УДК 534.111

Б.І. СОКІЛ, Х.І. ЛІЩИНСЬКА*

Національний університет "Львівська політехніка"
кафедра теоретичної механіки
* кафедра опору матеріалів

ВПЛИВ ПОЗДОВЖНЬОЇ ШВИДКОСТІ РУХУ НА ПОПЕРЕЧНІ КОЛИВАННЯ В ДВОВИМІРНИХ СИЛЬНО НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ

Розроблено методику дослідження одночастотних коливань сильно нелінійних двовимірних систем, які характеризуються поздовжнім рухом. Отримано систему звичайних диференціальних рівнянь, яка визначає закони зміни амплітуди і частоти коливань.

It is developed a technique of research of single-frequency oscillations of strongly nonlinear two-dimensional systems, which are characterized by a longitudinal motion. It is obtained a system of the differential equations which defines the law of a modification of amplitude and an oscillation frequency.

Актуальність і постановка проблеми. Важливою проблемою прикладних завдань механіки є питання дослідження впливу швидкості руху (сталої чи змінної) середовища та ФМХ на його коливний процес. Такого типу задачі спостерігаються під час дослідження динаміки різного роду трубопроводів, по яких протікає рідина, установок для буріння нафтових і газових свердловин, стрічок транспортерів, канатів підвісних доріг, сипких середовищ тощо. У той час, коли на базі моделей середовищ з найпростішими лінійно-пружними характеристиками розв'язано низку таких прикладних задач [1, 2], то проблема значно ускладнюється тоді, коли характеристики середовища мають чітко виражений нелінійно-пружний характер. Для таких моделей описання коливань і аналітичне дослідження впливу тих чи інших параметрів здійснено лише в окремих випадках за допомогою періодичних Ateb-функцій [3, 4].

Саме такі актуальні з теоретичного і практичного погляду задачі є предметом розгляду статті. У ній досліджуються коливання в двовимірних системах із розподіленими параметрами, що рухаються вздовж осі, з пружними характеристиками, які можна апроксимувати близькою до степеневої залежністю.

Методика дослідження двовимірних нелінійно-пружних систем. Диференціальне рівняння динамічного процесу такої системи можна подати у вигляді [5]

$$u_{tt} - \alpha^2 \left(u_x\right)^{\nu} u_{xx} - \beta^2 \left(u_y\right)^{\nu} u_{yy} = \varepsilon f\left(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_y, u_{yy}\right) - 2Vu_{xt} - V^2 u_{xx} - u_x \dot{V}, \qquad (1)$$

де $u(t, x, y)$ – відхилення перерізу середовища з координатами x, y в момент часу t; V – швидкість його руху вздовж осі OX; α, β, ν – сталі, причому $\nu + 1 = \frac{2n+1}{2r+1}$ $(r, n = 0, 1, 2, ...)$; ε – малий параметр; $f(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_y, u_{yy})$ – відома аналітична функція, що характеризує різної природи сили опору; дисипативні сили і інші сили, що існують у системі, та відхилення нелінійно пружних характеристик системи від степеневого закону. Параметр ε вказує на мале значення перерахованих вище сил порівняно із максимальним значенням відновлювальної сили ($\max \alpha^2 \left(u_x\right)^{\nu} u_{xx} >> \max \varepsilon f\left(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_y, u_{yy}\right)$, і $\max \beta^2 \left(u_y\right)^{\nu} u_{yy} >> \max \varepsilon f\left(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_y, u_{yy}\right)$).

Для побудови розв'язку рівняння (1) використаємо метод збурень [6, 7]. Відповідно до нього розглянемо спочатку незбурене ($\varepsilon = 0$) рівняння (1), а саме:

$$u_{tt} - \alpha^2 \left(u_x\right)^{\nu} u_{xx} - \beta^2 \left(u_y\right)^{\nu} u_{yy} = 0 . \tag{2}$$

Для побудови розв'язку рівняння (2) можна використати метод відокремлення змінних [8] $u(t, x, y) = T(t)W(x, y)$, відповідно до якого функція $u(t, x, y)$ має вигляд [5]

$$u(t,x,y) = a_k \begin{Bmatrix} ca\left(\nu+1, 1, \omega_{km}(a)t + \varphi_k\right), \\ sa\left(\nu+1, 1, \omega_{km}(a)t + \varphi_k\right) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} ca\left(1, \dfrac{1}{\nu+1}, \Pi\left(1, \dfrac{1}{\nu+1}\right)\left(\dfrac{k}{b}x + \dfrac{m}{c}y\right)\right), \\ sa\left(1, \dfrac{1}{\nu+1}, \Pi\left(1, \dfrac{1}{\nu+1}\right)\left(\dfrac{k}{b}x + \dfrac{m}{c}y\right)\right) \end{Bmatrix}, \tag{3}$$

де a і φ – сталі, а $\omega_{km}(a)$ визначається співвідношенням

$$\omega_{km}(a) = \sqrt{\frac{\alpha^2 (kc)^{\nu+2} + \beta^2 (mb)^{\nu+2}}{(kc)^{\nu+2}} \left(\frac{k}{b}\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)\right)^{\nu+2}} a^{\frac{\nu}{2}} , \tag{4}$$

де $k, m = 1, 2, ...$; b, c – відповідно ширина і довжина, $\Pi\left(1, \dfrac{1}{\nu+1}\right) = \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu+1}{\nu+2}\right)\Gamma^{-1}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\nu+1}{\nu+2}\right)$ – півперіод Ateb-функцій, які описують форму хвилі у середовищі.

Нижче, для простоти, за розв'язок незбуреної моделі рівняння (1) приймемо співвідношення

$$u(t,x,y) = aca\left(\nu+1, 1, \omega_k(a)t + \varphi\right) \cdot sa\left(1, \frac{1}{\nu+1}, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)(x + \delta y)\right). \tag{5}$$

Це співвідношення відповідно до методу Ван-дер-Поля можна вважати і розв'язком збуреного рівняння, тільки для останнього випадку параметри a і φ будуть вже змінними (функціями часу).

Примітки: 1) вказане вище справедливе для так званих коротких систем, тобто систем, для яких довжина основної хвилі є співрозмірною із геометричними розмірами середовища; 2) надалі розглядатимемо тільки випадок малої сталої швидкості руху середовища вздовж осі OX, тобто $\dfrac{dV}{dt} = 0$.

З врахуванням наведеного маємо

$$\begin{aligned} u_t(x,y) = \dot{a}ca(\nu+1, 1, \psi) \cdot sa\left(1, \frac{1}{\nu+1}, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)(x+\delta y)\right) - \\ - \frac{2a}{\nu+2}\left(\omega(a) + \dot{\varphi}\right) \cdot sa(1, \nu+1, \psi) \cdot sa\left(1, \frac{1}{\nu+1}, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)(x+\delta y)\right), \end{aligned} \tag{6}$$

де $\psi = \omega(a)t + \varphi$.

Беручи до уваги, що для випадку незбуреного рівняння

$$u_t(x,y) = -\frac{2a}{\nu+2}\omega(a) \cdot sa(1, \nu+1, \psi) \cdot sa\left(1, \frac{1}{\nu+1}, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)(x+\delta y)\right) \tag{7}$$

відповідно до методу Ван-дер-Поля, із (6) і (7) отримуємо перше диференціальне рівняння, яке зв'язує невідомі змінні $\dot{a}(t)$ і $\dot{\varphi}(t)$

$$\begin{aligned} \dot{a}ca(\nu+1, 1, \psi) \cdot sa\left(1, \frac{1}{\nu+1}, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)(x+\delta y)\right) - \\ - \frac{2a}{\nu+2}\dot{\varphi}(a) \cdot sa(1, \nu+1, \psi) \cdot sa\left(1, \frac{1}{\nu+1}, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)(x+\delta y)\right) = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Наступним диференціюванням (7) отримуємо

$$u_{tt} = -\frac{2}{\nu+2} sa\left(1, \frac{1}{\nu+1}, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)(x+\delta y)\right)\times$$
$$\times\left\{\dot{a}\left(\omega + a\frac{d\omega}{da}\right) sa(1, \nu+1, \psi) - a\omega(a)\left(\omega(a)+\dot{\varphi}\right)\cdot ca^{\nu+1}(\nu+1, 1, \psi)\right\}. \tag{9}$$

Підставляючи (5) в (1), з врахуванням того, що

$$u_x = k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right) aca^{\frac{1}{\nu+1}}\left(\frac{1}{\nu+1}, 1, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)(x+\delta y)\right) ca(\nu+1, 1, \psi),$$
$$u_{xx} = -k^2\Pi^2\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right) a\frac{1}{\nu+1} ca^{\frac{-\nu}{\nu+1}}\left(\frac{1}{\nu+1}, 1, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)(x+\delta y)\right)\times$$
$$\times sa\left(1, \frac{1}{\nu+1}, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)(x+\delta y)\right) ca(\nu+1, 1, \psi),$$
$$u_y = k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)\delta aca^{\frac{1}{\nu+1}}\left(\frac{1}{\nu+1}, 1, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)(x+\delta y)\right) ca(\nu+1, 1, \psi), \tag{10}$$
$$u_{yy} = -k^2\Pi^2\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)\delta^2 a\frac{1}{\nu+1} ca^{-\frac{\nu}{\nu+1}}\left(\frac{1}{\nu+1}, 1, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)(x+\delta y)\right)\times$$
$$\times sa\left(1, \frac{1}{\nu+1}, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)(x+\delta y)\right) ca(\nu+1, 1, \psi),$$

отримуємо друге диференціальне рівняння, яке зв'язує невідомі параметри $\dot{a}$ і $\dot{\varphi}$ вигляду

$$\left\{\dot{a}\frac{\nu+2}{2}\omega(a) sa(1, \nu+1, \psi) + \dot{\varphi} a\omega ca^{\nu+1}(\nu+1, 1, \psi)\right\}$$
$$sa\left(\frac{1}{\nu+1}, 1, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)(x+\delta y)\right) = -\frac{\nu+2}{2} f^*(a, \psi, x, y), \tag{11}$$

де $f^*(a, \psi, x, y)$ відповідає значенню функції $f(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_y, u_{yy}) - V^2 u_{xx}$ за умови, що u і її похідні визначаються відповідно до формул (5), (7), (10).

Система диференціальних рівнянь (8), (11) визначає закони зміни $a(t)$ і $\varphi(t)$ у вигляді

$$\dot{a} = \frac{-\int_0^{2\pi}\int_0^b\int_0^c f^*(a, \psi, x, y) sa(1, \nu+1, \psi)\cdot sa\left(\frac{1}{\nu+1}, 1, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)(x+\delta y)\right) d\psi dx dy}{a\omega\int_0^b\int_0^c sa^2\left(\frac{1}{\nu+1}, 1, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)(x+\delta y)\right) dx dy}, \tag{12}$$
$$\dot{\varphi} = -\frac{\nu+2}{2}\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^b\int_0^c f^*(a, \psi, x, y) ca(1, \nu+1, \psi)\cdot sa\left(\frac{1}{\nu+1}, 1, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)(x+\delta y)\right) d\psi dx dy}{\omega\int_0^b\int_0^c sa^2\left(\frac{1}{\nu+1}, 1, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)(x+\delta y)\right) dx dy}.$$

Як окремий приклад дослідимо лише вплив швидкості руху середовища на характер зміни його АФХ, тобто розглянемо випадок

$$f(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_y, u_{yy}) = 0.$$

Тоді із (12) випливає

$$\dot{a} = 0 \tag{13}$$

$$\psi = \omega(a) - \frac{s^2 V^2}{\omega(a)},$$

де s^2 – стала і визначається співвідношенням

$$s^2 = \frac{kc}{\Pi^2\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right) \cdot mb} \frac{\nu+2}{\nu+1} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\nu+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{\nu+2}\right)} \right]^2 .$$

Нижче на рис. 1 зображено закон зміни частоти коливань ($\Omega = \omega(a) - \frac{s^2 V^2}{\omega(a)}$) від амплітуди і швидкості, на рис. 2 – закон зміни частоти коливань від швидкості і параметра ν, а на рис. 3 – закони зміни частоти коливань від швидкості.

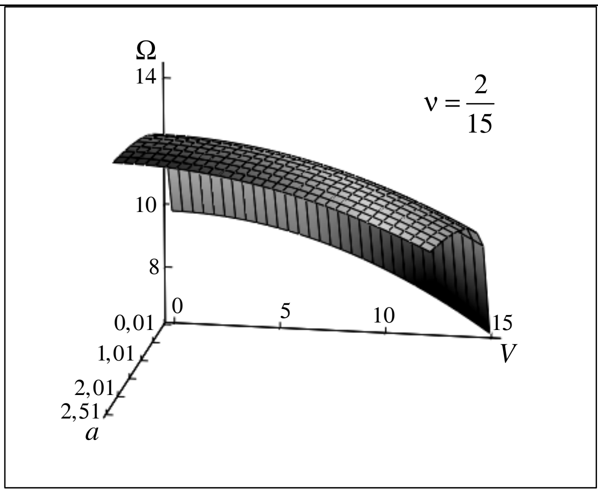

Рис. 1. Закон зміни частоти коливань від амплітуди швидкості

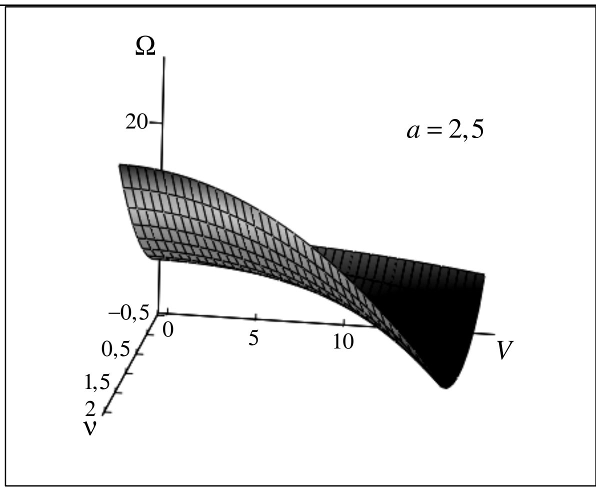

Рис. 2. Закон зміни частоти коливань від швидкості і параметра ν

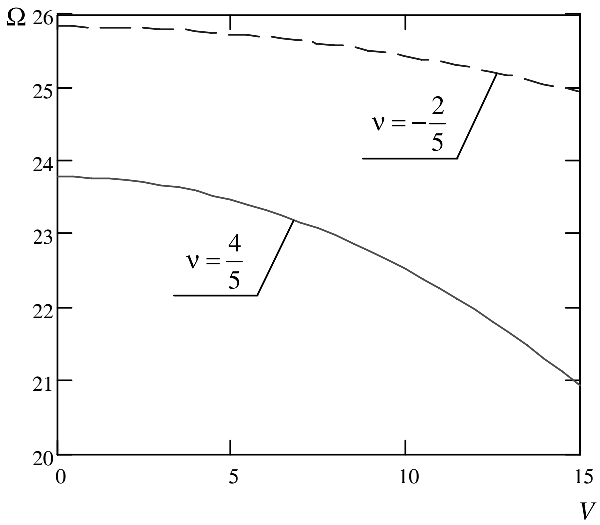

Рис. 3. Закон зміни частоти коливань від швидкості

Висновки. На основі отриманих результатів можна зробити такі висновки:

1) амплітудно-частотна характеристика динамічних процесів двовимірних сильно нелінійних систем, які характеризуються поздовжнім рухом, визначається не лише фізико-механічними характеристиками і геометричними параметрами середовища, але і швидкістю його руху, причому зі зростанням швидкості частота коливань (за інших незмінних параметрів) спадає;

2) швидкість спадання частоти коливань більша для:

а) жорсткіших систем (більшого значення параметра ν);

б) більших значень амплітуди.

Потрібно зауважити, граничним переходом при $\nu \to 0$ отримуються результати, які стосуються коливань квазілінійних рухомих двовимірних середовищ, а при $V \to 0$ – коливань сильно нелінійних двовимірних середовищ, які не характеризуються поздовжнім рухом.

1. Сліпчук А.М. Нелінійні поперечні коливання пружного рухомого канату і методи їх дослідження. Науковий вісник / Збірн. наук.-техн. пр. "Лісове господарство, лісова, паперова і деревообробна промисловість". Вип. 28. – Львів: УкрДЛТУ, 2003. – С. 89–94. 2. Сліпчук А.М., Кузьо І.В., Сокіл Б.І. Резонансні явища у рухомих одновимірних нелінійно пружних системах і асимптотичні методи у їх дослідженні // Вібрації в техніці і технологіях. – 2005. – № 1 (43). – С. 105–107. 3. Сеник П.М. Про Ateb-функції // Доп. АН УРСР. – 1968. – №1. – С. 23–26. 4. Сеник П.М. Обернення неповної Beta-функції // Укр. мат. журн. – 1969. – 21, № 3. – С. 325–333. 5. Сокіл Б.І., Ліщинська Х.І. Динамічні процеси в сильно нелінійних двовимірних системах і Ateb-функції у їх дослідженні. Науковий вісник: Збірн. наук.-технічних пр. – Львів: НЛТУУ. – Вип. 17.5. – С. 213–216. 6. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. – М.: Мир, 1972. – 272 с. 7. Найфэ А.Х. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 456 с. 8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука. 1977. – 736 с.