УДК 51.001.57

А.В. ЧАБАН., С.А. ДУБЕЦЬКИЙ
Національний університет "Львівська політехніка"

ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ ГАМІЛЬТОНА-ОСТРОГРАДСЬКОГО ДЛЯ ОДЕРЖАННЯ РІВНЯНЬ РУХУ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ ІЗ ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ІНЕРЦІЙНИМИ ЛАНКАМИ

Запропоновано метод побудови рівняння руху механічних систем на підставі принципу Гамільтона-Остроградського з урахуванням дисипації. Для цього поширено згаданий принцип на реальні неконсервативні системи побудовою неконсервативного лагранжіана.

The method of construction of equalization of motion of the mechanical systems is offered on the basis of the Gamyl'ton-Ostrogradskyj principle taking into account dissipation. For this purpose it is necessary to modify the known function Lagrangia by addition to her of function of internal dissipation of mechanical energy.

Вступ. Інтегральний варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського є одним з найосновніших принципів сучасної прикладної фізики. На підставі принципу найменшої дії можливе одержання математичної інтерпретації деяких законів прикладної фізики, які належать не тільки до аналітичної механіки, а й до багатьох інших наук.

У цій роботі пропонується поширити принцип Гамільтона-Остроградського з консервативних систем із зосередженими інерційними ланками, які рухаються під дією потенціальних сил, на неконсервативні системи, що рухаються під дією активних і пасивних сил як потенціального, так і непотенціального характеру, а також сил внутрішньої та зовнішньої дисипацій. Таке припущення запотребувало істотно модифікувати відому функцію Лаґранжа уведенням в неї дисипації механічної енергії та енергії узагальнених сил непотенціального характеру. Модифікація консервативного лагранжіана здійснена з використанням відомої праці американських вчених Вайта і Вудсона [1].

Мета роботи. На підставі запропонованого неконсервативного лагранжіана, що входить до інтегрального варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського, одержати диференціальні рівняння руху механічних систем із зосередженими параметрами, яке враховує дисипацію енергії в системі, та енергію активних і пасивних сил непотенціального характеру.

Аналіз результатів останніх досліджень. Варіаційні принципи, на підставі яких одержують рівняння руху пружного середовища із зосередженими інерційними ланками, застосовуються для консервативних систем, що, безперечно, не завжди відповідає реальній постановці задачі. Адже для практичної більшості прикладних задач очевидна дія узагальнених сил внутрішньої дисипації. Інтегральний варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського доволі широко застосовують для аналізу коливань пружних середовищ без урахування дисипації, наприклад, у праці [2].

Теоретичні засади. Запишемо функціонал дії за Гамільтоном-Остроградським для голономних систем із зосередженими параметрами [3]:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad L = T - P, \tag{1}$$

де S – дія за Гамільтоном, L – функція Лаґранжа, T, P – кінетична та потенціальна енергії системи відповідно.

Запишемо модифіковану функцію Лагранжа [4]:

$$L = T - P + \Phi - D; \quad \Phi = \int_0^t \Phi_p \Big|_{t=\tau} d\tau, \tag{2}$$

де Φ – функція дисипації енергії; Φ_p – дисипативна функція (квадратична форма часових та просторово-часових похідних від функції узагальнених координат); D – енергія активних та пасивних сил непотенціального характеру, що діють на систему ззовні; τ – додаткова змінна інтегрування.

Записуючи варіацію функціоналу дії за Гамільтоном (1) за умови (2) та вводячи скінченне число узагальнених координат, одержимо

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L^*}{\partial q_k} \delta q_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right) dt = 0, \tag{3}$$

де $q = (q_1, q_2, ..., q_n)^{\mathrm{T}}$ – вектор-стовпець узагальнених координат (для голономних систем число узагальнених координат дорівнює числу ступенів вільності [1]); $\dot{q} \equiv dq/dt = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n)^{\mathrm{T}}$ – вектор-стовпець узагальнених швидкостей, $k = 1, 2, ..., n$; n **–** число узагальнених координат у механічній системі.

Розгортаючи детально варіацію в (3) та застосовуючи метод інтегрування за частинами, а також беручи до уваги, що ізохронні варіації узагальнених координат на початку й кінці області інтегрування дорівнюють нулю, одержимо диференціальне рівняння руху системи із скінченним числом ступенів вільності [3]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0. \tag{4}$$

Рівняння (4) фігурує в літературі як рівняння Лаґранжа для консервативних систем [3].

1. Рівняння обертового руху. Розглянемо рівняння обертового руху багатомасової системи із скінченним числом ступенів вільності $q = (q_1, q_2, ..., q_n)^{\mathrm{T}}, k = 1, 2, ..., n, n$ – число узагальнених координат у механічній системі. За узагальнені координати приймемо кути повороту дискретних мас обертових інерційних ланок ($q_k = \gamma_k$). За часові похідні від узагальнених координат (узагальнені швидкості) приймемо швидкості обертання цих ланок ($\dot{q}_k = \omega_k$).

Нехай на систему діє зовнішній активний момент M_i, $i = 1, n$, прикладений до першої й останньої інерційних ланок, та пасивний момент (наприклад, сил тертя) $M_{\mathrm{T},k}$, прикладений до кожної з інерційних ланок. Тоді у валопроводі діють крутні моменти, які передають дію через податливі ланки з коефіцієнтами штивності $c_{k+1,k}$ і коефіцієнтами внутрішньої дисипацій $\nu_{k+1,k}^{(2)}$ (згідно з принципом Даламбера), а також на систему діють узагальнені сили зовнішньої дисипації (пов'язані з тертям) з коефіцієнтом зовнішньої дисипації – $\nu_k^{(1)}$). Усі задіяні в (1.3) енергії за умови $L^* = L^*(q_k, \dot{q}_k, t)$, виглядатимуть так [5]:

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{J_k \omega_k^2}{2}; \quad P = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_{k+1,k} (\Delta\gamma)_k^2}{2}; \quad D = \int_0^t \left(M_1 \omega_1 + M_n \omega_n \right)_{|t=\tau} d\tau + \sum_{k=1}^{n} M_{\mathrm{T},k} \gamma_k ;$$

$$\Phi = \int_0^t (\Phi_{p1} + \Phi_{p2})_{|t=\tau} d\tau = \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \left(\frac{\nu_k^{(1)} \omega_k^2}{2} + \frac{\nu_{k+1,k}^{(2)} (\Delta\omega)_k^2}{2} \right)_{|t=\tau} d\tau, \tag{5}$$

де T – кінетична енергія руху багатомасової системи; P – потенціальна енергія, зосереджена в багатомасовій системі; Φ_{p1}, Φ_{p2} – функції зовнішньої та внутрішньої дисипацій механічної енергії відповідно; D – енергія механічних сил непотенціального характеру, що діють на систему; J_k – момент інерції k -ї інерційної ланки; $(\Delta\gamma)_k = \gamma_{k+1} - \gamma_k$, $(\Delta\omega)_k = \omega_{k+1} - \omega_k$.

Зазначимо, що в початковий момент часу, коли система нерухома, дисипація механічної енергії відсутня, тобто $\Phi\big|_{t=0} \equiv 0$.

Враховуючи (1.33) та (1.34) за умов $q_k = \gamma_k$, $\dot{q}_k = \omega_k$, модифікована функція Лагранжа (перший вираз в (1.3)) виглядатиме так:

$$L = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{J_k \dot{q}_k^2}{2} - \frac{c_{k+1,k}(q_{k+1}-q_k)^2}{2} + \int_0^t \left(\frac{\nu_k^{(1)}\dot{q}_k^2}{2} + \frac{\nu_{k+1,k}^{(2)}(q_{k+1}-q_k)^2}{2}\right)_{\big|t=\tau} d\tau\right) -$$

$$-\int_0^t \left(M_1 q_1 + M_n q_n\right)_{\big|t=\tau} d\tau - \sum_{k=1}^{n} M_{\text{T},k} q_k . \tag{6}$$

Підставляючи (6) в (4) та розписуючи послідовно всі доданки, попередньо змінюючи черговість диференціювання (4) та застосовуючи теорему про похідну інтеграла за верхньою межею, отримаємо

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{J_k \dot{q}_k^{\,2}}{2} + \int_0^t \left(\frac{\nu_k^{(1)}\dot{q}_k}{2} + \frac{\nu_k^{(2)}(\dot{q}_{k+1}-\dot{q}_k)^2}{2}\right)_{\big|t=\tau} d\tau\right) - \int_0^t (M_1\dot{q}_1 + M_n\dot{q}_n)_{|t=\tau} d\tau - \sum_{k=1}^{n} M_{\text{T},k} q_k\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\sum_{k=1}^{n}\frac{J_k \dot{q}_k^{\,2}}{2} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}\int_0^t \left(\frac{\nu_k^{(1)}\dot{q}_k}{2} + \frac{\nu_k^{(2)}(\dot{q}_{k+1}-\dot{q}_k)^2}{2}\right) d\tau - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t (M_1\dot{q}_1 + M_n\dot{q}_n) d\tau + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} M_{\text{T},k} q_k\right) = \frac{d}{dt}\left(J_k \dot{q}_k\right) + \nu_k^{(1)}\dot{q}_k - \nu_{k+1,k}^{(2)}(\dot{q}_{k+1}-\dot{q}_k) - M_{1|k=1} - M_{n|k=n}; \tag{7}$$

$$-\frac{\partial}{\partial q_k}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{c_k(q_{k+1}-q_k)^2}{2} - M_{\text{T},k} q_k\right) = -c_k(q_{k+1}-q_k) + M_{\text{T},k} . \tag{8}$$

Додавши вирази (7) та (8), отримаємо рівняння екстремалей функціоналу дії за Гамільтоном:

$$\frac{d}{dt}(J_k \dot{q}_k) - c_{k+1,k}(q_{k+1}-q_k) - \nu_{k+1,k}^{(2)}(\dot{q}_{k+1}-\dot{q}_k) + \nu_k^{(1)}\dot{q}_k - M_{1|k=1} - M_{n|k=n} + M_{\text{T},k} = 0 . \tag{9}$$

Для валопроводу, поданого як систему із зосередженими інерційними ланками, за умов $q_k = \gamma_k$, $\dot{q}_k = \omega_k$, остаточно отримаємо рівняння обертового руху багатомасової системи, надаючи (9) матрично-векторного вигляду:

$$\mathbf{I}\frac{d\omega}{dt} = \mathbf{M} - \mathbf{C}_1\mathbf{\Gamma}_1 + \mathbf{C}_2\mathbf{\Gamma}_2 - \mathbf{N}_1\mathbf{\Omega}_1 + \mathbf{N}_2\mathbf{\Omega}_2 - \mathbf{N}\omega - \mathbf{M}_{\mathbf{T}}, \quad \frac{d\gamma}{dt} = \omega , \tag{10}$$

де $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)^{\text{T}}$; $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n)^{\text{T}}$; $c_{k+1,k} \equiv c_{k,k+1}$; $\nu_{k+1,k}^{(2)} \equiv \nu_{k,k+1}^{(2)}$;

$\mathbf{I} = \text{diag}(J_1, J_2, ..., J_n)$; $\mathbf{M} = (M_1, 0, 0, ..., 0, M_n)^{\text{T}}$; $\mathbf{C}_1 = \text{diag}(c_{1,0}, c_{2,1}, ..., c_{n,n-1})$; $\mathbf{C}_2 = \text{diag}(c_{2,1}, c_{3,2}, ..., c_{n+1,n})$;

$\mathbf{N}_1 = \text{diag}(\nu_{1,0}^{(2)}, \nu_{2,1}^{(2)}, ..., \nu_{n,n-1}^{(2)})$; $\mathbf{N}_2 = \text{diag}(\nu_{2,1}^{(2)}, \nu_{3,2}^{(2)}, ..., \nu_{n+1,n}^{(2)})$; $\mathbf{\Gamma}_1 = (\gamma_1 - \gamma_0, \gamma_2 - \gamma_1, ..., \gamma_k - \gamma_{k-1}, ..., \gamma_n - \gamma_{n-1})^{\text{T}}$;

$$\mathbf{\Gamma}_2 = (\gamma_2 - \gamma_1, \gamma_3 - \gamma_2, ..., \gamma_{k+1} - \gamma_k, ..., \gamma_{n+1} - \gamma_n)^{\mathrm{T}}; \;\; \mathbf{\Omega}_1 = (\omega_1 - \omega_0, \omega_2 - \omega_1, ..., \omega_k - \omega_{k-1}, ..., \omega_n - \omega_{n-1})^{\mathrm{T}};$$

$$\mathbf{N} = \mathrm{diag}(\nu_k^{(1)}); \;\; \mathbf{\Omega}_2 = (\omega_2 - \omega_1, \omega_3 - \omega_2, ..., \omega_{k+1} - \omega_k, ..., \omega_{n+1} - \omega_n)^{\mathrm{T}}; \;\; \mathbf{M_T} = (M_{\mathrm{T},1}, M_{\mathrm{T},2}, ..., M_{\mathrm{T},n})^{\mathrm{T}}, \qquad (11)$$

причому $(c_{1,0}, c_{n+1,n}, \nu_{1,0}^{(2)}, \nu_{n+1,n}^{(2)}, \gamma_0, \gamma_{n+1}, \omega_0, \omega_{n+1}) \equiv 0$.

Вираз (10) за умови (11) репрезентує рівняння обертового руху багатомасової системи в матрично-векторній формі з урахуванням зовнішньої та внутрішньої дисипацій. На підставі (10) можливий повний аналіз крутильних коливань динамічної системи із зосередженими параметрами.

2. Рівняння поздовжньо-поступального руху. Розглянемо рівняння поздовжньо-поступального руху багатомасової системи із скінченним числом ступенів вільності $q = (q_1, q_2, ..., q_n)^{\mathrm{T}}$ (наприклад, коливання інерційних ланок на пружних канатах (пружинах), з'єднаних послідовно), $k = 1, 2, ..., n$, n – число узагальнених координат у механічній системі. На систему діє активна сила непотенціального характеру F_i, де $i = 1$, яка прикладена до першої інерційної ланки, та пасивна сила (наприклад, тертя), прикладена до кожної інерційної ланки $F_{\mathrm{T},k}$. Сили пружності в системі діють через податливі ланки зі штивністю $k_{k+1,k}^{(C)}$ і коефіцієнтом внутрішньої дисипації $k_{k+1,k}^{(\mathrm{N}2)}$, а також у системі діє узагальнена сила зовнішньої дисипації (пов'язана із силами тертя) з коефіцієнтом дисипації – $k_k^{(\mathrm{N}1)}$. За узагальнені координати приймемо поступальні координати руху зосереджених інерційних ланок системи ($q_k = x_k$). За часові похідні від узагальнених координат приймемо швидкості поступального руху цих інерційних ланок ($\dot{q}_k = v_k$). Усі задіяні у виразі (2) енергії набудуть вигляду

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_k^2}{2}; \;\; P = \sum_{k=1}^{n} \frac{k_{k+1,k}^{(C)} (\Delta x)_k^2}{2}; \;\; D = \int_0^t \left(F_1 v_1\right)_{|t=\tau} d\tau + \sum_{k=1}^{n} F_{\mathrm{T},k} x_k;$$

$$\Phi = \int_0^t (\Phi_{p1}^* + \Phi_{p2}^*)_{|t=\tau} d\tau = \sum_{k=1}^{k} \left(\int_0^t \frac{k_k^{(\mathrm{N}1)} v_k^2}{2} + \frac{k_{k+1,k}^{(\mathrm{N}2)} (\Delta v)_k^2}{2} \right)_{|t=\tau} d\tau, \qquad (12)$$

де m_k – маса k-ї інерційної ланки; $(\Delta x)_k = x_{k+1} - x_k$; $(\Delta v)_k = v_{k+1} - v_k$.

Зазначимо, що в початковий момент часу, коли система нерухома, дисипація механічної енергії відсутня, тобто $\Phi\big|_{t=0} \equiv 0$.

Ураховуючи (12), модифікована функція Лагранжа (1.3) за умов $q_k = x_k$, $\dot{q}_k = v_k$ виглядатиме так [5]:

$$L = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{m_k \dot{q}_k^2}{2} - \frac{k_{k+1,k}^{(C)} (q_{k+1} - q_k)^2}{2} + \int_0^t \left(\frac{k_k^{(\mathrm{N}1)} \dot{q}_k^2}{2} + \frac{k_{k+1,k}^{(\mathrm{N}2)} (\dot{q}_{k+1} - \dot{q}_k)^2}{2} \right)_{|t=\tau} d\tau \right) - \int_0^t (F_1 q_1)_{|t=\tau} d\tau - \sum_{k=1}^{n} F_{\mathrm{T},k} q_k. \quad (13)$$

Підставляючи (13) в (4) та розписуючи послідовно всі доданки, попередньо змінюючи черговість диференціювання та застосовуючи теорему про похідну інтеграла за верхньою межею, отримаємо

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{m_k \dot{q}_k{}^2}{2} + \int_0^t \left(\frac{k_k^{(\mathrm{N}1)} \dot{q}_k^2}{2} + \frac{k_{k+1,k}^{(\mathrm{N}2)} (\dot{q}_{k+1} - \dot{q}_k)^2}{2} \right)_{|t=\tau} d\tau \right) - \int_0^t (F_1 \dot{q}_1)_{|t=\tau} d\tau - \sum_{k=1}^{n} F_{\mathrm{T},k} q_k \right) =$$

$$=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k\dot{q}_k^{\,2}}{2}+\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}\int_0^t\left(\frac{k_k^{(\mathrm{N1})}q_k^2}{2}+\frac{k_{k+1,k}^{(\mathrm{N2})}(\dot{q}_{k+1}-\dot{q}_k)_k^2}{2}\right)d\tau-\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t F_1\dot{q}_1d\tau+\sum_{k=1}^{n}F_{\mathrm{T},k}q_k\right)=$$

$$=\frac{d}{dt}(m_k\dot{q}_k)-k_{k+1,k}^{(\mathrm{N2})}(\dot{q}_{k+1}-\dot{q}_k)+k_k^{(\mathrm{N1})}\dot{q}_k-F_{1|k=1};\qquad(14)$$

$$-\frac{\partial}{\partial q_k}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{k_{k+1,k}^{(C)}(q_{k+1}-q_k)^2}{2}-F_{\mathrm{T},k}q_k\right)=-k_{k+1,k}^{(C)}(q_{k+1}-q_k)+F_{\mathrm{T},k}q_k\,.\qquad(15)$$

Додавши вирази (14) та (15), отримаємо рівняння екстремалей функціоналу дії за Гамільтоном:

$$\frac{d}{dt}(m_k\dot{q}_k)-k_{k+1,k}^{(C)}(q_{k+1}-q_k)-k_{k+1,k}^{(\mathrm{N2})}(\dot{q}_{k+1}-\dot{q}_k)+k_k^{(\mathrm{N1})}\dot{q}_k-F_{1|k=1}+F_{\mathrm{T},k}=0\,.\qquad(16)$$

Надавши рівнянню (16) матрично-векторного вигляду за умов $q_k=x_k$, $\dot{q}_k=v_k$, остаточно отримаємо рівняння поздовжньо-поступального руху багатомасової системи:

$$\mathbf{m}\frac{dv}{dt}=\mathbf{F}-\mathbf{K}^{(C1)}\mathbf{X}_1+\mathbf{K}^{(C2)}\mathbf{X}_2-\mathbf{K}^{(1)}\mathbf{V}_1+\mathbf{K}^{(2)}\mathbf{V}_2-\mathbf{K}v-\mathbf{F_T};\quad\frac{dx}{dt}=v\,,\qquad(17)$$

де $v=(v_1,v_2,...,v_n)^{\mathrm{T}}$; $x=(x_1,x_2,...,x_n)^{\mathrm{T}}$; $\mathbf{m}=\mathrm{diag}(m_1,m_1+m_2,m_1+m_2+m_3,...,\sum_{i=1}^{n}m_i)$;

$$\mathbf{F}=(F_1,0,0,...,0)^{\mathrm{T}};\ k_{k+1,k}^{(C)}\equiv k_{k,k+1}^{(C)};\ k_{k+1,k}^{(\mathrm{N2})}\equiv k_{k,k+1}^{(\mathrm{N2})};\ \mathbf{K}=\mathrm{diag}(k_k^{(\mathrm{N1})});\ \mathbf{K}^{(C1)}=\mathrm{diag}(k_{1,0}^{(C)},k_{2,1}^{(C)},...,k_{n,n-1}^{(C)});$$

$$\mathbf{K}^{(C2)}=\mathrm{diag}(k_{2,1}^{(C)},k_{3,2}^{(C)},...,k_{n+1,n}^{(C)});\ \mathbf{K}^{(1)}=\mathrm{diag}(k_{1,0}^{(\mathrm{N2})},k_{2,1}^{(\mathrm{N2})},...,k_{n,n-1}^{(\mathrm{N2})});\ \mathbf{K}^{(2)}=\mathrm{diag}(k_{2,1}^{(\mathrm{N2})},k_{3,2}^{(\mathrm{N2})},...,k_{n+1,n}^{(\mathrm{N2})});$$

$$\mathbf{X}_1=(x_1-x_0,x_2-x_1,...,x_k-x_{k-1},...,x_n-x_{n-1})^{\mathrm{T}};\ \mathbf{X}_2=(x_2-x_1,x_3-x_2,...,x_{k+1}-x_k,...,x_{n+1}-x_n)^{\mathrm{T}};$$

$$\mathbf{V}_1=(v_1-v_0,v_2-v_1,...,v_k-v_{k-1},...,v_n-v_{n-1})^{\mathrm{T}};\ \mathbf{V}_2=(v_2-v_1,v_3-v_2,...,v_{k+1}-v_k,...,v_{n+1}-v_n)^{\mathrm{T}};$$

$$\mathbf{F_T}=(F_{\mathrm{T},1},F_{\mathrm{T},2},...,F_{\mathrm{T},n})^{\mathrm{T}},\qquad(18)$$

причому $(k_{1,0}^{(C)},k_{n+1,n}^{(C)},k_{1,0}^{(N2)},k_{n+1,n}^{(N2)},x_0,x_{n+1},v_0,v_{n+1})\equiv 0$.

Рівняння (17) за умови (18) описує поздовжньо-поступальні коливні процеси в багатомасових системах із зосередженими параметрами.

Висновки. Рівняння руху інерційних ланок із зосередженими параметрами доцільно одержувати на підставі інтегрального варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського з урахуванням модифікованого лагранжіана [4]. Такий підхід дає змогу звести одержання рівнянь Лагранжа другого роду для механічних та електромагнітних систем воєдино.

1. Уайт Д., Вудсон Г. Электромеханическое преобразование энергии. – М.;Л.: Энергия, 1964. – 528 с. 2. Булгаков М., Головач І.В., Черниш О.М. Моделювання і аналіз вібраційного процесу викопування коренеплодів буряка // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні. – 2006.– №40. – С. 39 – 48. 3. Мышкис А.Д. Математика (специальные курсы). – М.: Наука, 1971. – 632 с. 4. Чабан А. Матемтаичне моделювання коливних процесів в електромеханічних системах – Львів: Вид-во Тараса Сороки, 2007. – 312 с. 5. Харченко Е.В. Динамические процессы буровых установок. – Львов: Свит, 1991. – 176 с.