l_0 \nu$).

Гамільтоніан (12) називають [2] універсальним гамільтоніаном нелінійного резонансу.

Властивості нелінійного резонансу. Одразу ж кидається у вічі повна подібність виразу для $\overline{H}$ з гамільтоніаном нелінійного маятника [2]. Роль імпульсу грає величина ΔI, а ефективна маса дорівнює: $m^* = 1/(k_0\omega') = 1/(k_0 \frac{\omega_0}{I_0}\alpha)$, $\omega_0 \equiv \omega(I_0)$, й тим менша, чим більший параметр нелінійності:

$$\alpha = \frac{I_0}{\omega_0}\cdot\frac{d\omega(I_0)}{dI}. \tag{14}$$

Аналогія з нелінійним маятником ще більш очевидна, якщо продиференціювати друге рівняння системи (10) по t і використати перше рівняння (10):

$$\ddot{\tilde{\psi}} + \Omega_0{}^2 \cdot \sin\tilde{\psi} = 0, \tag{15}$$

де здійснений зсув фази на π: $\tilde{\psi} = \psi + \pi$ і введена частота фазових коливань:

$$\Omega_0 = (\varepsilon V_0 |\omega'|)^{1/2}. \tag{16}$$

Рівняння (15) збігається з рівнянням коливань нелінійного маятника. Тому далі можна використати усі формули для нелінійного маятника [2], лише заміняючи в них ω_0 на Ω_0. У [2] також подано динамічну картину в околі резонансу на фазовій площині (для гамільтоніана $\overline{H}$, змінних (I, θ) у системі координат, що обертається з частотою ν за $k_0 = 1$, $l_0 = 1$ – т. з. резонанс першого порядку).

Головною особливістю фазових коливань є народження з циклу (незбуреної траєкторії за $I = I_0$) пари особливих точок – еліптичної та гіперболічної. Навколо першої відбуваються локальні осциляції фази, що характеризуються „бананоподібними" кривими. Через гіперболічну точку проходить сепаратриса, за якою слідують знову інваріантні цикли.

Ширину сепаратриси (максимальну відстань між двома вусами сепаратриси) можна прийняти як ширину нелінійного резонансу. Маємо з (12) і (16) для ширини резонансу за дією

$$\max \Delta I = (\varepsilon V_0 / |\omega'|)^{1/2} \tag{17}$$

чи за частотою:

$$\max \Delta\omega = |\omega'| \cdot \max \Delta I = \Omega_0. \tag{18}$$

Оцінимо ці величини. Ми вважаємо малими величинами параметр збурення $\varepsilon << 1$ і параметр нелінійності $\alpha << 1$. Крім того

$$V_0 \sim H_0 \sim I_0 \omega_0. \qquad (19)$$

Звідси й з (14), (17) і (18) матимемо

$$\frac{\max \Delta I}{I_0} \sim \left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^{1/2}, \quad \frac{\max \Delta \omega}{\omega_0} = \frac{\Omega_0}{\omega_0} \sim (\varepsilon\alpha)^{1/2}. \qquad (20)$$

Оцінки порядків збурень дії та частоти (20) дають змогу тепер знайти умови справедливості зроблених припущень.

Умова відкидання збурення у рівнянні (8) для $\dot{\psi}$ має вигляд: $\varepsilon \cdot \dfrac{V_0}{I_0} << |\omega'| \cdot \Delta I$ або згідно (19) та (20):

$$\varepsilon << \alpha. \qquad (21)$$

Умова заміни $V(I)$ на $V(I_0)$ еквівалентна умові $\max \Delta I << I_0$, тобто тій самій нерівності (21). Відкидання нерезонансного члена порівняно з резонансним можливе за $\max \Delta\omega << \omega_0$, тобто за нерівності

$$\varepsilon \cdot \alpha << 1, \qquad (22)$$

яка автоматично є справедливою за малих значень ε та α.

Нерівності (21) та (22) можна записати у вигляді

$$\varepsilon << \alpha << 1/\varepsilon, \qquad (23)$$

який інколи називається умовою помірної нелінійності [2]. Характерною особливістю нелінійного резонансу є ліва нерівність у (23). Вона показує, що нелінійність повинна бути доволі значною. В усякому випадку вона повинна бути більша за збурення ($\alpha > \varepsilon$), і граничного переходу до лінійного випадку ($\alpha \to 0$) не існує.

Ще одна важлива особливість нелінійного резонансу пов'язана з оцінками (20). Вони показують, що відносні зміни величин ΔI та $\Delta\omega$ пропорційні до $\varepsilon^{1/2}$, а не до ε, як це було б у звичайній теорії збурень. Оскільки $\varepsilon << 1$, то $\varepsilon^{1/2} >> \varepsilon$, тобто зміни ΔI та $\Delta\omega$ дуже істотні (великі). По суті теорія збурень за нелінійного резонансу будується за параметром $\varepsilon^{1/2}$.

Отже, можна виділити такі три особливості описаного аналізу нелінійного резонансу:

1) теорія збурень є особливою, призводить до знаходження сепаратриси з k_0 парами еліптичних та гіперболічних точок;

2) нелінійність повинна бути більшою від деякої критичної ($\alpha > \varepsilon$) і граничного переходу до лінійної задачі немає;

3) теорія збурення будується за параметром $\varepsilon^{1/2} >> \varepsilon$.

Утворення стохастичного прошарку. Розглянемо далі питання, які відіграють велику роль у загальній теорії стохастичності гамільтонівських систем. Для цього введемо поняття про „квант стохастичності" [2], тобто про ту мінімальну комірку фазового простору, яка несе у собі інформацію про зародження стохастичності. Таким квантом є стохастичний прошарок, який утворюється в околі сепаратриси під дією довільного періодичного, як завгодно малого нетривіального збурення.

Той факт, що збурення сепаратриси призводить до дуже складної картини її руйнування, був встановлений ще Пуанкаре. Перша оцінка ширини області руйнування належить Мельникову [8]. В [9] було вперше показано, що руйнування сепаратриси має стохастичний характер. У цій же роботі було показано, що існує локальна нестійкість всередині стохастичного прошарку, у якому рух часточки має дифузійний характер, і що для оцінки ширини прошарку може бути використаний критерій стохастичності. Ця обставина (яка, зазвичай, залишається незрозумілою) була використана в [10] для обчислення ширини стохастичного прошарку у різних фізичних ситуаціях.

Динаміка поблизу сепаратриси. Наведені нижче міркування мають необхідний ступінь узагальнення і уможливлюють розглянути практично будь-який приклад утворення стохастичного прошарку. Розглянемо приклад нелінійного маятника, що збурюється періодичною силою (модель нелінійних маятникових коливань у системі „вантажний візок – канат – вантаж (мостового) крана):

$$H = H_0(I) + \varepsilon V(I,\theta)\cdot\cos\nu t,$$
$$H_0 = 1/2\dot{x}^2 - \omega_0{}^2\cdot\cos x, \tag{24}$$

де H_0 – питомий гамільтоніан системи (у розрахунку на одиницю маси системи), а x – кут відхилення вантажу на канаті від вертикального положення. Слід зазначити, що вказаний питомий гамільтоніан нормований також на постійний множник (L^2), де L є характерним розміром системи (довжина каната), а $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{(m_1+m_2)g}{m_1 L}}$ є частотою власних маятникових коливань вантажу стосовно крана у період розгону [1]; m_1 – маса крана чи вантажного візка; m_2 – маса вантажу; g – прискорення вільного падіння.

Формули залежностей $H_0 = H_0(I)$ та $V(x) = V(I,\theta)$ можна отримати заміною змінних $(\dot{x},x)\to(I,\theta)$ [2].

Запишемо точне рівняння для зміни дії:

$$\dot{I} = \frac{dI}{dH_0}\cdot\dot{H}_0 = -\frac{\varepsilon}{\omega(I)}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\dot{x}\cdot\cos\nu t, \tag{25}$$

де використані визначення $\omega(I) = \dfrac{dH_0(I)}{dI}$ і та обставина, що потужність $\dot{H}_0$ дорівнює добуткові сили $\varepsilon\cdot\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)$ і швидкості $\dot{x}$.

Рівняння для фази θ має такий вигляд:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial I} = \omega(I) + \varepsilon\cdot\frac{\partial V}{\partial I}\cdot\cos\nu t. \tag{26}$$

Енергія незбуреного маятника, яка відповідає сепаратрисі, дорівнює [2]: $H_c = \omega_0{}^2$. Значення дії на сепаратрисі позначимо через I_c. Частота $\omega(I)$ має такі властивості:

$$\lim_{I\to 0}\omega(I) = \omega_0;\ \lim_{I\to I_c}\omega(I) = 0. \tag{27}$$

У подальшому нас цікавитиме область поблизу сепаратриси, де виконується умова

$$\frac{\omega(I)}{\omega_0} = \frac{1}{N} << 1, \tag{28}$$

а величина N має зміст характерного числа гармонік у спектрі незбуреної траєкторії маятника [2].

Ширина стохастичного прошарку. Фазу зовнішньої сили позначимо так:

$$\dot{\varphi} = \nu. \tag{29}$$

Тоді поблизу сепаратриси для $\bar{\varphi},\bar{I}$ можна отримати [2]

$$\bar{\varphi} = \varphi + \frac{\pi\nu}{\omega(\bar{I})};\ \ \bar{I} = I + \frac{\varepsilon}{\omega(I)}\cdot C(I,\varphi), \tag{30}$$

де через C позначено інтеграл:

$$C(I,\varphi) = -\int_{\Delta t} dt \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} \cos\varphi(t), \tag{31}$$

де Δt – тривалість імпульсу сили (між двома імпульсами сили з експоненційною точністю $\dot{x} = 0$).

Варто зазначити, що локальна нестійкість розвивається найскоріше по фазі. У цьому випадку це виглядає так. Мала зміна дії внаслідок збурення призводить до малої зміни частоти коливань (у потенційній ямі). Поблизу дна ями, де періоди коливань доволі малі, малі поправки до частоти призводять до малих змін фази часточки за період. Однак поблизу сепаратриси, де періоди осциляцій у ямі дуже великі, навіть мала зміна частоти може призвести до значної зміни фази. Це й повинно слугувати кінцевою причиною локальної нестійкості за фазою.

Для її оцінки достатньо знайти величину

$$K = \left| \frac{\delta \overline{\varphi}}{\delta \varphi} - 1 \right|. \tag{32}$$

Розглянемо декілька випадків щодо її оцінки:

1. Нехай $\nu / \omega_0 \le 1.$ Тоді матимемо

$$K \sim \varepsilon \cdot \frac{\nu}{\omega_0} \cdot \frac{H_c}{|H - H_c|}. \tag{33}$$

Умова появи стохастичності означає $K \ge 1.$ Тому границя стохастичності знаходиться з оцінки

$$K \sim \varepsilon \cdot \frac{\nu}{\omega_0} \cdot \frac{H_c}{|H - H_c|} \sim 1. \tag{34}$$

Область стохастичності в енергетичній шкалі дорівнює

$$\frac{|H_c - H|}{H_c} \le \varepsilon \cdot \frac{\nu}{\omega_0}. \tag{35}$$

Вираз (35) є шуканим (для не дуже високих частот збурення ν). Його головний зміст полягає у такому твердженні: поблизу сепаратриси існує прошарок хаотичної динаміки за будь-яких скільки завгодно малих збурень. Ширина прошарку пропорційна до збурення.

2. Нехай $\nu / \omega_0 >> 1.$ Тоді матимемо

$$K \sim \varepsilon \cdot \frac{\nu}{\omega_0} \cdot \frac{H_c}{|H - H_c|} \cdot \exp\left(-\pi \cdot \frac{\nu}{2\omega_0} \right). \tag{36}$$

Область стохастичності за енергією знаходиться з умови $K \ge 1,$ тобто

$$\frac{|H_c - H|}{H_c} \le \varepsilon \cdot \frac{\nu}{\omega_0} \cdot \exp\left(-\pi \cdot \frac{\nu}{2\omega_0} \right). \tag{37}$$

Область стохастичності виявляється, як і передбачалось, експоненційно вузькою.

Головний висновок, що випливає з формул (35) та (37), такий: завжди, тобто за будь-яких ε та ν, в околі сепаратриси утворюється область траєкторій, які переміщаються, – стохастичний прошарок. Максимальна ширина стохастичного прошарку має порядок: $\Delta H / H_c \sim \varepsilon.$ Вона досягається у випадку, близькому до резонансу між збуренням і частотою малих коливань осцилятора ω_0. Тому стохастичний прошарок в околі сепаратриси призводить до випадкового блукання часточок з однієї потенціальної ями в іншу.

Іншими словами, локальна нестійкість призводить до руйнування сепаратриси, причому втрачається одночасно сенс понять захоплених чи прольотних часточок, якщо тільки ці часточки мають енергію, що лежить в області стохастичного прошарку.

Приклади. Розглянемо маятник з осцилюючою точкою підвісу. Цей приклад узятий з книги Ландау та Ліфшиця [7]. Він найбільш наочний для демонстрації змін, до яких можуть призводити швидко осцилюючі поля. (Аналоги у царині нелінійної динаміки кранових конструкцій можна знайти, враховуючи наведені вище міркування щодо причин та збуджувальних сил, які викликають маятникові коливання вантажу на канаті у системі „вантажний візок – канат – вантаж" (мостового) крана):

1. Якщо точка підвісу маятника здійснює вертикальні коливання з частотою ω й з амплітудою a, то можна показати, що співвідношення (37) реалізуються за таких значень параметрів:

$$\omega \equiv \nu; \quad \varepsilon = \frac{a}{L} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2; \quad V(x) = \frac{1}{4} \cdot \omega_0^2 \cdot \sin^2 x. \tag{38}$$

При цьому частоту ω_0 для кранових систем необхідно визначати з міркувань, наведених вище.

2. Якщо точка підвісу маятника здійснює горизонтальні осциляції з тими самими параметрами, то співвідношення (37) реалізуються за таких самих значень параметрів ω та ε, що й у попередньому випадку (38), але

$$V(x) = \omega_0^2 \cdot \cos^2 x. \tag{39}$$

3. Якщо точка підвісу маятника здійснює осциляції під кутом ϑ до горизонту із частотою ω та з амплітудою a, то значення параметрів $\omega, \omega_0, \varepsilon$ для реалізації динамічного хаосу у кранових системах такі самі, як і у (38), але

$$V(x) = \frac{1}{4} \cdot \omega_0^2 \cdot \sin\vartheta \cdot \sin^2 x + \omega_0^2 \cdot \cos\theta \cdot \cos^2 x. \tag{40}$$

Висновки:

1. Застосування методів, розвинутих у [2], дає змогу встановити критерії стохастизації (динамічного хаосу) нелінійних маятникових коливань вантажу у системі „вантажний візок – канат – вантаж" (мостового) крана.

2. Встановлені критерії динамічного хаосу зазначених систем вантажопідйомних кранів для випадку осциляцій точки підвісу каната до вантажного візка з порівняно великою частотою (порівняно з власною частотою маятникових коливань вказаної системи).

3. Застосування встановлених критеріїв динамічного хаосу у системах підйому вантажів кранами дасть змогу істотно покращати і вдосконалити як управління самим процесом, так і підвищить точність існуючих інженерних методик розрахунку навантажень на металоконструкції кранів у режимах їх пуску та гальмування.

1. Лобов Н.А. Динамика грузоподъёмных кранов. – М.: Машиностроение, 1987. – 160 с. 2. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 368 с. 3. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А. Слабый хаос и квазирегулярные структуры. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 240 с. 4. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. – М.: Наука, 1984. – 271 с. 5. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. – М.: Мир, 1984. – 528 с. 6. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1974. – 432 с. 7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.1. Механика. – М.: Наука, 1973. – 240 с. 8. Мельников В.К. //Доклады АН СССР. – 1963. – Т. 148. – С. 1257. 9. Filonenko N.N., Sagdeev R.Z., Zaslavskii G.M. //Nuclear. Fusion. – 1967. – V. 7. – P. 253. 10. Заславский Г.М., Филоненко Н.Н. // ЖЭТФ. – 1968. – Т. 54. – С. 1590.