УДК 621.9.048.6

В.Г. ТОПІЛЬНИЦЬКИЙ, Я.М. КУСИЙ

Національний університет “Львівська політехніка”,
вул. Ст. Бандери 12, м. Львів, 79013

ДОСЛІДЖЕННЯ ЧИННИКА АДЕКВАТНОСТІ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ОПИСУ ДИНАМІКИ НЕЛІНІЙНОЇ ОБРОБЛЮВАЛЬНОЇ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

Оцінено адекватність математичної моделі нелінійної оброблювальної вібраційної системи з дебалансним приводом та пружинною підвіскою. Модель подана у вигляді сукупності нелінійних диференціальних рівнянь, що зведені до стандартизованого вигляду. Оцінка аналітичних розв’язків цієї системи підтвердила їхню стійкість на всьому часовому інтервалі.

In the article the estimation of adequacy of mathematical model of the nonlinear processing oscillation system is conducted with an occasion and spring pendant. A model is presented as an aggregate of nonlinear differential equalizations which are erected to the standardized kind. The estimation of analytical decisions of this system confirmed their firmness on all of sentinel interval.

Актуальність тематики досліджень. Синтез методик комп’ютерного проектування різноманітних оброблювальних механічних систем, зокрема вібраційного обладнання, вимагає ґрунтовного математичного опису динамічних процесів, які відбуваються у них під час оброблення виробів. Дослідити комплексний вплив параметрів оброблювальної механічної системи на інтенсивність її функціонування (оброблення виробів) можна, доволі успішно, за допомогою побудови математичних моделей опису динаміки механічних систем, та використовувати їх на етапах конструювання системи та під час її експлуатації. Складність конструкцій оброблювальних механічних систем, різноманітність припущень та спрощень у математичному апараті, що використовується під час їх опису, потреби автоматизації етапів конструювання, виготовлення та експлуатації систем обумовлюють актуальність цього завдання і сьогодні.

Вибір предмету дослідження. Важливими чинниками використання математичних моделей опису динаміки оброблювальних механічних систем є їхня уніфікація та адекватність. Перший чинник забезпечується параметризацією математичних моделей і дає можливість їх використання для широкого класу оброблювальних механічних систем, другий дозволяє використовувати математичну модель для відображення динаміки механічної системи в будь-який або впродовж будь-якого часового моменту її функціонування (виконанням нею певного технологічного процесу). Притаманність побудованій математичній моделі цих двох чинників забезпечує її актуальність та доцільність застосування.

Проілюструємо на прикладі конкретної математичної моделі нелінійної оброблювальної механічної системи забезпечення необхідної величини чинника адекватності моделі реальному фізичному процесу, який вона відображає. Для цього розглянемо математичну модель нелінійної оброблювальної вібраційної системи з дебалансним приводом та пружинною підвіскою [1].

Постановка задач дослідження. Математична модель нелінійної оброблювальної вібраційної системи з дебалансним приводом та пружинною підвіскою являє собою систему низки нелінійних диференціальних рівнянь. складену на основі рівняння Лагранжа II-го роду. Як узагальнені координати прийнято координати центра мас системи x_c та y_c та кут повороту φ системи щодо нерухомої системи координат у вертикальній площині (площині обертання дебалансів). Окрім цього в систему рівнянь, для забезпечення чинника уніфікації, в параметричному вигляді входять геометричні та кінематичні параметри досліджуваної нелінійної вібраційної оброблювальної системи – геометричні показники робочого органа системи, геометрія кріплення підвіски та дебалансів, кутові швидкості обертання дебалансів, масові показники системи. Завдання досліджень полягає в тому, щоб довести, що ця система нелінійних диференціальних рівнянь має необмежені за часом аналітичні розв'язки, тобто відображатиме досліджуваний технологічний процес на всьому часовому інтервалі його виконання.

Дослідження розв'язків системи нелінійних диференціальних рівнянь опису динаміки вібраційної оброблювальної системи на стійкість в часовому аспекті. Для зручності досліджень зведемо систему нелінійних диференціальних рівнянь – математичну модель нелінійної оброблювальної вібраційної системи з дебалансним приводом та пружинною підвіскою – до такого вигляду, щоб у лівій частині системи залишалась лише сума другої похідної узагальненої координати і добутку цієї координати на деякий коефіцієнт, а інші доданки переносимо в праву частину рівняння. Отже, рівняння зводиться до системи збурених (з математичного погляду в них присутня змінна за часом функція в правій частині, з фізичного – наявність зовнішньої періодичної збурюючої сили (або кількох сил), що приводить систему в рух – сила приводу вібраційної системи) нелінійних диференціальних рівнянь, яка і буде математичною моделлю руху контейнера вібромашини (1):

$$\begin{cases} \ddot{x}_c + \omega^2 x_c = \varepsilon f_x(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, \omega_1 t + \alpha_0, \omega_2 t + \psi_0); \\ \ddot{y}_c + \omega^2 y_c = \varepsilon f_y(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, \omega_1 t + \alpha_0, \omega_2 t + \psi_0); \\ \ddot{\varphi} + \omega_\varphi^2(t)\varphi = \varepsilon' f_\varphi(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{x}_c, \ddot{y}_c), \end{cases} \tag{1}$$

де $\varepsilon = \dfrac{1}{M}$, $\varepsilon' \approx \varepsilon$ (ці величини є значно менші за одиницю, тому їх можна вважати малими параметрами), M – рухома маса механічної системи, c – жорсткість підвіски, $\omega_{1,2}$ – кутові швидкості обертання дебалансів приводу, $\omega = \sqrt{\dfrac{c}{M}}$ – власна частота робочого органу системи, $\omega_\varphi(t)$ – "частота" кругових коливань робочого органа системи із врахуванням дебалансів (значення і зміст цієї функції буде визначено нижче).

Ліва частина третього рівняння системи (1) по узагальненій координаті φ має такий повний вигляд:

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{1}{V} + \frac{4M_Д rl}{V^2} \cos\frac{(\omega_1+\omega_2)t+\alpha_0+\psi_0}{2} \left(\sin\frac{(\omega_1-\omega_2)t+\alpha_0-\psi_0}{2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \cos\frac{(\omega_1-\omega_2)t+\alpha_0-\psi_0}{2} \right)\right) F\varphi == \varepsilon' f_\varphi(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{x}_c, \ddot{y}_c), \tag{2}$$

де $M_Д = \dfrac{M_{Д1}+M_{Д2}}{2}$ – сумарна маса приводних дебалансів, $l = \dfrac{l_1+l_2}{2}$, $k = \dfrac{k_1+k_2}{2}$ – геометричні параметри системи, $V = M_K S^2 + I + M_{Д1}\left(r_1^2 + l_1^2 + k_1^2\right) + M_{Д2}\left(r_2^2 + l_2^2 + k_2^2\right)$ – комплексний показник геометричних та кінематичних параметрів досліджуваної системи.

Зробимо в (2) таку заміну змінних:

$$\omega_0^2 = \frac{F}{M_K S^2 + I + M_Д\left(r^2 + l^2 + k^2\right)} =$$

$$= \frac{-C_1\left(b^2 + af\right) - C_2\left(q^2 + af\right) + g\left(M_k S - M_{Д1}k_1 - M_{Д2}k_2\right)}{M_K S^2 + I + M_Д\left(r^2 + l^2 + k^2\right)},$$

$$B = \frac{4M_Д r}{M_K S^2 + I + M_Д\left(r^2 + l^2 + k^2\right)},$$

$$f'(t) = \cos\frac{(\omega_1 + \omega_2)t + \alpha_0 + \psi_0}{2}\left(\sin\frac{(\omega_1 - \omega_2)t + \alpha_0 - \psi_0}{2} + \cos\frac{(\omega_1 - \omega_2)t + \alpha_0 - \psi_0}{2}\right).$$

Тоді нелінійне диференціальне рівняння (2) для знаходження узагальненої координати φ набуде вигляду

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\left(1 - Bf'(t)\right)\varphi = \varepsilon' f_\varphi(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{x}_c, \ddot{y}_c), \text{ або } \ddot{\varphi} + \omega_\varphi^2(t)\varphi = \varepsilon' f_\varphi(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{x}_c, \ddot{y}_c), \quad (3)$$

де $\omega_\varphi^2(t) = \omega_0^2\left(1 - Bf'(t)\right)$ – "частота" кругових коливань контейнера із врахуванням дебалансів (див. систему (1)).

Функція $\omega_\varphi^2(t)$ містить коефіцієнти ω_0^2 і B, які залежать від геометричних параметрів нелінійної оброблювальної вібраційної системи, а отже. вона є також функцією цих параметрів, а $f'(t)$ – періодична змінна функція, яка залежить від часу, кутових швидкостей обертання дебалансів ω_1, ω_2, їх початкових фаз α_0 і ψ_0, а тому зображує кінематичні параметри приводу. Отже, $Bf'(t)$ – це інтегрований параметр, що об'єднує геометричний B і кінематичний $f'(t)$ параметри системи.

Згідно з загальною теорією збурень [2] для системи нелінійних диференціальних рівнянь (1) з малим параметром розглянемо так звану незбурену систему ($\varepsilon = 0$, $\varepsilon' = 0$), яка відповідає (1) з врахуванням (3):

$$\ddot{x}_{o3} + \omega^2 x_{o3} = 0, \quad (4а)$$

$$\ddot{y}_{o3} + \omega^2 y_{o3} = 0, \quad (4б)$$

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\left(1 - Bf'(t)\right)\cdot\varphi = 0. \quad (4в)$$

Розв'язки рівнянь (4а) і (4б) матимуть вигляд

$$x_{o3} = x_0 \sin(\omega t + \alpha_x),$$

$$y_{o3} = y_0 \sin(\omega t + \alpha_y),$$

де $x_0, y_0, \alpha_x, \alpha_y$ – сталі, які визначаються початковим станом системи.

Ці розв'язки описують незбурену систему. З фізичного погляду це означає, що вібраційній системі надали миттєвого зовнішнього збурення (увімкнули приводні електродвигуни дебалансів), вона почала здійснювати коливні рухи – власні коливання (за умови відсутності тертя в системі).

Права частина рівняння (3) показує вплив зовнішнього збурення (приводної сили двигуна) на зміну узагальненої координати φ. Необхідно, для підтвердження адекватності побудованої моделі, розглянути стійкість розв'язків системи (1) за узагальненими координатами x_{o3}, y_{o3} та φ.

Ці розв'язки повинні відповідати експлуатаційним вимогам системи на часовому інтервалі оброблення. Розглядаючи рівняння системи (4), зокрема (4а) та (4б), по узагальнених координатах x_{o3}, та y_{o3}, які зведені до рівнянь опису власних коливань нелінійної вібраційної системи стандартного виду, можна упевнено відзначити, що вони мають обмежені розв'язки на всьому часовому інтервалі. Щодо рівняння (4в), по узагальненій координаті φ (куту повороту системи під час її руху), то робити висновки про існування його обмежених розв‘язків в будь-який момент часу оброблення виробів за довільних значень кінематичних і конструкційних параметрів буде доволі складно. Рівняння містить при другому доданку – узагальненій координаті, комплексний множник, до якого входять як кінематичні, так і конструктивні параметри системи (інтегрований параметр $Bf'(t)$, та коефіцієнт ω_0^2). На відміну від множника при відповідних узагальнених координатах у вигляді квадрата частоти власних коливань у рівняннях (4а, 4б) – це стала величина, коефіцієнт $\omega_0^2(1-Bf'(t))$ є змінною у часі функцією. Він деякою мірою впливає на стійкість розв‘язку відповідного диференціального рівняння, а значить і опису самого динамічного процесу. У зв‘язку з тим, що під час дослідження роботи досліджуваної системи буде необхідність у зміні параметрів математичної моделі, то комплексний множник у рівнянні (4в) при φ змінюватиметься, що цілком ймовірно може призвести до зміни форми розв‘язків на різних відрізках часового інтервалу, а навіть і до втрати стійкості опису процесу, що є, взагалі кажучи, явищем небажаним. Тому диференціальне рівняння (4в), було приведено до такого вигляду, визначення стійкості якого не становитиме значних труднощів, зокрема, в цьому випадку, до вигляду рівняння типу Мат’є [3].

Загалом рівняння такого типу (стандартний запис диференціального рівняння другого роду з періодичними коефіцієнтами) мають вигляд [3]:

$$\frac{d^2y}{dz^2}+[a-2q\varphi(z)]y=0\,, \tag{5}$$

де y – залежна змінна, z – незалежна змінна, коефіцієнти a і q сталі, а $\varphi(z)$ – обмежена періодична функція, межі зміни якої істотно впливають на стійкість розв‘язку.

Рівняння (5) подамо так:

$$\frac{d^2y}{dz^2}+a\left[1-2\frac{q}{a}\varphi(z)\right]y=0\,, \tag{5а}$$

що повністю еквівалентне рівнянню (4в).

Одним з найважливіших властивостей розв‘язків цього типу рівнянь є їхня стійкість: за деякого співвідношення параметрів a і q змінна y приймає обмежені значення, що свідчить про стійкі розв‘язки на цьому інтервалі зміни аргументу, інакше змінна набуває необмежених значень – розв‘язки будуть нестійкими (відсутніми). Співвідношення між a, q, $\varphi(z)$ що зумовлюють стійкі чи нестійкі розв‘язки, мають істотне значення під час практичного використання і можуть бути визначені на основі [3].

З рівняння (5а) видно, що $q=0$ (коефіцієнти рівняння постійні), і за додатного a воно відповідає простим гармонічним коливанням. Його розв‘язок буде сумою синусоїдальної та косинусоїдальної складових, які періодично змінюються, але залишаються обмеженими. Розв‘язок залишається стійким. Якщо, $q\neq 0$ і задовольняє умову $|2q|<a$ (або $\left|\frac{2q}{a}\right|<1$), то множник при y в рівнянні (5а) пульсує, залишаючись весь час додатним. У такому разі можна стверджувати, що розв‘язки будуть, в деякому розумінні, схожі на кругові тригонометричні функції. На рис. 1 показана площина зміни параметрів a і q, та вказано зони стійкості розв‘язків. Значення a і q, що розміщені в середині кута, обмеженого прямими $+2q=a>0$ і $-2q=a>0$, припустимо відповідають по суті стійким розв‘язкам.

Отже, рівняння (4в) матиме стійкі розв‘язки при $(\max Bf'(t)<1)$ і нестійкі при $(\max Bf'(t)\geq 1)$ розв’язки. Якщо проаналізувати вирази для знаходження $Bf'(t)$, ω_0^2, межі реальної зміни кінематичних і геометричних параметрів вібраційної системи. закладених в математичну модель та співвідношення цих параметрів, то можна стверджувати, що геометричний B і кінематичний $f(t)$ параметри менші за одиницю. Причому $B << 1$. Тому існує оцінка $|Bf'(t)| < 1$. Отже, параметри системи задовольняють умову стійкості процесу. Розв'язки (4в) за вказаних умов існують на всьому визначеному інтервалі часу, тобто рівняння (4в) описуватиме коливний процес вібраційної системи з двома незалежно привідними дебалансними віброзбудниками на як завгодно великому часовому інтервалі. На рис. 2 зображено, як приклад, залежність $Bf'(t)$ від часу t і кутової швидкості першого дебалансу ω_1. Як видно з рис. 2, максимальне значення інтегрованого параметра $Bf'(t)$ становить всього 0,003, що набагато менше за одиницю. Отже, розв'язок (4в) буде стійким, а сама побудована математична модель – адекватною.

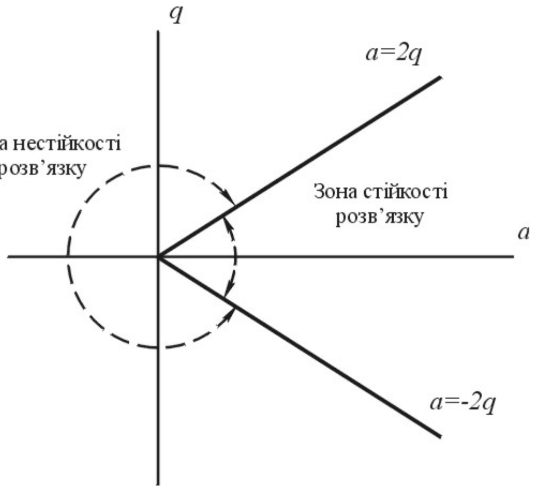

Рис. 1. Загальна схема стійкості розв'язків рівняння Мат'є

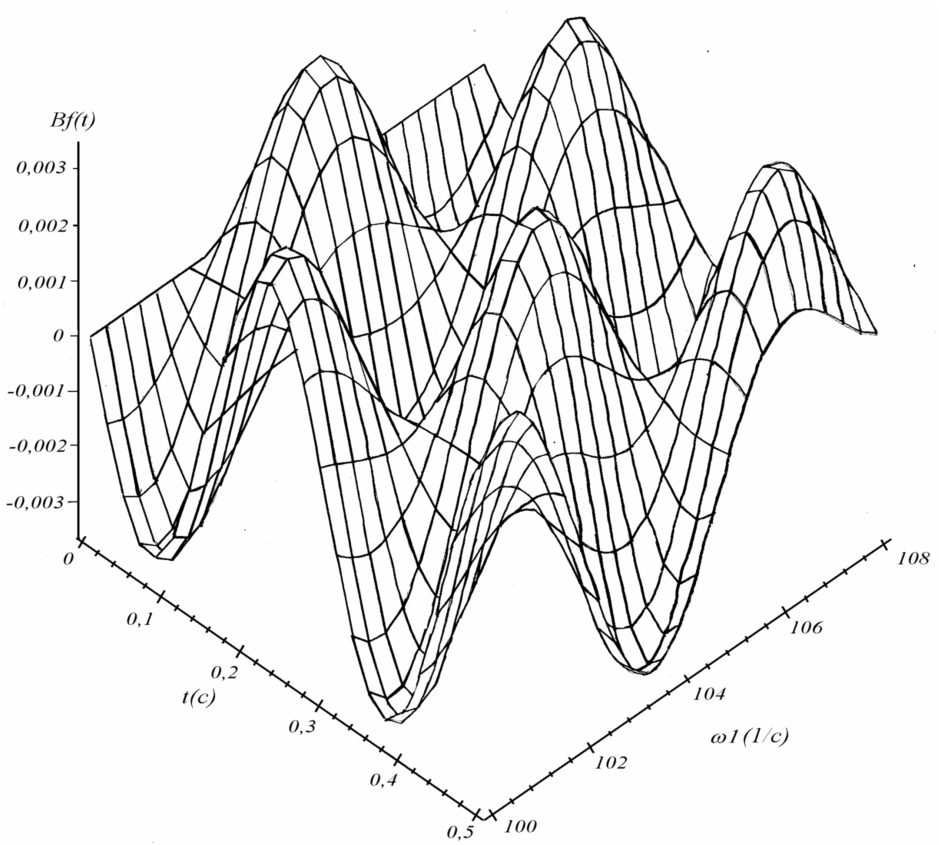

Рис. 2. Графік функції $Bf'(t)$ від часу t і кутової швидкості ω_1

Висновки. Резюмуючи наведені вище викладення, необхідно наголосити, що адекватність математичної моделі нелінійної оброблювальної вібраційної системи з дебалансним приводом та пружинною підвіскою підтвердилась – її можна застосовувати для відображення динаміки нелінійної оброблювальної механічної системи впродовж усього часового інтервалу її функціонування. Модель подана у вигляді сукупності нелінійних диференціальних рівнянь, що зведені до стандартизованого вигляду. Виконана оцінка аналітичних розв‘язків цієї системи підтвердила їхню стійкість на всьому часовому інтервалі, а відповідно і адекватність самої побудованої моделі. Цей підхід можна застосовувати під час дослідження широкого класу нелінійних оброблювальних механічних систем.

1. Stotsko Z.A., Sokil B.I., Topilnytskiy V.H. Intensification of processes of strengtening machine parts by volumetric vibration treatment, III International Conference Transport Systems Telematics TST'03, 13-15 November 2003, Katowice – Ustron, Poland, s. 73, 493–504. 2. Митропольский Ю.А. Нелинейная механика. Одночастотные колебания. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 1997. – 385 с. 3. Каннингхэм В. Введение в теорию нелинейных систем. – Л.: ГОСЭНЕРГОИЗДАТ, 1962. – 456 с.

УДК 622.242:534-16

Є.В. ХАРЧЕНКО, А.В. ГУТИЙ, Я.В. ГРЕНЬ*

Національний університет "Львівська політехніка",
79013, м. Львів, вул. С. Бандери, 12
кафедра опору матеріалів,
*кафедра автоматизації теплових та хімічних процесів

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ ВИВІЛЬНЕННЯ ПРИХОПЛЕНОЇ КОЛОНИ ТРУБ

Досліджено динамічні процеси, що відбуваються під час вивільнення прихопленої колони труб, на експериментальній установці. Описано конструкцію і принцип роботи цієї установки. Наведені результати експериментальних досліджень динаміки вивільнення прихопленої колони труб.

Explored dynamic processes which take place during freeing of the grabbed column of pipes, on the experimental setting. A construction and principle of work of this setting is described. The results of experimental researches of dynamics of freeing of the grabbed column of pipes are resulted.

Постановка проблеми і аналіз останніх досліджень. Буріння свердловин є важливим процесом у нафтогазовій промисловості. Цей процес виконують за допомогою бурових комплексів. Їх проектують із забезпеченням високої уніфікації вузлів та агрегатів, створюючи сприятливі умови для добору раціональних параметрів бурових установок, їх транспортування, монтажу, обслуговування і ремонту. Обґрунтування технічних характеристик агрегатів і несівних конструкцій бурових установок необхідно здійснювати на основі детального вивчення не тільки експлуатаційних, а й аварійних режимів роботи машин.