

Bojko O., Chyrka M. Temperature Measurement System Based on Thermocouple With Controlled Temperature Field. Proc. of the IEEE international workshop on Intelligent Data Acquisition and Advancing Computing Systems (IDAACS'2007), Dortmund, Germany, September 6 – 8, 2007. – P. 47–50. 23. Карелов Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 487 с. 24. Галицин А.С., Жуковский А.Н. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. – К.: Наукова думка, 1975. – 281 с. 25. Крижанівський С.Є. Диференціальні рівняння. Харків, Державне науково-технічне видавництво

України ім. Гонти, 1938. – 398 с. 26. Недужий И.А., Алабовский А.Н. Техническая термодинамика и теплопередача: Учеб. пособие для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. – К.: Вища школа. Головное изд-во, 1981. – 248 с. 27. Кухлинг Х. Справочник по физике: Пер. с нем. – М.: Мир, 1982. – 520 с. 28. ГОСТ 3044-84. Преобразователи термоэлектрические. Номинальные статистические характеристики преобразования, – М.: Изд-во стандартов, 1984. – 56 с. 29. Бычковский Р.В. Контактные датчики температуры. – М.: Металлургия, 1978. – 240 с.

УДК 519.65

НЕПЕРЕРВНА АПРОКСИМАЦІЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕРМОДІОДНОГО СЕНСОРА І ЙОГО ЧУТЛИВОСТІ СУМОЮ МНОГОЧЛЕНА ТА ЕКСПОНЕНТИ З НЕЛІНІЙНИМ ПАРАМЕТРОМ

© Малахівський Петро, 2008

Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки та математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Українська академія друкарства, м. Львів, psmal@cmm.lviv.ua

Розглянуто задачу побудови неперервного й гладкого мінімаксного сплайн-наближення функцій сумою многочлена та експоненти з нелінійним параметром. Кожна ланка такого сплайна визначається як чебишовське наближення функції з ермітовим інтерполюванням у крайніх точках відрізка. Запропоновано алгоритм побудови такого сплайн-наближення із задалегідь заданою похибкою. Подано неперервну апроксимацію температурної характеристики й чутливості термодіодного сенсора. Виконано аналіз похибки цієї апроксимації, а також точності відтворення чутливості сенсора.

Рассмотрена задача построения непрерывного и гладкого минимаксного сплайн-приближения функций суммой многочлена и экспоненты с нелинейным параметром. Каждое звено такого сплайна определяется как чебышевское приближение функции с эрмитовым интерполированием в крайних точках отрезка. Предложен алгоритм построения такого сплайн-приближения с предварительно заданной погрешностью. Подана непрерывная аппроксимация температурной характеристики и чувствительности термодиодного сенсора. Осуществлен анализ погрешности этой аппроксимации, а также точности восстановления чувствительности сенсора.

It is considered the problem of construction of the continuous and smoothed minimax spline-approximation by sum of polynomial and exponential with nonlinear parameter. The algorithm for construction so approximation with an a priori given error, when all spline links are determined as Chebyshev approximation, is described. An exemplary application of this approximation for the transfer-function of diode temperature sensor for cryogenic temperature range is given. The comparison of values of sensor sensitivity and values of the derivative of obtained spline function is done.

Розглянемо задачу побудови неперервного й гладкого мінімаксного сплайн-наближення функцій сумою многочлена та експоненти

$$E_n(a; x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i + A e^{px}, \quad A \neq 0, \\ p \neq 0, n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

з нелінійним параметром p . Сплайн-наближення таким виразом застосовується для апроксимації залежностей деяких фізичних величин [1], зокрема, опису температурної характеристики термодіодного сенсора [2]. Задача полягає у побудові неперервного й гладкого сплайн-наближення, яке забезпечує апроксимацію

функції із задалегідь заданою похибкою за найменшою кількістю ланок. Оптимальне розв'язання цієї задачі можливе із застосуванням чебишовського наближення, оскільки чебишовське наближення забезпечує досягнення найменшої з можливих похибок апроксимації за заданою кількістю параметрів. Побудову неперервного мінімаксного сплайн-наближення функції сумою многочлена й експоненти (1) розглянуто у [2].

1. Постановка задачі. Нехай неперервно диференційовна функція $f(x)$ ($f(x) \in C^1[a, b]$) задана на множині точок

$$X = \{ x \in X : a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b \} \quad (2)$$

відрізка $[a, b]$. Під неперервним і гладким мінімаксним сплайн-наближенням функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ сумою многочлена й експоненти (1) розумітимемо сплайн

$$S(x) = E_n(a^{(j)}; x), \quad t_j \leq x \leq t_{j+1} \\ j = \overline{1, q}, \quad (3)$$

де q – кількість ланок сплайн-наближення, точки t_j ($j = \overline{1, q+1}$) – межі ланок, $t_1 = a$, $t_{q+1} = b$.

У цьому сплайнні кожний із виразів $E_n(a^{(j)}; x)$, $j = \overline{1, q}$ є чебишовським наближенням функції $f(x)$ з найменшою абсолютною похибкою на відповідному відрізку $[t_j, t_{j+1}]$, яке у точках стику ланок t_j ($j = \overline{2, q}$) точно відтворює значення функції $f(x)$ та її похідної

$$E_n(a^{(j-1)}; t_j) = E_n(a^{(j)}; t_j) = f(t_j), \quad j = \overline{2, q}; \quad (4)$$

$$E_n'(a^{(j-1)}; t_j) = E_n'(a^{(j)}; t_j) = f'(t_j), \quad j = \overline{2, q}. \quad (5)$$

Оскільки значення виразів $E_n(a^{(j)}; x)$, $j = \overline{1, q}$ та їхніх похідних у точках стику суміжних ланок t_j ($j = \overline{2, q}$) збігаються, то сплайн-наближення (3) з такими ланками буде неперервним і гладким.

Похибкою наближення функції $f(x)$ сплайном (3) буде

$$G = \max_{1 \leq j \leq q} G_j,$$

де G_j – значення абсолютної похибки наближення функції $f(x)$ виразом $E_n(a^{(j)}; x)$ на j -й ланці сплайна

$$G_j = \max_{t_j \leq x \leq t_{j+1}} | f(x) - E_n(a^{(j)}; x) |.$$

Сплайн-наближення (3) називатимемо сплайн-наближенням із заданою похибкою G_0 , якщо $G < G_0$, а кількість його ланок є найменшою з можливих.

2. Алгоритм побудови неперервного й гладкого мінімаксного сплайн-наближення сумою многочлена та експоненти із заданою похибкою. Побудову неперервного й гладкого мінімаксного сплайн-наближення (3) з ланками (1) можна реалізувати за алгоритмом побудови мінімаксного сплайн-наближення, який описано у [3, 4, 5], з передбаченням дотримання умов (4) і (5) щодо неперервності та гладкості сплайна.

Для забезпечення неперервності та гладкості сплайн-наближення (3) параметри виразів $E_n(a^{(j)}; x)$, $j = \overline{1, q}$ на кожній із його ланок визначаються відповідно до критерію чебишовського наближення з точним відтворенням значення функції та її похідної у крайніх точках відрізка [6]. Відповідно до характеристичної теореми [6] достатньою умовою існування чебишовського наближення функції $f(x)$ сумою многочлена та експоненти (1) з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[a, b]$ і точним відтворенням значення функції та похідної в обох крайніх точках відрізка a і b є справдження нерівностей

$$W^{(n)} > 0, \quad W^{(n)} \neq W_0^{(n)}, \quad (6)$$

де

$$W^{(n)} = \frac{D_{n+1}(f; z_2, z_3, \dots, z_{n+4})}{D_{n+1}(f; z_1, z_2, \dots, z_{n+3})}, \quad (7)$$

$$W_0^{(n)} = \frac{D_{n+1}(s_{n+1}; z_2, z_3, \dots, z_{n+4})}{D_{n+1}(s_{n+1}; z_1, z_2, \dots, z_{n+3})}, \quad (8)$$

$$D_k(U; z_r, z_{r+1}, \dots, z_{r+k+1}) = \\ = \frac{D_{k-1}(U; z_{r+1}, z_{r+2}, \dots, z_{r+k+1})}{D_{k-1}(s_{k-1}; z_{r+1}, z_{r+2}, \dots, z_{r+k+1})} - \\ - \frac{D_{k-1}(U; z_r, z_{r+1}, \dots, z_{r+k})}{D_{k-1}(s_{k-1}; z_r, z_{r+1}, \dots, z_{r+k})}, \\ k = 3, \quad n+1, \quad r = 1, \quad n-k+3, \quad (9)$$

$$D_2(U; z_r, z_{r+1}, z_{r+2}, z_{r+3}) =$$

$$= \begin{cases} \frac{D_1(U; z_2, z_4)}{D_1(s_1; z_2, z_4)} - U'(z_1), & \text{якщо } r=1; \\ \frac{D_1(U; z_{r+1}, z_{r+3})}{D_1(s_1; z_{r+1}, z_{r+3})} - \frac{D_1(U; z_r, z_{r+2})}{D_1(s_1; z_r, z_{r+2})}, & \text{якщо } 1 < r < n+1; \\ U'(z_{n+4}) - \frac{D_1(U; z_{n+1}, z_{n+3})}{D_1(s_1; z_{n+1}, z_{n+3})}, & \text{якщо } r=n+1, \end{cases} \quad (10)$$

$$D_1(U; z_r, z_{r+2}) =$$

$$= \begin{cases} U'(z_1), & \text{якщо } r=1; \\ U(z_4) + U(z_3) - 2U(z_2), & \text{якщо } r=2; \\ U(z_{r+2}) - U(z_r), & \text{якщо } 2 < r \leq n; \\ 2U(z_{n+3}) - U(z_{n+2}) - U(z_{n+1}), & \text{якщо } r=n+1; \\ U'(z_{n+4}), & \text{якщо } r=n+2, \end{cases} \quad (11)$$

$$s_k(x) = x^k,$$

де $U'(x)$ – похідна функції $U(x)$, z_i ($i = \overline{3, n+2}$) – довільні, упорядковані за зростанням $z_r < z_{r+1}$ ($r = \overline{3, n+1}$) числа з інтервалу (a, b) , $z_1 = z_2 = a$, а $z_{n+3} = z_{n+4} = b$.

У разі чебишовського наближення з точним відтворенням значення функції та її похідної у точці a достатньою умовою існування такого наближення функції $f(x)$ виразом (1) з найменшою абсолютною похибкою є справдження нерівностей (6), в яких

$$D_2(U; z_r, z_{r+1}, z_{r+2}, z_{r+3}) =$$

$$= \begin{cases} \frac{D_1(U; z_2, z_4)}{D_1(s_1; z_2, z_4)} - U'(z_1), & \text{якщо } r=1; \\ \frac{D_1(U; z_{r+1}, z_{r+3})}{D_1(s_1; z_{r+1}, z_{r+3})} - \frac{D_1(U; z_r, z_{r+2})}{D_1(s_1; z_r, z_{r+2})}, & \text{якщо } 1 < r \leq n+1; \end{cases} \quad (12)$$

$$D_1(U; z_r, z_{r+2}) =$$

$$\begin{cases} U'(z_1), & \text{якщо } r=1; \\ U(z_4) + U(z_3) - 2U(z_2), & \text{якщо } r=2; \\ U(z_{r+2}) - U(z_r), & \text{якщо } 2 < r \leq n+2; \end{cases} \quad (13)$$

де $U'(x)$ – похідна функції $U(x)$, z_i ($i = \overline{3, n+4}$) – довільні, упорядковані за зростанням $z_r < z_{r+1}$ ($r = \overline{3, n+3}$) числа з $(a, b]$, а $z_1 = z_2 = a$.

У разі чебишовського наближення з точним відтворенням значення функції та її похідної в точці b

достатньою умовою існування такого наближення функції $f(x)$ виразом (1) з найменшою абсолютною похибкою є справдження нерівностей (6), в яких

$$D_2(U; z_j, z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j+3}) =$$

$$= \begin{cases} \frac{D_1(U; z_{j+1}, z_{j+3})}{D_1(s_1; z_{j+1}, z_{j+3})} - \frac{D_1(U; z_j, z_{j+2})}{D_1(s_1; z_j, z_{j+2})}, & \text{якщо } 1 \leq j < n+1; \\ U'(z_{n+4}) - \frac{D_1(U; z_{n+1}, z_{n+3})}{D_1(s_1; z_{n+1}, z_{n+3})}, & \text{якщо } j=n+1, \end{cases} \quad (14)$$

$$D_1(U; z_j, z_{j+2}) =$$

$$= \begin{cases} U(z_{j+2}) - U(z_j), & \text{якщо } 1 \leq j \leq n; \\ 2U(z_{n+3}) - U(z_{n+2}) - U(z_{n+1}), & \text{якщо } j=n+1; \\ U'(z_{n+4}), & \text{якщо } j=n+2, \end{cases} \quad (15)$$

де $U'(x)$ – похідна функції $U(x)$, z_i ($i = \overline{1, n+2}$) – довільні, упорядковані за зростанням $z_j < z_{j+1}$ ($j = \overline{1, n+1}$) числа з $[a, b)$, а $z_{n+3} = z_{n+4} = b$.

Умові (6) задовольняють, зокрема, функції $f(x)$, неперервно диференційовані на відрізку $[a, b]$ до n -го порядку, n -а похідна яких строго монотонна, але відмінні від полінома n -го степеня [6]. Якщо умови (6) на відповідних відрізках $[t_j, t_{j+1}]$, $j = \overline{1, q}$ виконуються, то параметри чебишовського наближення функції $f(x)$ сумою многочлена й експоненти (1) можна обчислити за схемою Ремеза [1]. Параметри $a_i^{(j)}$ ($i = \overline{0, n}$) і $A^{(j)}$ виразів $E_n(a^{(j)}; x)$ на ланках $j = \overline{1, q}$ сплайна визначаються за формулами [6]

$$A^{(j)} = D_{n+1}(f; z_1, z_2, \dots, z_{n+3}) / D_{n+1}(j; z_1, z_2, \dots, z_{n+3}); \quad (16)$$

$$a_k^{(j)} = \frac{D_k(f; z_1, z_2, \dots, z_{k+2})}{D_k(s_k; z_1, z_2, \dots, z_{k+2})} - \frac{\sum_{i=k+1}^n a_i^{(j)} D_k(s_i; z_1, z_2, \dots, z_{k+2}) - A^{(j)} D_k(j; z_1, z_2, \dots, z_{k+2})}{D_k(s_k; z_1, z_2, \dots, z_{k+2})}; \quad (17)$$

$$a_0^{(j)} = \frac{1}{2} \left(f(z_3) + f(z_4) - \sum_{i=1}^n a_i^{(j)} (z_2^i + z_3^i) - A(e^{p^{(j)z_3}} + e^{p^{(j)z_4}}) \right); \quad (18)$$

де $j(p; x) = e^{px}$, вирази $D_k(U; z_i, z_{i+1}, \dots, z_{i+k+1})$ визначаються за формулою (9), а $D_2(U; z_r, z_{r+1}, z_{r+2}, z_{r+3})$ і $D_1(U; z_r, z_{r+2})$ залежно

від точок інтерполювання – за відповідними формулами (10) та (11), (12) і (13) або (14) та (15). Тут і далі через z_r ($r = \overline{1, n+4}$) позначаються точки альтернансу та інтерполювання на відповідних відрізках $[t_j, t_{j+1}]$, $j = \overline{1, q}$.

Значення параметра $p^{(j)}$ обчислюється за ітераційним методом Ньютона [6]

$$p_{i+1}^{(j)} = p_i^{(j)} - \frac{g_n(p_i^{(j)}) - V^{(n)}}{g_n'(p_i^{(j)})}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, (19)$$

де

$$g_n(p) = \ln \left(\frac{D_{n+1}(\bar{j}; z_2, z_3, \dots, z_{n+4})}{D_{n+1}(\bar{j}; z_1, z_2, \dots, z_{n+3})} \right);$$

$$V^{(n)} = \ln(W^{(n)});$$

$$g_n'(p) = \frac{D_{n+1}(\bar{j}; z_2, z_3, \dots, z_{n+4})}{D_{n+1}(\bar{j}; z_2, z_3, \dots, z_{n+4})} -$$

$$\frac{D_{n+1}(\bar{j}; z_1, z_2, \dots, z_{n+3})}{D_{n+1}(\bar{j}; z_1, z_2, \dots, z_{n+3})};$$

$$\bar{j}(p; z) = ze^{pz}; \quad j(p; z) = e^{pz};$$

$$p_0^{(j)} = \text{sign}(W^{(n)} - W_0^{(n)}) \frac{(n+1) |V^{(n)}|}{z_{n+4} - z_{n+2} + z_3 - z_1}; \quad (20)$$

а вирази $W^{(n)}$, $W_0^{(n)}$ і $D_{n+1}(U; z_i, z_{i+1}, \dots, z_{i+n+2})$, $i = \overline{1, 2}$ залежно від точок інтерполювання визначаються за відповідними формулами (7)–(15).

Для забезпечення неперервності й гладкості сплайна (3) відповідно до умов (4) та (5) значення виразів $D_2(U; z_r, z_{r+1}, z_{r+2}, z_{r+3})$ і $D_1(U; z_r, z_{r+2})$, а також початкове наближення до точок альтернансу визначаються залежно від порядкового номера ланки.

Перша ланка сплайна $E_n(a^{(1)}; x)$ визначається як чебишовське наближення функції $f(x)$ із найменшою абсолютною похибкою на $[t_1, t_2]$ з ермітовим інтерполюванням у точці t_2 . У такому разі значення $D_2(U; z_r, z_{r+1}, z_{r+2}, z_{r+3})$ визначається за формулою (14), $D_1(U; z_r, z_{r+2})$ – за (15), в яких z_r ($r = \overline{1, n+2}$) – упорядковані за зростанням точки альтернансу з $[t_1, t_2]$, $t_1 = a$, а $z_{n+3} = z_{n+4} = t_2$. Похибку

апроксимації на першій ланці можна визначити за формулою

$$G_1 = \left| f(z_2) - \sum_{i=0}^n a_i^{(1)} z_2^i - A^{(1)} e^{p^{(1)} z_2} \right|. \quad (21)$$

Параметри виразів $E_n(a^{(j)}; x)$, $j = \overline{2, q-1}$ сплайн-наближення (3) функції $f(x)$ на внутрішніх ланках, починаючи з другої до передостанньої, визначаються як чебишовське наближення з умовою точного відтворення значення функції та її похідної в обох крайніх точках кожної з цих ланок, тобто у крайніх точках відрізків $[t_j, t_{j+1}]$, $j = \overline{2, q-1}$. Під час обчислення параметрів сплайна на цих ланках значення $D_2(U; z_r, z_{r+1}, z_{r+2}, z_{r+3})$ визначається за (10), $D_1(U; z_r, z_{r+2})$ – за (11), в яких z_i ($i = \overline{3, n+2}$) – упорядковані за зростанням точки альтернансу з інтервалу (t_j, t_{j+1}) , $z_1 = z_2 = t_j$ а $z_{n+3} = z_{n+4} = t_{j+1}$. Похибку апроксимації на цих ланках можна визначити подібно до обчислення похибки апроксимації на першій ланці.

Для забезпечення неперервності й гладкості сплайна наближення виразом $E_n(a^{(q)}; x)$ на останній ланці визначається як чебишовське наближення з точним відтворенням значення функції та похідної в крайній лівій точці ланки $-t_q$. Під час обчислення параметрів сплайна на цій ланці значення $D_2(U; z_r, z_{r+1}, z_{r+2}, z_{r+3})$ визначається за (12), $D_1(U; z_r, z_{r+2})$ – за (13), в яких z_i ($i = \overline{3, n+4}$) – упорядковані за зростанням точки альтернансу з $[t_q, t_{q+1}]$, $z_1 = z_2 = t_q$, а $t_{q+1} = b$. Похибку апроксимації на цій ланці також можна визначити подібно до обчислення похибки апроксимації на першій ланці.

Задача побудови неперервного й гладкого мінімаксного сплайн-наближення сумою многочлена та експоненти (1) із заданою похибкою у разі наближення таблично заданих функцій не завжди має розв'язок. Вона не має розв'язку, якщо на одному з підінтервалів мінімально допустимої довжини ланки ($n+3$ точки для першої й останньої ланки та $n+2$ точки для решти ланок) отримується похибка G , більша від заздалегідь заданої G_0 ($G > G_0$). Якщо під час

побудови неперервного й гладкого мінімаксного сплайн-наближення із заданою похибкою одержували похибку, більшу від заздалегідь заданої, то на підінтервалах, на яких чебишовське наближення з необхідною похибкою не вдалося знайти, можна застосувати інтерполяцію цим самим виразом або многочленом із точним відтворенням значення похідної функції у відповідних крайніх точках.

3. Неперервна апроксимація температурної характеристики й чутливості термодіодного сенсора.

Апроксимуємо температурну характеристику термодіодного сенсора типу DT-471 фірми Lake Shore [7] (Curve 10). Температурна характеристика цього сенсора задана 120 значеннями у діапазоні від 1.4 К до 475 К. Графік цієї температурної характеристики зображено на рис. 1, а графік чутливості сенсора – на рис. 2.

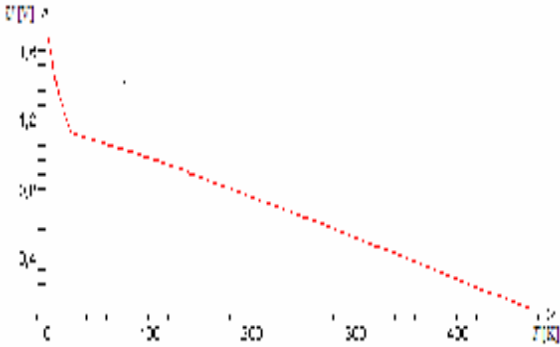


Рис. 1. Графік температурної характеристики сенсора DT-471

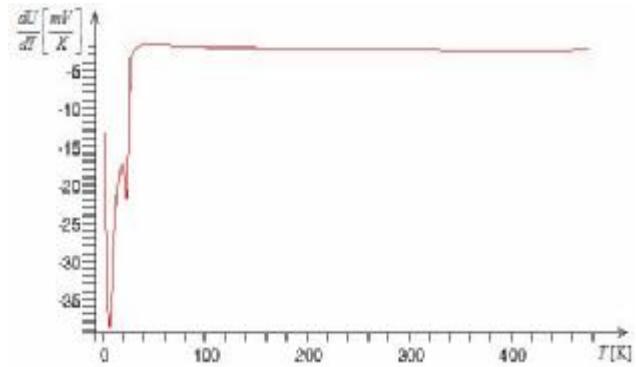


Рис. 2. Графік чутливості сенсора типу DT-471

Апроксимація цієї температурної характеристики неперервним і гладким мінімаксним сплайном (3) для $n = 2$ з абсолютною похибкою 0.2 мВ складається з дев'яти ланок. Результати цього сплайн-наближення подано в таблиці.

З поданих у цій таблиці даних випливає, що побудований неперервний і гладкий мінімаксний сплайн відтворює температурну характеристику сенсора з абсолютною похибкою 0.19 мВ, а його чутливість – з абсолютною похибкою 0.356 мВ/К. Для порівняння зазначимо, що аналогічне сплайн-наближення з поліноміальними ланками четвертого степеня й тією самою абсолютною похибкою складається з десяти ланок і забезпечує відтворення чутливості сенсора з похибкою 0.36 мВ/К.

Результати апроксимації температурної характеристики і чутливості сенсора сплайном (3)

Номер ланки	Межі ланки	Значення коефіцієнтів a_0, a_1, a_2, A і p виразу (1) для $n = 2$	Похибка апроксимації	
			характеристики [mB]	чутливості [mB/K]
1	1.4; 3.8	1.73093548; -0.01662377; 1.984713579 $_{10}^{-3}$; -0.084001341; -0.10095042	0.19	1.8
2	3.8; 9	5.3004591; -0.353464068; 0.0096973806; -3.60770487; -0.10095042	0.18	0.356
3	9; 20	0.87210312; 0.028217802; -8.2847005 $_{10}^{-4}$; 1.1118537; -0.11597116	0.19	0.14
4	20; 22	1.74999188; -0.038675678; 6.129291708 $_{10}^{-4}$; .46028048 $_{10}^{-7}$; 0.47469173	0	0.35
5	22; 24	0.25462216; 0.10770629; -2.99861585 $_{10}^{-3}$; 2.50632149 $_{10}^{-11}$; 0.86097967	0	0.063
6	24; 36	1.20548358; -0.00431371835; -2.9155759 $_{10}^{-7}$; 79829516.7529; -0.9355469	0.15	0.22
7	36; 100	1.15154023; -0.0014808049; -2.7959753 $_{10}^{-6}$; 23703.84975; -0.505860386	6.8 $_{10}^{-2}$	2.3 $_{10}^{-2}$
8	100; 350	1.22285667; -2.26604021 $_{10}^{-3}$; -2.57242917 $_{10}^{-7}$; 0.08365128278; -0.015263219	0.13	7.5 $_{10}^{-3}$
9	350; 475	1.18640398; -2.0659376 $_{10}^{-3}$; -5.34690067 $_{10}^{-7}$; 3.56324675 $_{10}^{-15}$; 0.059332167	1.1 $_{10}^{-2}$	1.3 $_{10}^{-2}$

Висновки. Алгоритм побудови неперервного й гладкого мінімаксного сплайн-наближення функції $f(x)$ сумою многочлена та експоненти (1) з нелінійним параметром ґрунтується на характеристичній властивості чебишовського наближення функції цим виразом із найменшою абсолютною похибкою та ермітовим інтерполюванням у крайніх точках відрізка. Значення параметрів такого чебишовського наближення визначається за формулами (16)–(18), а значення нелінійного параметра – за ітераційною схемою (19). Достатній умові існування чебишовського наближення сумою многочлена та експоненти задовольняють, зокрема, функції $f(x)$, неперервно диференційовані на відрізку $[a, b]$ до n -го порядку, n -ша похідна яких строго монотонна, але відмінні від полінома n -го степеня. Апроксимація температурної характеристики сенсора неперервним і гладким мінімаксним сплайном сумою полінома та експоненти з похибкою 0.2 мВ забезпечує відтворення його чутливості з похибкою 0.356 мВ/К.

1. Попов Б. А., Теслер Г. С. *Приближение функций для технических приложений*. – К.: Наукова думка. 1980. – 352 с.
2. Андруник В., Малачівський П. *Неперервне мінімаксне сплайн-наближення температурної характеристики сенсора експоненційним виразом* // *Комп'ютерні технології друкарства*. – Львів: Українська академія друкарства. – № 18. 2007. – С. 95–103.
3. Попов Б. А. *Равномерное приближение сплайнами*. – К.: Наук. думка, 1989. – 272 с.
4. Малачівський П., Андруник В. *Рівномірне сплайн-наближення* // *Комп'ютерні технології друкарства*. – Львів: Українська академія друкарства, 2002. – № 7. – С. 107–115.
5. Малачівський П., Пізюр Я., Андруник В. *Неперервне й гладке рівномірне сплайн-наближення температурної характеристики сенсора та його чутливості* // *Вимірювальна техніка та метрологія*. – 2007. – № 58. – С. 24–30.
6. Малачівський П. *Рівномірне наближення сумою многочлена й експоненти з точним відтворенням значення функції та її похідної у крайніх точках* // *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2008. – Вип. 7.
7. www.lakeshore.com/.../Curve 10.