bending // Int. J. of Materials and Product Technology. – 2006. – Vol. 25, No. 4. – P. 297–312. 22.Shao Hui Zhang, Hua Ling Chen, Xiao Peng Wang Numerical parametric investigation of loss factor of laminated composites with interleaved viscoelastic layers // Int. J. of Vehicle Noise and Vibration. – 2006. – Vol. 2, No. 1. – P. 62–74. 23. Kyriazoglou C., Guild F. J. Finite element prediction of damping of composite GFRP and CFRP laminates – a hybrid formulation – vibration damping experiments and Raleigh damping // Composites Science and Technology. – 2006. –Vol. 66. – P. 487–498. 24. Rao M. K., Desai Y. M. Analytical solutions for vibrations of laminated and sandwich plates using mixed theory // Composite Structures. – 2004. – Vol. 63. – P. 361–373 25. Oden I. T., Reddy I. N. Variational Methods in Theoretical Mechanics. – Springer Verlag. 1976. – 302 p. 26. Crocker M. J. Encyclopedia of Acoustics. – Vol. II, John Wiley & Sons, Inc., 1997. 27. Diveyev B., Stotsko Z., V. Topilnyckyj V. Dynamic properties identification for laminated plates // Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering. – 2007. – Vol. 20, ISSUES 1-2. – P. 237–230. 28. Diveyev B., Crocker M. J. Dynamic Properties and Damping Prediction for Laminated Plates // Proceeding of International Conference on Noise and Vibration Engineering (ISMA-2006), September 18–20, 2006 Katholieke Universiteit Leuven, Belgium. – 2006. – P. 1021–1028.

УДК 621.3.08

В.С. ЛОВЕЙКІН, Ю.В. ЧОВНЮК, М.Г. ДІКТЕРУК

Київський національний університет будівництва і архітектури

ВДОСКОНАЛЕННЯ ЕЛЕМЕНТІВ АВТОМАТИЗОВАНОГО ЕЛЕКТРОПРИВОДА ЗАСОБІВ МІКРОРОБОТОТЕХНІКИ ТА НАНОТЕХНОЛОГІЧНИХ ЛІНІЙ ВИРОБНИЦТВА: АНАЛІЗ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ КРОКОВИХ ДВИГУНІВ

Розглянуто можливі способи вдосконалення та уточнення інженерних методів розрахунку автоматизованих електроприводів засобів мікроробототехніки та нанотехнологічних ліній виробництва, а саме – крокових двигунів.

The possible ways of improvement and refinement of the engineering methods of calculation of the automatic electric motor drive of the microrobotic technique hardware and of the nanotechnology lines of manufacture are discussed. One may research the stepping motor drives as well.

Постановка проблеми. Аналіз останніх досліджень. Відомо [1], що кроковий двигун (КД) – електричний двигун, який перетворює цифровий електричний вхідний сигнал у механічний рух. Порівнянно з іншими приладами, які можуть виконувати ті самі чи подібні функції , система управління, яка використовується у КД, має такі істотні переваги: 1) у неї немає зворотного зв'язку, який зазвичай необхідний для управління положенням або частотою обертання; 2) не нагромаджується помилка положення; 3) КД сумісний з цифровими пристроями.

Нині для управління КД як електронні перемикачі застосовують транзистори, а сигнали на перемикання генеруються цифровими інтегральними схемами або мікропроцесором.

Різні типи і класи КД широко використовуються у периферійних пристроях ПЕОМ та подібних системах, й, на думку авторів цієї роботи, мають перспективу широкого застосування у засобах мікроробототехніки та нанотехнологічних лініях сучасного виробництва (високих технологіях).

У [2–4] досліджена математична модель КД, теоретично встановлено і експериментально підтверджено, що вал здійснює коливні рухи зі зміною напрямку обертання, неврахування якого призводить до значної похибки вимірювання.

Основною вадою КД є присутність у останніх явищ резонансу та нестабільності. Одним зі способів зниження вказаних негативів є під'єднання механічних демпферів до вала КД. У [1] здійснено аналіз типів механічних демпферів для КД. Оптимізації таких пристроїв (демпферів КД) присвячені роботи [5–11]. У них розглянуті впливи демпферів на КД, визначені передавальні функції лінеаризованих рівнянь, що описують функціонування подібних систем, отримане функціональне співвідношення для оптимізації подібних пристроїв, яке дозволяє швидко знижувати коливання у разі перехідних процесів. Проте отримані результати [1] мають обмежене коло застосування.

Метою роботи є встановлення закономірностей руху вала двигуна КД, який дає змогу оптимізувати знищення коливань у разі перехідних процесів для КД з постійним магнітом, гібридних двигунів, реактивних КД для варіантів одно- й двофазного їх збудження й управління джерелом струму чи напруги. При тому використані результати фундаментальної теорії динамічних характеристик КД, викладені у [1], відповідні фундаментальні рівняння для різних варіантів КД та їх передавальні функції.

1. <u>Фундаментальні рівняння КД та передавальні характеристики для двигунів з постійним магнітом/гібридних двигунів.</u>

Рівняння руху ротора КД має вигляд

$$J\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2}+D\cdot\frac{d\theta}{dt}+p\cdot n\cdot\Phi_{\text{ì}}\cdot i_A\cdot\sin p\cdot\theta+p\cdot n\cdot\Phi_{\text{ì}}\cdot i_B\cdot\sin\{p\cdot(\theta-\lambda)\}=0, \tag{1}$$

де J – момент інерції, $\left(\text{êã}\cdot\text{ì}^{2}\right)$; θ – кут повороту, (рад); t – час, (с); D – коефіцієнт в'язкого тертя, $\left(H\cdot\text{ì}\cdot\text{ñ}\cdot\text{ðàä}^{-1}\right)$; $ç$ – кількість пар полюсів; n – кількість витків; $\Phi_{\text{ì}}$ – потокозчеплення, створене постійним магнітом у одному витку, $\left(\text{Òë}\cdot\text{ì}^{2}\right)$; i_A – струм обмотки *A*, *(A)*; i_B – струм обмотки *B*, *(A)*; λ – інтервали-кроки зубців, (рад). У (1) коефіцієнт D в'язкого тертя враховує наявність повітря та тертя, а також може бути використаний для опису електромагнітних ефектів другого порядку, які виникають завдяки гістерезису чи вихорних струмів.

Рівняння для напруги у обмотках статора КД набувають вигляду

$$\begin{cases} V-r\cdot i_A-L\cdot\dfrac{di_A}{dt}-M\cdot\dfrac{di_B}{dt}+\dfrac{d}{dt}\left(n\cdot\Phi_{\text{ì}}\cdot\cos p\cdot\theta\right)=0;\\ V-r\cdot i_B-L\cdot\dfrac{di_B}{dt}-M\cdot\dfrac{di_A}{dt}+\dfrac{d}{dt}\{n\cdot\Phi_{\text{ì}}\cdot\cos\left(p\cdot(\theta-\lambda)\right)\}=0, \end{cases} \tag{2}$$

де V – напруга джерела живлення, (*B*); L – власна індуктивність кожної фази, (Генрі); M – взаємна індуктивність (Гн); r – опір ланцюга обмотки статора. При тому прийняті припущення, що L та M не залежать від θ.

Лінеаризовані рівняння для θ, i_A, i_B отримані у [1] і мають такий вигляд:

$$\begin{cases} J\cdot\dfrac{d^2\theta}{dt^2}+D\cdot\dfrac{d\theta}{dt}+2p^2\cdot\Phi_{\text{ì}}\cdot n\cdot I_0\cdot\left(\cos\dfrac{p\lambda}{2}\right)\cdot\theta+p\cdot\Phi_{\text{ì}}\cdot n\cdot\left(\sin\dfrac{p\lambda}{2}\right)\cdot(i_A-i_B)=0;\\ r\cdot i_A+L\cdot\dfrac{di_A}{dt}+M\cdot\dfrac{di_B}{dt}-p\cdot\Phi_{\text{ì}}\cdot n\cdot\sin\left(\dfrac{p\lambda}{2}\right)\cdot\dfrac{d\theta}{dt}=0;\\ r\cdot i_B+L\cdot\dfrac{di_B}{dt}+M\cdot\dfrac{di_A}{dt}+p\cdot\Phi_{\text{ì}}\cdot n\cdot\sin\left(\dfrac{p\lambda}{2}\right)\cdot\dfrac{d\theta}{dt}=0, \end{cases} \tag{3}$$

де I_0 – постійний струм, (*A*), який протікає у обмотках обох фаз; положення рівноваги тепер досягається при $\theta=\dfrac{\lambda}{2}$.

Для визначення функції, що виражає аналітично положення ротора КД $\theta(t)$ після початку руху від положення рівноваги за кута θ_i, законів зміни у часі струмів $i_A(t)$ й $i_B(t)$ потрібно розв’язати рівняння системи (3) за початкових умов

$$\theta\big|_{t=0} = \theta_i; \quad \frac{d\theta}{dt}\bigg|_{t=0} = 0. \qquad (4)$$

Позначимо $\dfrac{d}{dt} = s,\ \dfrac{d^2}{dt^2} = s^2,\ \dfrac{d^3}{dt^3} = s^3$. Передавальна характеристика θ залежно від θ_i має вигляд

$$\theta(s) = \frac{\left\{s^2 + \left(\frac{r}{L_p} + \frac{D}{J}\right)\cdot s + \left(\frac{r}{L_p}\cdot\frac{D}{J} + k_p\cdot\omega_{np}^2\right)\right\}\cdot\theta_i}{\left\{s^3 + \left(\frac{r}{L_p} + \frac{D}{J}\right)\cdot s^2 + \left[\frac{r}{L_p}\cdot\frac{D}{J} + \omega_{np}^2\left(1+k_p\right)\right]\cdot s + \left(\frac{r}{L_p}\right)\cdot\omega_{np}^2\right\}}, \qquad (5)$$

де

$$L_p = L - M;\ k_p = \frac{n\cdot\Phi_{\text{ì}}\cdot\sin^2\left(\frac{p\lambda}{2}\right)}{L_p\cdot J_0\cdot\cos\left(\frac{p\lambda}{2}\right)};$$
$$\omega_{pn}^2 = \frac{2p^2\cdot\Phi_{\text{ì}}\cdot n\cdot J_0\cdot\cos\left(\frac{p\lambda}{2}\right)}{J}. \qquad (6)$$

Передавальні характеристики струмів i_A й i_B залежно від θ та θ_i мають вигляд

$$i_A(s) = -i_B(s) = \frac{p\cdot\Phi_{\text{ì}}\cdot n\cdot\sin\left(\frac{p\lambda}{2}\right)\cdot\left(s\cdot\theta - \theta_i\right)}{\left(r + L_p\cdot s\right)}. \qquad (7)$$

Найважливішим є рівняння (5), що описує зміну кута повороту ротора КД у часі $\theta(t)$. Основною особливістю цього рівняння є те, що його знаменник має третій порядок щодо змінної s . Рівняння (7) показує, що струми, які протікають у фазах A та B , рівні за значенням і протилежні за напрямком. У зв’язку з цим схема двофазного збудження КД забезпечує непогане загасання коливань у разі перехідних процесів.

2. Фундаментальні рівняння та передавальні характеристики для реактивних КД.

Подальші співвідношення й міркування наведені стосовно однопакетного реактивного КД, але результати можуть бути застосовані й для багатопакетних типів КД, якщо вважати, що взаємні індуктивності дорівнюють нулю. Індуктивності та взаємні індуктивності обмоток двох фаз моделі мають такі вирази:

$$\begin{cases} L_A = L_0 + L\cdot\cos(2p\cdot\theta); \\ L_B = L_0 + L\cdot\cos\left[2p\cdot(\theta-\lambda)\right]; \\ M_{AB} = -M_0 + M\cdot\cos\left[2p\cdot\left(\cdot\theta - \frac{\lambda}{2}\right)\right]. \end{cases} \qquad (8)$$

Знак мінус перед M_0 у (8) показує, що додатний струм у одній з обмоток КД створює від’ємне потокозчеплення у іншій.

Рівняння руху має вигляд

$$J\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2}+D\cdot\frac{d\theta}{dt}+i_A^2\cdot p\cdot L\cdot\sin(2p\cdot\theta)+i_B^2\cdot p\cdot L\cdot\sin(2p\cdot[\theta-\lambda])+2i_A\cdot i_B\cdot p\cdot M\cdot\sin\cdot\left[2p\cdot\left(\theta-\frac{\lambda}{2}\right)\right]=0 \quad (9)$$

Рівняння для напруг у двох обмотках КД набувають вигляду

$$\begin{cases}V-r\cdot i_A-\dfrac{d}{dt}(L_A\cdot i_A)-\dfrac{d}{dt}(M_{AB}\cdot i_B)=0;\\ V-r\cdot i_B-\dfrac{d}{dt}(L_B\cdot i_B)-\dfrac{d}{dt}(M_{AB}\cdot i_A)=0.\end{cases} \quad (10)$$

У лінеаризованій формі замість (9) й (10) матимемо

$$\begin{cases}J\cdot\dfrac{d^2\theta}{dt^2}+D\cdot\dfrac{d\theta}{dt}+4p^2\cdot I_0^2\cdot(M+L\cdot\cos(p\lambda))\cdot\theta+2p\cdot I_0\cdot L\cdot\sin(p\lambda)\cdot(i_A-i_B)=0;\\ r\cdot i_A+(L_0+L\cdot\cos(p\lambda))\cdot\dfrac{di_A}{dt}+(M-M_0)\cdot\dfrac{di_B}{dt}-2p\cdot I_0\cdot L\cdot\sin(p\lambda)\cdot\dfrac{d\theta}{dt}=0;\\ r\cdot i_B+(L_0+L\cdot\cos(p\lambda)\cdot\dfrac{di_B}{dt}+(M-M_0)\cdot\dfrac{di_A}{dt}+2p\cdot I_0\cdot L\cdot\sin(p\lambda)\cdot\dfrac{d\theta}{dt}=0.\end{cases} \quad (11)$$

Рівняння (11) ідентичні за формою для змінних θ, i_A, i_B (3), які описують КД з постійними магнітами. Тому їх розв'язок за тих самих початкових умов (4) буде таким (передавальні функції):

$$\theta(s)=\frac{\left[s^2+\left(\frac{r}{L_\nu}+\frac{D}{J}\right)\cdot s+\frac{r}{L_\nu}\cdot\frac{D}{J}+k_\nu\cdot\omega_{n\nu}^2\right]\cdot\theta_i}{\left\{s^3+\left(\frac{r}{L_\nu}+\frac{D}{J}\right)\cdot s^2+\left[\frac{r}{L_\nu}\cdot\frac{D}{J}+\omega_{n\nu}^2(1+k_\nu)\right]\cdot s+\left(\frac{r}{L_\nu}\right)\cdot\omega_{n\nu}^2\right\}}, \quad (12)$$

де

$$L_\nu=L_0+L\cdot\cos(p\lambda)-M+M_0;$$
$$k_\nu=\frac{2L^2\cdot\sin^2(p\lambda)}{L_\nu\cdot[M+L\cdot\cos(p\lambda)]}; \quad (13)$$
$$\omega_{n\nu}^2=\frac{4p^2\cdot J_0^2\cdot[M+L\cdot\cos(p\lambda)]}{J}.$$

3. Аналіз передавальних функцій КД.

Використовуючи рівняння (5) та (12), виконаємо аналіз передавальних функцій КД. Вважаючи, що середина магнітного полюса ротора за однакового збудження двох фаз розміщена на $\theta=\frac{\lambda}{2}$, необхідне значення кута у цьому випадку $\theta=\frac{\lambda}{2}$.

3.1. Однофазне збудження.

Якщо $\lambda=0$, то обидві обмотки поводяться як одна, тому розв'язок для однофазного збудження можна отримати простою підстановкою $\lambda=0$ у рівняння для двофазного збудження. Останні члени у (3), (11) починають дорівнювати нулю. Тому рівняння руху та балансу напруги стають незалежними. Передавальне рівняння для КД з постійними магнітами отримують тільки з першого рівняння системи (3) й аналогічно для реактивного КД з (9). Для отримання розв'язку у випадку КД з постійними магнітами приймаємо у (3) $\lambda=0$ й одержимо

$$J\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2}+D\cdot\frac{d\theta}{dt}+2p^2\cdot\Phi_{\text{і}}\cdot n\cdot J_0\cdot\theta=0. \quad (14)$$

Враховуючи, що у цьому випадку лінеаризоване рівняння (14) задає різницю між реальним положенням θ_0 й необхідним положенням θ_i, $\theta=\theta_0-\theta_i$, (14) можна переписати у вигляді

$$J \cdot \frac{d^2\theta_0}{dt^2} + D \cdot \frac{d\theta_0}{dt} + 2p^2 \cdot \Phi_{\text{ì}} \cdot n \cdot J_0 \cdot \theta_0 = 2p^2 \cdot \Phi_{\text{ì}} \cdot n \cdot J_0 \cdot \theta_i . \tag{15}$$

З початкових умов: $\theta_0\big|_{t=0} = \theta_i$; $\left.\frac{d\theta_0}{dt}\right|_{t=0} = 0$ й для позначень $\frac{d}{dt} = s,\ \frac{d^2}{dt^2} = s^2$ з (15) маємо

$$\left(s^2 \cdot J + s \cdot D + 2p^2 \cdot \Phi_{\text{ì}} \cdot n \cdot J_0\right) \cdot \theta_0 = 2p^2 \cdot \Phi_{\text{ì}} \cdot n \cdot J_0 \cdot \theta_i \tag{16}$$

тоді для передавальної функції отримаємо

$$G(s) = \frac{\theta_0}{\theta_i} = \frac{2p^2 \cdot \Phi_{\text{ì}} \cdot n \cdot J_0}{s^2 \cdot J + s \cdot D + 2p^2 \cdot \Phi_{\text{ì}} \cdot n \cdot J_0} = \frac{\omega_{np}^2}{s^2 + \frac{s \cdot D}{J} + \omega_{np}^2} . \tag{17}$$

У (17) ω_{np} є власною кутовою частотою й задається рівнянням

$$\omega_{np} = \left(\frac{2p^2 \cdot \Phi_{\text{ì}} \cdot n \cdot J_0}{J}\right)^{\frac{1}{2}} , \tag{18}$$

або

$$\omega_{np} = \left(\frac{N_r \cdot K_T \cdot J_0}{J}\right)^{\frac{1}{2}} , \tag{19}$$

де N_r – кількість зубців ротора КД, K_T – постійна моменту й задається виразом:

$$K_T = 2n \cdot N_r \cdot \Phi_{\text{ì}} . \tag{20}$$

Кількість витків у (19) дорівнює $2n$, і якщо позначити через n_1 кількість витків у фазі звичайного двигуна, то K_T набуває вигляду

$$K_T = n_1 \cdot N_r \cdot \Phi_{\text{ì}} . \tag{21}$$

Теоретично постійна моменту виражається саме у цій формі (21).

Передавальну функцію, схожу до форми (17), можна отримати з (5). Оскільки у цьому випадку $\lambda = 0$, то взаємна індуктивність M дорівнює індуктивності L й L_p у (6) починає дорівнювати нулю. Після множення чисельника й знаменника (5) на $\frac{L_p}{r}$, приймаємо $L_p = 0$ й тоді отримаємо

$$\theta(s) = \frac{\left(s + \frac{D}{J}\right) \cdot \theta_i}{s^2 + \frac{D}{J} \cdot s + \omega_{np}^2} . \tag{22}$$

При $s = 0$ у чисельнику (22) $\theta(s)$ з точністю до константи збігається з (17).

Отримаємо передавальну функцію для реактивного КД з (11) при $\lambda = 0$:

$$\tilde{G}(s) = \frac{\theta_0}{\theta_i} = \frac{4p^2 \cdot I_0^2 \cdot (M + L)}{s^2 \cdot J + s \cdot D + 4p^2 \cdot I_0^2 \cdot (M + L)} = \frac{\tilde{\omega}_{n\nu}^2}{s^2 + \frac{D}{J} \cdot s + \tilde{\omega}_{n\nu}^2} . \tag{23}$$

У (23) $\tilde{\omega}_{n\nu}$ є власною кутовою частотою й задається рівнянням:

$$\omega_{\nu}^2 = \frac{4p^2 \cdot I_0^2 \cdot (M + L)}{J} . \tag{24}$$

(При тому $\tilde{\omega}_{n\nu} \neq \omega_{np}$, тобто у реактивного КД своя власна частота коливань).

Якщо треба отримати передавальну функцію $\tilde{G}(s)$ з (12) при $\lambda = 0$, то спочатку потрібно помножити чисельник і знаменник (12) на $\frac{L_\nu}{r}$, прийнявши після цієї операції $L_\nu = 0$ $(k_p = 0)$, тоді:

$$\tilde{G}(s) = \frac{\left(s + \frac{D}{J}\right)\cdot \theta_i}{s^2 + \frac{D}{J}\cdot s + \omega_{n\nu}^2}. \tag{25}$$

При $s = 0$ у чисельнику (25) $\tilde{G}(s)$ з точністю до константи збігається з (23).

3.2. Управління джерелом струму.

Варто зазначити, що передавальна функція КД, який керований джерелом струму за двофазного збудження, точно така сама, як для управління джерелом напруги за однофазного збудження. Під час управління джерелом струму обирають джерело з нескінченно великим внутрішнім опором чи великим опором, увімкненим послідовно з обмоткою фази. Множимо чисельник й знаменник у (5) на $\frac{r}{L}$ й вважаємо $r = \infty$, тоді отримаємо

$$\theta(s) = \frac{\left(s + \frac{D}{J}\right)\cdot \theta_i}{s^2 + \frac{D}{J}\cdot s + \omega_{np}^2}. \tag{26}$$

Замінюючи чисельник (26) константою, яка задає значення одиниці функції при $s = 0$, отримаємо передавальну функцію рівняння (17). Те саме можна отримати й для реактивного КД (співвідношення типу (23) та (25)).

3.3. Двофазне збудження з управлінням джерелом напруги.

Передавальну функцію можна отримати з (5):

$$G(s) = \frac{\left(\frac{r}{L_p}\right)\cdot \omega_{np}^2}{s^3 + \left(\frac{r}{L_p} + \frac{D}{J}\right)\cdot s^2 + \left\{\frac{r}{L_p}\cdot\frac{D}{J} + \omega_{np}^2\cdot(1 + k_p)\right\}\cdot s + \left(\frac{r}{L_p}\right)\cdot \omega_{np}^2}. \tag{27}$$

Передавальна функція для реактивного КД має вигляд (її отримують з (12)):

$$\tilde{G}(s) = \frac{\left(\frac{r}{L_\nu}\right)\cdot \omega_{n\nu}^2}{s^3 + \left(\frac{r}{L_\nu} + \frac{D}{J}\right)\cdot s^2 + \left\{\frac{r}{L_\nu}\cdot\frac{D}{J} + \omega_{n\nu}^2\cdot(1 + k_\nu)\right\}\cdot s + \left(\frac{r}{L_\nu}\right)\cdot \omega_{n\nu}^2}. \tag{28}$$

4. Однокрокова реакція.

Розглянемо реакцію КД. Порівняємо випадок передавальної функції другого та третього порядку. Це означає порівняння однофазного та двофазного збудження.

4.1. Передавальна функція другого порядку.

Передавальна функція для однофазного збудження й за управління джерелом струму записується у вигляді

$$G^*(s) = \frac{\theta_0}{\theta} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\cdot\omega_n^2\cdot s + \omega_n^2}, \tag{29}$$

де ξ – коефіцієнт демпфування

$$\xi = \frac{D}{2J\cdot\omega_n}. \tag{30}$$

Вигляд рівняння (29) добре відомий з теорії управління зі зворотним зв'язком. Реакція θ_0 на крокову функцію θ_i має різні траєкторії залежно від значення ξ (для звичайного КД $\xi < 0.5$). Для $\xi < 1$ реакція є коливальною. Час від початку кроку до моменту, коли ротор залишається у заданому кутовому інтервалі, називається часом встановлення $\left(t^*\right)$ й визначається так:

$$t^* \approx \frac{3}{\xi \cdot \omega_n} = \frac{6J}{D}. \qquad (31)$$

4.2. <u>Передавальна функція третього порядку.</u>

За двофазного збудження (управління) рівняння руху та балансу напруг залежать одне від одного. Розв'язок (7) показує (аналогічно можна стверджувати й для розв'язків i_A, i_B рівнянь (11)), що ЕРС індукції, яка виникає під час руху, створює рівні й протилежні струми у збуджених фазах, які виключають ефект циркулюючого струму доволі великого значення, близького до J_0. Загальний струм, який протікає через джерело, починає дорівнювати, принаймні, $2J_0$, і це не впливає на потужність, яку віддає джерело. Якщо рух ротора коливальний, то циркулюючий струм також має коливальний характер й викликає втрати у обмотках. Це явище показує, що кінетична енергія ротора розсіюється, переходячи у теплові втрати, тому коливання його будуть швидко спадати. Таким є пояснення електромагнітного демпфування у разі двофазного збудження.

Знаменник передавальної функції, який прирівнюється до нуля, т.з. характеристичне рівняння, зазвичай третього порядку. Якщо постійна загасання $D = 0$ (опір повітря дорівнює нулю), то характеристичне рівняння набуває вигляду

$$s^3 + \left(\frac{r}{L}\right) \cdot s^2 + (1+k) \cdot \omega_n^2 \cdot s + \left(\frac{r}{L}\right) \cdot \omega_n^2 = 0, \qquad (32)$$

де $\frac{r}{L}$ – величина, обернена постійній часу електричного ланцюга КД; k – константа, яка задає міру внутрішнього демпфуючого потенціалу двигуна; ω_n – недемпфована власна частота малих коливань ротора біля положення рівноваги.

У загальному випадку $(D \neq 0)$ замість (32) маємо

$$s^3 + \left(\frac{r}{L} + \frac{D}{J}\right) \cdot s^2 + \left\{\frac{r}{L} \cdot \frac{D}{J} + \omega_n^2 \cdot (1+k)\right\} \cdot s + \left(\frac{r}{L}\right) \cdot \omega_n^2 = 0. \qquad (33)$$

Розглянемо розв'язки (32) й (33) у загальному випадку [12].

Введемо такі позначення:

$$a = \begin{cases} \left(\frac{r}{L}\right) \Rightarrow \text{для (32);} \\ \left(\frac{r}{L} + \frac{D}{J}\right) \Rightarrow \text{для (33);} \end{cases}$$

$$b = \begin{cases} (1+k) \cdot \omega_n^2 \Rightarrow \text{для (32);} \\ \left(\frac{r}{L} + \frac{D}{J} + \omega_n^2 \cdot (1+k)\right) \Rightarrow \text{для (33);} \end{cases} \qquad (34)$$

$$c = \left\{ \left(\frac{r}{L}\right) \cdot \omega_n^2 \Rightarrow \text{для (32) й (33)}. \right.$$

На відміну від [1] зазначимо умови, за яких (32) чи (33) має один дійсний та два комплексних спряжених корені. (Вони визначаються не тільки діапазоном зміни k !).

Корені (32) , (33), з урахуванням (34), можна подати у вигляді

$$\begin{cases} S_1 = A + B - \dfrac{a}{3};\ S_{2,3} = \left\{ -\dfrac{(A+B)}{2} - \dfrac{a}{3} \right\} \pm i \cdot \dfrac{(A-B)}{2} \cdot \sqrt{3}; i = \sqrt{-1}; \\ A = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} + \sqrt{Q}}\ ;\ B = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} - \sqrt{Q}}\ ;\ Q = \left(\dfrac{p}{3}\right)^3 + \left(\dfrac{q}{2}\right)^2\ ; \\ p = -\dfrac{a^2}{3} + b\ ;\ q = 2 \cdot \left(\dfrac{a}{3}\right)^3 - \dfrac{ab}{3} + c\ . \end{cases} \tag{35}$$

При цьому $\operatorname{Im} S_1 = 0$, а $\operatorname{Im} S_{2,3} \neq 0$ за умови

$$Q > 0\,. \tag{36}$$

У цьому випадку розв'язок (32) й (33) можна подати так:

$$\theta(t) = \overline{A} \cdot e^{+S_1 \cdot t} + \overline{B} \cdot e^{\beta \cdot t} \cdot \cos\{\Omega \cdot t - \gamma\}, \tag{37}$$

де константи $\overline{A}, \overline{B}$ й γ визначаються з конкретних початкових умов, а для S_1 й β маємо

$$S_1 = A + B - \frac{a}{3} < 0;\ \ \beta = -\frac{(A+B)}{2} - \frac{a}{3} < 0\,; \tag{38}$$

для Ω можна подати таке рівняння:

$$\Omega = \left| \frac{(A-B)}{2} \cdot \sqrt{3} \right|. \tag{39}$$

Константи $\overline{A}, \overline{B}$ й γ визначаються з початкових умов

$$\theta\big|_{t=0} = \theta_i;\ \ \frac{d\theta}{dt}\bigg|_{t=0} = 0;\ \ \frac{d^2\theta}{dt^2}\bigg|_{t=0} = 0\,. \tag{40}$$

Інакше (40) можна подати у вигляді

$$\begin{cases} \overline{A} + \overline{B} \cdot \cos\gamma = \theta_i; \\ \overline{A} \cdot S_1 + \overline{B} \cdot [\beta \cdot \cos\gamma + \Omega \cdot \sin\gamma] = 0; \\ \overline{A} \cdot S_1^2 + \overline{B} \cdot \left\{ \left(\beta^2 - \Omega^2\right) \cdot \cos\gamma + 2\Omega\beta \cdot \sin\gamma \right\} = 0\ . \end{cases} \tag{41}$$

Цю систему можна розв'язати методом виключення невідомих. Тоді матимемо

$$\begin{cases} \gamma = \operatorname{arctg}\left\{ \dfrac{\Omega^2 - \beta^2 + S_1 \cdot \beta}{2\Omega \cdot \beta - S_1 \cdot \Omega} \right\}; \\ \overline{B} = \dfrac{\theta_i}{\cos\gamma + \dfrac{(-1) \cdot [\beta \cdot \cos\gamma + \Omega \cdot \sin\gamma]}{S_1}}; \\ \overline{A} = \dfrac{-[\beta \cdot \cos\gamma + \Omega \cdot \sin\gamma] \cdot \theta_i}{S_1 \cdot \left\{ \cos\gamma - \dfrac{(\beta \cdot \cos\gamma + \Omega \cdot \sin\gamma)}{S_1} \right\}}\ . \end{cases} \tag{42}$$

Оскільки коливні перехідні процеси у КД під час встановлення необхідного кута θ_i визначаються другим членом у (37), то їх тривалість можна оцінити приблизним співвідношенням

$$t^* \cong \frac{\ln 10}{|\beta|} \approx \frac{(3 \ldots 4)}{|\beta|}\,. \tag{43}$$

При цьому коливання за тривалості t^* перехідного процесу у КД відбуваються з частотою Ω (39).

5. Теорія демпфуючих пристроїв КД.

Конструкція та дія демпфуючих пристроїв наведені у [1]. Розглянемо теорію в'язко-зчепленого демпфуючого пристрою VCID. Він конструктивно складається з інерційного диска в середині циліндричної коробки. Диск й коробка можуть вільно обертатись відносно одне одного, але простір між ними малий й заповнений рідиною, яка містить кремній, тому відносний рух веде до виникнення гальмівної сили на кожному з них. Під час роботи КД зовнішня коробка прикріплюється безпосередньо до вала ротора.

Дія демпфуючого пристрою (пружно-фрикційного, магніто-фрикційного інерційних демпферів або інерційного демпфера на в'язкому терті) зводиться до наступного. Нехай ротор повертається й коливається. Якщо інерційний диск КД має великий момент інерції, то він має тенденцію обертатись з постійною частотою. Внаслідок цього між ним та ротором КД, який коливається, з'явиться різниця частот, котра стоятиме на заваді в'язкому чи фрикційному тертю й усуне коливання. Через цю причину, чим вищий момент інерції вільного диска, тим краще демпфування. З іншого боку, більший інерційний диск може знижувати прийнятність та ефективність системи. Отже, важливою проблемою стає оптимізація демпфуючого пристрою.

Просте аналітичне пояснення ефекту демпфування можна надати за допомогою передавальної функції (29). Якщо момент інерції вільного диска великий, тоді можна вважати, що у початковій стадії реакції він майже нерухомий, а це відповідає великому значенню коефіцієнта в'язкості D системи. Звідси випливає, що фактор демпфування ξ великий й коливання зменшуються.

Наведені пояснення мають якісний характер з урахуванням великого моменту інерції вільного диска. Насправді, момент інерції повинен бути відповідно обраним. Проаналізуємо дію VCID кількісно. Момент, створений КД, задається рівнянням

$$\tau = K_T \cdot J_M \cdot N_r \cdot (\theta_i - \theta_0), \tag{44}$$

де J_M – максимальне значення струму. Рівняння (44) можна подати у вигляді

$$\tau_m = E_m \cdot (\theta_i - \theta_0), \tag{45}$$

де

$$E_m = K_T \cdot J_M \cdot N_r, \tag{46}$$

θ_i – необхідна кутова позиція ротору КД; θ_0 – реальне кутове положення ротору.

Рівняння руху ротора КД має вигляд

$$(J_m + J_{di}) \cdot \ddot{\theta} = \tau_m - \tau_d, \tag{47}$$

де J_m – момент інерції ротора; J_{di} – момент інерції демпфуючого пристрою.

Момент за рахунок в'язкості, який виникає у коробці, дорівнює

$$\tau_d = D \cdot (\dot{\theta}_o - \dot{\theta}_{d0}), \tag{48}$$

де θ_{d0} – кутове положення інерційного диска. Рівняння руху інерційного диска

$$J_{d0} \cdot \ddot{\theta}_{d0} = \tau_d^*, \quad \tau_d^* = \tau_m - (J_m + J_{di}) \cdot \ddot{\theta}_0. \tag{49}$$

Систему рівнянь (45) – (49) можна подати у такому вигляді:

$$\frac{d^3\theta_0}{dt^3} + K \cdot (1 + J) \cdot \frac{d^2\theta_0}{dt^2} + E \cdot \frac{d\theta_0}{dt} + E \cdot K \cdot \theta_0 = E \cdot K \cdot \theta_i + E \cdot \frac{d\theta_i}{dt}, \tag{50}$$

де

$$E = \frac{E_m}{J_m + J_{di}}; \; K = \frac{D}{J_{d0}}; \; J = \frac{J_{d0}}{J_m + J_{di}}. \tag{51}$$

Наведемо відхилення положення ротора (кутового) від необхідного за допомогою рівняння

$$dq = q_i - q_0. \tag{52}$$

За умови, що $\dfrac{d^2 q_i}{dt^2} = \dfrac{d^3 q_i}{dt^3} = 0$, можна (50) подати у вигляді

$$\frac{d^3(dq)}{dt^3} + K\cdot(1+J)\cdot\frac{d^2(dq)}{dt^2} + E\cdot\frac{d(dq)}{dt} + E\cdot K\cdot dq = 0. \tag{53}$$

Оскільки друга і третя похідні $q_i(t)$ по t дорівнюють нулю, це означає, що КД відпрацьовує необхідне кутове положення ротора плавно (відсутні прискорення й різкість руху).

Характеристичне рівняння для (53), яке визначає типи коренів і залежностей $dq(t)$, має вигляд

$$l^3 + K\cdot(1+J)\cdot l^2 + E\cdot l + E\cdot K = 0. \tag{54}$$

Введемо такі позначення:

$$K\cdot(1+J) = \overline{a};\ E\cdot K = \overline{c};\ E = \overline{b}; \tag{55}$$

тоді корені (54) можна подати у вигляді [12]

$$\begin{gathered}\lambda_1 = A^* + B^* - \frac{\overline{a}}{3};\ \lambda_{2,3} = -\frac{(A^* + B^*)}{2} - \frac{\overline{a}}{3} \pm i\cdot\frac{(A^* - B^*)}{2}\cdot\sqrt{3};\\ i = \sqrt{-1};\ \ A^* = \sqrt[3]{-\frac{\overline{q}}{2} + \sqrt{\overline{Q}}};\ \ B^* = \sqrt[3]{-\frac{\overline{q}}{2} - \sqrt{\overline{Q}}};\\ \overline{Q} = \left(\frac{\overline{p}}{3}\right)^3 + \left(\frac{\overline{q}}{2}\right)^2;\ \overline{p} = -\frac{\overline{a}^2}{3} + \overline{b};\ \overline{q} = 2\cdot\left(\frac{\overline{a}}{3}\right)^3 - \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{3} + \overline{c}.\end{gathered} \tag{56}$$

За умови $\overline{Q} > 0$, маємо $\operatorname{Im} l_1 = 0$, а $\operatorname{Im} l_{2,3} \neq 0$.

Якщо виконуються нерівності

$$\overline{Q} > 0;\ A^* + B^* - \frac{\overline{a}}{3} < 0;\ -\frac{(A^* + B^*)}{2} - \frac{\overline{a}}{3} < 0, \tag{57}$$

то розв’язок (53) можна подати у вигляді

$$\delta\theta(t) = \theta_i - \theta_0 = \tilde{A}\cdot e^{\lambda_1\cdot t} + \tilde{B}\cdot e^{\overline{\beta}\cdot t}\cdot\cos\{\overline{\Omega}\cdot t + \overline{\Phi}\}, \tag{58}$$

де $\overline{\beta} = -\dfrac{(A^* + B^*)}{2} - \dfrac{\overline{a}}{3};\ \overline{\Omega} = \dfrac{|A^* - B^*|}{2}$; $\tilde{A},\ \tilde{B},\ \overline{\Phi}$ – константи, які можна знайти з початкових умов:

$$\delta\theta\big|_{t=0} = 0;\ \ \frac{d(\delta\theta)}{dt}\bigg|_{t=0} = 0;\ \ \frac{d^2(\delta\theta)}{dt^2}\bigg|_{t=0} = 0. \tag{59}$$

Система рівнянь, яка визначає вказані константи $\tilde{A},\ \tilde{B},\ \overline{\Phi}$, має вигляд

$$\begin{cases}\tilde{A} + \tilde{B}\cdot\cos\overline{\Phi} = 0;\\ \lambda_1\cdot\tilde{A} + \tilde{B}\cdot\left[\overline{\beta}\cdot\cos\overline{\Phi} + (-1)\cdot\overline{\Omega}\cdot\sin\overline{\Phi}\right] = 0;\\ \lambda_1^2\cdot\tilde{A} + \tilde{B}\cdot\left[\overline{\beta}^2\cdot\cos\overline{\Phi} - \overline{\Omega}^2\cdot\cos\overline{\Phi} - 2\overline{\beta}\cdot\overline{\Omega}\cdot\sin\overline{\Phi}\right] = 0.\end{cases} \tag{60}$$

Звідси легко отримати

$$\begin{cases}\overline{\Phi} = \operatorname{arctg}\left\{\dfrac{\overline{b} - l_1}{\overline{\Omega}}\right\};\ \tilde{A} = 1;\\ \tilde{B} = \dfrac{-l_1^2}{\overline{b}^2\cdot\cos\overline{\Phi} - \overline{\Omega}^2\cdot\cos\overline{\Phi} - 2\overline{b}\cdot\overline{\Omega}\cdot\sin\overline{\Phi}}.\end{cases} \tag{61}$$

Коливання $dq(t)$ визначаються параметром $\overline{b}$. Вони практично загасають за час $\bar{t}^*$:

$$t^* \approx \frac{\ln 10}{\left[\frac{A^* + B^*}{2} + \frac{\overline{a}}{3}\right]} \approx \frac{(3...4)}{\left[\frac{A^* + B^*}{2} + \frac{\overline{a}}{3}\right]}. \tag{62}$$

Вважаючи, що значення $\frac{dq_i}{dt} = V_{0i}$ – нормальне, тобто визначається паспортними данимим конкретного КД, можна подати (50) у вигляді

$$\frac{d^3 q_0}{dt^3} + K \cdot (1 + J) \cdot \frac{d^2 q_0}{dt^2} + E \cdot \frac{dq_0}{dt} - E \cdot V_{0i} = E \cdot K \cdot (q_i - q_0). \tag{63}$$

Знайдемо закон руху $q_0(t)$, за якого виконується критерій

$$\int_0^{t_p} (q_i - q_0)^2 \, dt \Rightarrow \min, \tag{64}$$

де t_p – тривалість перехідного процесу, по закінченню якого припиняються коливання вала КД й досягається необхідне кутове положення q_i ротора КД з мінімальним квадратичним відхиленням q_0 від q_i.

Для задоволення критерію (64) закон руху ротора КД $q_0(t)$ повинен визначатись з рівняння

$$\frac{d^6 \theta_0}{dt^6} + \left[2E - K^2 \cdot (1 + J)^2\right] \cdot \frac{d^4 \theta_0}{dt^2} + E^2 \cdot \frac{d^2 \theta_0}{dt^2} = 0. \tag{65}$$

Характеристичне рівняння для (65) має такі корені:

$$\begin{cases} l_1^* = l_2^* = 0; \quad l_{3,4}^* = \frac{K \cdot (1 + J)}{2} \pm \sqrt{\frac{K^2 \cdot (1 + J)^2}{4} - E}; \\ \frac{K^2 \cdot (1 + J)^2}{4} > E \ ;\cdot\ l_{5,6}^* = -\frac{K \cdot (1 + J)}{2} \pm \sqrt{\frac{K^2 \cdot (1 + J)^2}{4} - E}. \end{cases} \tag{66}$$

Оскільки вважаємо виконаною у (66) умову:

$$\frac{K^2 \cdot (1 + J)^2}{4} > E, \tag{67}$$

то закон руху $q_0(t)$ буде суто аперіодичним такого вигляду:

$$q_0(t) = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 + \tilde{C}_3 \cdot e^{l_3^* \cdot t} + \tilde{C}_4 \cdot e^{l_4^* \cdot t} + \tilde{C}_5 \cdot e^{l_5^* \cdot t} + \tilde{C}_6 \cdot e^{l_6^* \cdot t}. \tag{68}$$

Константи $\tilde{C}_j$, $j = \overline{(1,6)}$ знаходимо з таких початкових умов:

$$\begin{cases} q_0\big|_{t=0} = 0; \ \dot{q}_0\big|_{t=0} = 0; \ \ddot{q}_0\big|_{t=0} = 0; \\ q_0\big|_{t=t_p} = q_i; \ \dot{q}_0\big|_{t=t_p} = 0; \ \ddot{q}_0\big|_{t=t_p} = 0. \end{cases} \tag{69}$$

Використовуючи запис (68) й умови (69), константи $\tilde{C}_j$, $j = \overline{(1,6)}$ можна знайти за правилом Крамера з лінійної системи рівнянь (щодо вказаних констант).

Висновки: 1. Отримані й всебічно проаналізовані лінеаризовані рівняння КД для різних видів: з постійним магнітом, гібридних, реактивних. Для вказаних типів КД обчислені їх передавальні характеристики.

2. Аналіз передавальних функцій КД виконаний для одно- та двофазного збудження з управлінням джерелом струму та / або напруги.

3. Визначені точні розв'язки (закони руху) ротора КД за умови існування передавальних функцій третього порядку. Визначені характерні частоти та тривалість загасання перехідного процесу для таких випадків.

4. Обґрунтована теорія демпфуючих пристроїв у КД й знайдені оптимальні закони руху ротора КД, за яких квадратичне відхилення реального його кутового положення є мінімальним від необхідного кутового положення й досягається по закінченню перехідного процесу у системі.

5. Отримані результати можна використати для уточнення й вдосконалення інженерних методів розрахунку автоматизованих електроприводів засобів мікроробототехніки та нанотехнологічних ліній виробництва.

1. Кенио Т. Шаговые двигатели и их микропроцессорные системы управления. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 200 с. 2. Двигатели электрические шаговые. Технические условия. ПТО. 312.002 ТУ. 3. Дискретный электропривод с шаговыми двигателями / Под общ. ред. М.Г. Чиликина. – М.: Энергия, 1971. – 624 с. 4. Кухарчук В.В., Усов В.В. Вимірювальний канал та методика нормування похибок кутового положення крокового двигуна // Вісн. Вінницьк. політехн. ін-ту. – 2007. – № 2. – С. 5–9. 5. Hughes A., Lawrenson P.J. Electromagnetic damping in stepping motors // Proceedings of JEE. – 1975. – Vol. 122, № 8. – P. 819–824. 6. Lawrenson P.J., Kingham I.E. Resonance effects in stepping motors // Proceedings of JEE. – 1977. Vol. 124. – № 5. – P. 445–448. 7.Ward P.A., Lawrenson P.J. Backlash, resonance and instability in stepping motors // Proceeding of the Sixth annual symposium on Incremental motion control systems and devices. – Department of Electrical Engineering, University of Illinois, 1977. – P. 73–83. 8. Singh G., Leenhouts A.C., Mosel E.F. Electromagnetic resonance in permanent-magnet step motor drive system // Proceedings of the International conference on stepping motors and systems. – University of Leeds, 1976. – P. 115–124. 9. Leenhouts A.C., Singh G. An active stabilization technique for open loop permanent-magnet step motor drive system // Proceedings of the Sixth annual symposium on Incremental motion control systems and devices. – Department of Electrical Engineering, University of Illinois, 1977. – P. 19–24. 10. Hughes A., Lawrenson P.J. Simple theoretical stability criteria for 1.8^0 lnybrid motors // Proceedings of the International conference on stepping motors and systems. – University of Leeds, 1979. – P. 127–135. 11. Lawrenason P.J., Kingham I.E. Visconsly coupled inertial damping of stepping motors // Proceedings of JEE. – 1975. – Vol. 122, № 10. – P. 1137–1140. 12. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1970. – 720 с.