

## КРАТНІСТЬ ШАБЛОНІВ ТА СКІНЧЕННІСТЬ ШАБЛОННОЇ ІЄРАРХІЇ

© Ткаченко О., 2011

**Описано умови кратності шаблонів та скінченності шаблонної ієрархії у шаблонно-просторовій системі.**

**Ключові слова:** шаблон, простір, кратність, скінченність, шаблонно-просторовий, система.

**This paper is devoted to the describing of conditions of multiplicity and finiteness of pattern hierarchy in the pattern-spatial system.**

**Keywords:** pattern, space, multiplicity, finiteness, pattern-spatial, system.

### Проблематика

Розвиток програмного забезпечення свідчить про утвердження клієнт-серверного підходу під час розроблення прикладних програмних систем та орієнтацію на роботу в глобальних мережах. Тенденції останніх років вказують на активне поширення ідеології сервісного підходу, що призвело до появи ідеології “Web 2.0” [1]. ІТ-підрозділи установ, діяльність яких спрямована на інтенсивну обробку інформації (наука, освіта, розроблення цифрового контенту і програмного забезпечення тощо) використовують портальну технологію. Такі програмні системи (портального типу) надають широкі можливості користувачам щодо наповнення контентом у межах власного облікового запису і прав доступу, але практично не дають змоги втручатися в неї на рівні структури, створювати і модифікувати нові сутності предметної області, додавати їх в систему.

У [2–3] було запропоновано шаблонно-просторовий підхід (ШПП) до розроблення програмних систем портального типу, що дає користувачам змогу змінювати структуру сутностей, зв'язки між ними та контент у процесі функціонування порталу без перекомпіляції серверної частини.

ШПП допускає появу кратних шаблонів в ієрархії, а тому вимагає встановлення ряду обмежень на структурну (шаблонну) та контентну (просторову) частини з метою недопуску неконтрольованого розростання наповнювальної частини порталу.

**Мета** цієї публікації – опис формальних умов кратності структурних елементів програмної системи портального типу та її скінченності. Обґрунтування цих умов є основою алгоритмів структурної модифікації такої системи.

**Методика дослідження.** Для обґрунтування положень ШПП використовується загальноприйнятий математичний апарат та основні факти теорії графів [4, 5]. Основні поняття і відношення між сутностями основані на запропонованій концепції ШПП [2, 3].

### Основні поняття шаблонно-просторового підходу

**Означення 1.** Під *шаблоном* розумітимемо структуровану модель сутності. Наприклад, сутність “книга”, “студент”, “семінар”, “нарада” тощо.

**Означення 2.** *Простір* – імплементація (реалізація) шаблону. Наприклад, простір семінару “Проблеми технологій програмування”.

**Означення 3.** Якщо з шаблону  $T$  створюється простір  $S$ , то  $T$  називатимемо *породжувальним шаблоном* для  $S$ , а  $S$  – *реалізацією (породженням з) шаблону  $T$* .

Один шаблон може бути реалізований багато разів. З погляду користувача, простір є робочим середовищем (веб-сторінкою), де користувач отримує доступ і функціональність відповідно до

рівня доступу, визначеного адміністратором. Створення і зв'язування шаблонів дає змогу отримати зв'язки між просторами (наприклад, у вигляді гіперпосилань). Користувач у процесі роботи з системою може здійснювати перехід між просторами. Після авторизації користувач потрапляє у власний простір.

Простори є місцем розташування самого контенту або засобів переходу до нього, специфікованих мовою HTML та її розширеннями. Права доступу відображаються наявністю/відсутністю на сторінці відповідної інформації або засобів переходу.

Правила поведінки в межах простору задаються складом і типом управляючих елементів інтерфейсу користувача на веб-сторінці простору.

**Означення 4.** *Власником простору називатимемо особу, яка має повний доступ до нього (доступ власності), створює з доступних шаблонів нові простори та за необхідності надає до них доступ іншим користувачам.*

Власником кореневого простору є адміністратор.

У структурі шаблону виділимо такі частини:

- опис;
- контент;
- зв'язна частина.

Залежно від способу зв'язування, зв'язні частини шаблонів можуть містити перелік безпосередніх нащадків (рис. 1, а) або батьків (рис. 1, б). Зв'язна частина будь-якого шаблону не повинна містити однакових елементів.

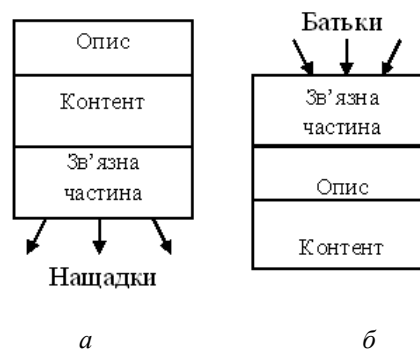


Рис. 1. Структура шаблону і типи зв'язування

**Означення 5.** *Зв'язування, при якому зв'язна частина шаблонів містить перелік нащадків, називатимемо зв'язуванням донизу. Аналогічно, якщо у зв'язній частині міститься перелік батьків, такий спосіб називатимемо зв'язуванням догори.*

Узагальнено зв'язування донизу подано на рис. 1, а, зв'язування догори – на рис. 1, б.

Відношення “батько→нащадок” визначає на деякій множині  $T = \{ t_1, t_2, \dots, t_n \}$  шаблонів їх ієрархію (дерево). Позначатимемо це дерево через  $TT$ .

Спосіб зв'язування в межах однієї ШПП-системи – єдиний для всіх шаблонів. Шаблонна ієрархія відображає не спосіб зв'язування, а відношення “батько→нащадок” на множині  $T$ . Очевидно, що одну і ту саму ієрархію шаблонів можна задати як зв'язуванням донизу, так і за допомогою зв'язування догори.

### Кратні шаблони

**Означення 6.** *Кратним називатимемо шаблон, який міститься в  $TT$  більше одного разу. Інші шаблони називатимемо некротними, тобто такими, які мають кратність 1.*

Так, шаблонна ієрархія, наведена на рис. 2, містить шаблон  $t_4$  кратності 4.

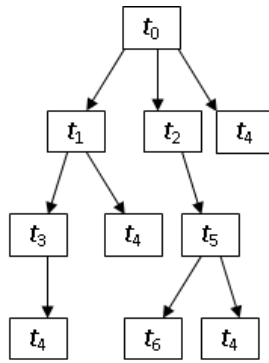


Рис. 2. Приклад шаблонної ієрархії

Нехай  $m_i$  – кількість шаблонів  $t_i$  в  $TT$ . Позначатимемо  $j$ -й шаблон  $t_i$  в  $TT$  через  $t_i^j$ .

**Означення 7.** Всі шаблони  $t_i^j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m_i$  називатимемо  $m_i$ -кратними  $t_i$ -шаблонами, або шаблонами  $t_i$ -сімейства з кратністю  $m_i$ .

Опис кратних шаблонів одного сімейства єдиний і зберігається в одному місці. Насправді у протилежному випадку такі шаблони можна було б вважати різними.

**Означення 8.** Відношення належності шаблонів до одного сімейства називатимемо відношенням їх рівності:  $\forall t_i \in TT: t_i^a = t_i^b = t_i$ ,  $a = 1, 2, \dots, m_i$ ,  $b = 1, 2, \dots, m_i$ .

**Означення 9.** Якщо структура кратного шаблону модифікується, одночасно такі самі зміни виникають в усіх шаблонах даного сімейства. Такі зміни називатимемо *правилом перезв'язування* кратних шаблонів.

Нехай функція  $anch(t_i)$  визначає множину суміжних для  $t_i$  шаблонів, тобто тих, які зазначені в його зв'язній частині, функція  $fath(t_i)$  – множину батьків  $t_i$  в усіх поколіннях, функція  $leg(t_i)$  – множину нащадків  $t_i$  усіх поколінь. Зауважимо, що кратність недопустима в межах зв'язної частини в структурі одного і того самого шаблону.

**Твердження 1**

1. При зв'язуванні догори  $TT$  містить кратний шаблон тоді і тільки тоді, коли  $\exists t_i \in TT: |anch(t_i)| \geq 2$ .

2. Для того, щоб при зв'язуванні догори шаблон  $t_k$  був кратним, необхідно і достатньо, щоб  $\exists t_i \in \{t_k\} \cup fath(t_k): |anch(t_i)| \geq 2$ .

**Доведення**

1. Нехай зв'язна частина  $t_i$  вказує на більш ніж один суміжний шаблон. Із способу зв'язування (догори) випливає, що існують принаймні два різні шаблони  $t_a$  і  $t_b$ , батьківські відносно  $t_i$ , тобто  $t_i$  є нащадком мінімум двох різних шаблонів, а отже, зустрічається в дереві шаблонів хоча б двічі. Тому  $t_i$  є кратним (рис. 3 а).

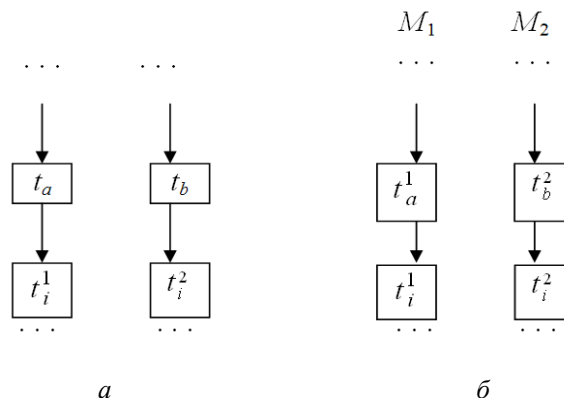


Рис. 3. Кратний шаблон  $t_i$

З іншого боку, нехай  $TT$  містить кратний шаблон  $t_i$ . Це означає, що він зустрічається в ієрархії мінімум двічі. При цьому можливі випадки: у  $t_i$  є кратні батьки або всі батьки  $t_i$  не кратні. Якщо батьки  $t_i$  не кратні, то вони різні, тому їх, як елементів зв'язної частини  $t_i$ , не менше двох, що і доводить цю частину твердження. Якщо ж у  $t_i$  існує кратний безпосередній батько  $t_a$ , то  $t_a$  можна розглядати аналогічно  $t_i$  попереднього випадку. Кратність  $t_a$  означає, що в дереві шаблонів існують два маршрути  $M_1$  і  $M_2$ , які містять однакові фрагменти  $t_a \rightarrow t_i$  (рис. 3 б). Нехай  $M_1$  і  $M_2$  мають початок у кореневій вершині  $t_0$  дерева  $TT$ . Очевидно, що  $M_1$  і  $M_2$  мають як спільну частину (принаймні вершину  $t_0$ ), так і різні, у яких містяться фрагменти  $t_a \rightarrow t_i$ . Існування різних частин впливає з кратності  $t_i$ . Нехай фрагмент  $t_0, \dots, t_s$  – максимальна спільна частина  $M_1$  і  $M_2$ , тобто нащадки вершини  $t_s$  вже належать різним маршрутам. Послідовності вершин маршрутів  $M_1$  і  $M_2$  не можуть бути однаковими. Справді, припустимо, що це не так. Тоді вершина  $t_s$  матиме принаймні двох однакових (кратних) безпосередніх нащадків, що недопустимо.

Отже, маршрути  $t_s, \dots, t_i^1$  і  $t_s, \dots, t_i^2$  різні (нагадаємо, що кратні шаблони ми вважаємо рівними:  $t_i^1 = t_i^2 = t_i$ ). Це означає, що існує кратний шаблон  $t_k$  ( $t_k^1 \in t_{s+1}, \dots, t_i^1$ ,  $t_k^2 \in t_{s+1}, \dots, t_i^2$ ,  $t_{s+1}$  – безпосередній нащадок  $t_s$ ), у якого батьки різні. А оскільки  $t_k^1$  і  $t_k^2$  належать двом різним маршрутам, то  $|anch(t_k)| \geq 2$ .

2. Нехай існує такий шаблон  $t_i$ , що  $|anch(t_i)| \geq 2$ . Якщо  $t_i = t_k$ , кратність  $t_k$  впливає з доведення першої частини цього твердження. Тому розглянемо випадок, коли  $t_i \in fath(t_k)$ . Як доведено вище,  $t_i$  є кратним. Це означає, що в дереві  $TT$  існують принаймні два різні маршрути  $t_0, \dots, t_i^1, \dots, t_k^1$  і  $t_0, \dots, t_i^2, \dots, t_k^2$ . Отже,  $t_k$  є кратним.

Навпаки, нехай шаблон  $t_k$  є кратним шаблоном. Звідси впливає існування принаймні двох різних маршрутів, які містять шаблони сімейства  $t_k$ . Припустимо, що зв'язна частина всіх шаблонів з  $\{t_k\} \cup fath(t_k)$  при зв'язуванні вгору містить не більше одного елемента. Тоді в дереві  $TT$  існує лише один маршрут  $t_0, \dots, t_k$ , що суперечить умові кратності  $t_k$ .

Твердження доведено.

## Твердження 2

1. При зв'язуванні вниз  $TT$  містить кратний шаблон тоді і тільки тоді, коли  $\exists t_i \in TT, t_j \in TT, t_i \neq t_j$ ;  $anch(t_i) \cap anch(t_j) \neq \emptyset$ .

2. Для того, щоб при зв'язуванні днізу шаблон  $t_k$  був кратним, необхідно і достатньо, щоб  $\exists t_i \in TT, t_j \in TT, t_i \neq t_j$ ;  $t_k \in leg(t_i) \cap leg(t_j)$ .

Доведення

1. Нехай у дереві  $TT$  існують два різні шаблони, у яких зв'язні частини мають спільні елементи. Це означає, що вони є батьками принаймні для одного якогось шаблону, позначимо його  $t_k$ . Отже,  $t_k$  має принаймні двох різних батьків. Тому  $t_k$  зустрічається в  $TT$  хоча б двічі, звідки впливає його кратність.

Навпаки, нехай у зв'язаному днізу дереві маємо кратний шаблон  $t_k$ , зокрема,  $t_k = t_k^1 = t_k^2$ . Тоді існують два різні маршрути  $M_1 = t_0, \dots, t_k^1$  і  $M_2 = t_0, \dots, t_k^2$ . Якщо  $t_k^1$  і  $t_k^2$  є нащадками різних шаблонів (не кратних), твердження справджується. Нехай для  $t_k^1$  і  $t_k^2$  батьківськими є також кратні шаблони одного сімейства. Оскільки маршрути  $M_1$  і  $M_2$  мають відмінну частину, то в них існують кратні шаблони деякого сімейства  $t_r$  ( $t_k^p$  чи їхні кратні батьки в якомусь поколінні), що мають різних батьків. Для визначеності позначимо таких батьків  $t_i$  і  $t_j$ . З логіки міркувань впливає, що  $t_r \in leg(t_i) \cap leg(t_j)$ , тобто зв'язна частина шаблонів  $t_i$  і  $t_j$  має спільний елемент, що і треба було довести.

2. Нехай шаблон  $t_k$  є спільним елементом зв'язних частин двох різних шаблонів  $t_i$  і  $t_j$ . Кратність  $t_k$  впливає з доведення першої частини цього твердження.

Навпаки, нехай при зв'язуванні днізу шаблон  $t_k$  є кратним. Тоді існують принаймні два різні маршрути  $M_1$  і  $M_2$  з початком у кореневій вершині  $t_0$ , які містять кратні шаблони сімейства  $t_k$ . Враховуючи доведення першої частини цього твердження, маємо: в маршрутах  $M_1$  і  $M_2$  існують два різні шаблони (позначимо їх  $t_i$  і  $t_j$ ), які є безпосередніми батьками або для  $t_k$ , або для деякого шаблону  $t_r$ , для якого  $t_k \in leg(t_r)$ . Отже,  $t_k$  є спільним елементом множини нащадків  $t_i$  і  $t_j$ .

Твердження доведено.

**Твердження 3.** (Правило зв'язування кратних шаблонів) Нехай в дереві існує шаблон  $t_k$  кратності  $m_k$ . Якщо цей шаблон має нащадків, то в шаблонній ієрархії  $TT$  міститься  $m_k$  повторень однакових фрагментів – піддерев з кореневою вершиною  $t_k$  (рис. 4).

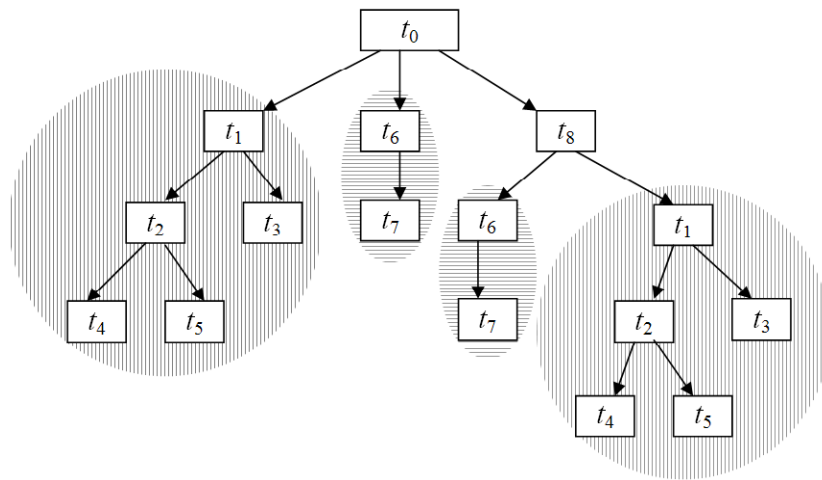


Рис. 4. Кратні фрагменти шаблонної ієрархії

Доведення впливає з єдиної структури шаблонів одного сімейства, зокрема, з рівності їх зв'язної частини. Справді, нехай шаблон  $t_k$  є кореневою вершиною деякого фрагмента шаблонної ієрархії (заштрихована область на рис. 4). Припустимо, що  $t_k^1$  і  $t_k^2$  є корневими вершинами різних піддерев  $TT$ . Це означатиме, що різні зв'язні частини мають або  $t_k^1$  і  $t_k^2$ , що суперечить належності їх до одного сімейства, або їхні відповідні кратні нащадки в деякому поколінні, що також неможливо. Тому кратність кожного шаблону  $t_k$  зумовлює кратність елементів множини  $leg(t_k)$ . Зауважимо,  $m_k$  є кількістю повторень піддерев з кратними корневими вершинами. У кожному такому піддереві можуть бути свої кратні шаблони, кратність яких загалом у дереві  $TT$  може бути більшою від  $m_k$ . Твердження доведено.

Оскільки для всіх шаблонів одного сімейства існує єдиний опис, то модифікація опису кратного шаблону є кратною модифікацією всіх шаблонів його сімейства.

#### Допустимі суміжні шаблони та скінченність шаблонної ієрархії

Існування кратних шаблонів, з одного боку, дає змогу забезпечити більшу розгалуженість шаблонної структури та, відповідно, просторової (контентної) частини ШПП-системи. Разом з тим, така можливість несе потенційну загрозу нескінченного розростання шаблонної структури, що неприпустимо з огляду на скінченність ресурсів апаратної частини сервера. Далі розглянуто умови, дотримання яких убезпечить ШПП-систему від неконтрольованого росту. Ці умови є основою алгоритмів структурної модифікації, у яких виконується попередня перевірка на допустимість додавання нового або зміну зв'язної частини існуючого шаблону.

**Означення 10.** Суміжними називатимемо шаблони, які є один відносно одного відповідно батьком та нащадком.

Кількість нащадків одного шаблону може бути більшою за одиницю, теоретично вона обмежується лише величиною  $n-1$ , де  $n$  – загальна кількість шаблонів у одній ієрархії. Насправді ця кількість, як правило, менша, відповідно до умов допустимості відношення суміжності між шаблонами.

**Твердження 4.** Нехай на скінченній множині шаблонів  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  визначено деяке дерево  $TT$ . Це дерево буде скінченним тоді і лише тоді, коли в жодному його маршруті немає кратних шаблонів одного сімейства.

Доведення буде для зв'язування донизу. Для іншого типу зв'язування шаблонів доведення аналогічне.

Нехай у дереві  $TT$  немає маршрутів з кратними шаблонами одного сімейства. Отже, в кожному маршруті міститься не більше ніж  $n$  елементів. Коренева вершина  $t_0$  дерева одна, вона може мати не більше ніж  $(n-1)$  безпосередніх нащадків, кожен з яких, своєю чергою, – не більше ніж  $(n-2)$  безпосередніх нащадків (інакше це б суперечило умові відсутності у маршруті кратних шаблонів) і т.д. Тобто загальна кількість елементів у шаблонній ієрархії теоретично не перевищує

$$1 + (n-1) + (n-1) \cdot (n-2) + \dots + (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \sum_{i=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-i)!},$$

що є величиною скінченною. Фактично ця кількість ще менша, але для якісного оцінювання скінченності цього достатньо.

Навпаки, нехай маємо скінченне дерево  $TT$ . Покажемо, що у жодному маршруті немає шаблонів одного сімейства. Доведемо методом від супротивного. Припустимо, що в дереві існує маршрут  $M_1$ , який містить кратні шаблони  $t_k^1$  і  $t_k^2$ . Якщо один з них є батьком для іншого, то, враховуючи рівність їхніх зв'язних частин, маємо нескінченний маршрут  $\dots t_k^1, t_k^2, t_k^1, t_k^2, \dots$ , що неприпустимо. Нехай жоден з шаблонів  $t_k^1$  і  $t_k^2$  не є безпосереднім нащадком для іншого. Тоді якийсь із них є нащадком для іншого найближче через покоління. Нехай  $t_p$  є безпосереднім нащадком для  $t_k^1$ . Для визначеності покладемо  $t_k^2 \in \text{leg}(t_k^1) \setminus \{t_p\}$ . Оскільки зв'язна частина кратних шаблонів одного сімейства однакова, то шаблон  $t_p$  міститься у зв'язній частині як  $t_k^1$ , так і  $t_k^2$ , тобто є нащадком для  $t_k^1$  і  $t_k^2$ , отже, також є кратним. З іншого боку,  $t_k^2 \in \text{leg}(t_p)$ . Тому маємо нескінченний маршрут  $\dots t_k^1, t_p, \dots, t_k^2, t_p, \dots, t_k^1, t_p, \dots, t_k^2, t_p, \dots$  (рис. 5). Це суперечить початковій умові цієї частини доведення.

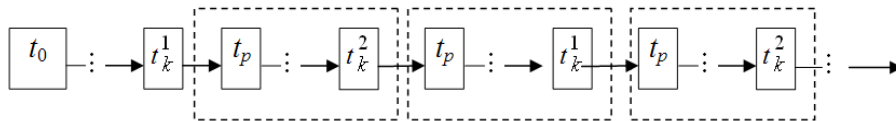


Рис. 5. Повторення кратних шаблонів у маршруті

Під час модифікації дерева шаблонів вносяться зміни до зв'язної частини необхідних шаблонів, ці зміни відбуваються відповідно до способу зв'язування (догори чи донизу). При модифікації кратних шаблонів застосовується правило перезв'язування.

Позначимо через  $t_{\text{new}}$  новий шаблон, який додається до ієрархії  $TT$ . Вважатимемо, що опис нового шаблону не збігається з описом довільного існуючого шаблону з  $TT$ .

**Означення 11.** Допустимими суміжними шаблонами для  $t_{\text{new}}$  (відповідно допустимими батьками або нащадками, залежно від способу зв'язування) називатимемо всі шаблони, після зв'язування яких з  $t_{\text{new}}$  дерево  $TT$  залишається скінченним.

**Твердження 5.** Нехай для  $t_{\text{new}}$  визначено множину нащадків і  $t_{\text{new}} \neq t_p$ . Шаблон  $t_p$  скінченного  $TT$  буде допустимим батьківським шаблоном для  $t_{\text{new}}$ , а, відповідно,  $t_{\text{new}}$  – допустимим нащадком для  $t_p$ , якщо  $(\{t_p\} \cup \text{fath}(t_p)) \cap \text{leg}(t_{\text{new}}) = \emptyset$ .

Доведення, як і для попереднього твердження, розглядається для випадку зв'язування донизу. Насамперед зазначимо, що жоден маршрут  $t_0, \dots, t_p$  не містить кратних шаблонів, оскільки б це суперечило умові скінченності  $TT$ , відповідно до твердження 4. Нехай серед нащадків  $t_{\text{new}}$  усіх поколінь не міститься шаблонів, кратних якомусь елементу з множини  $\{t_p\} \cup \text{fath}(t_p)$ . Сам  $t_{\text{new}}$  є новим, тому  $t_{\text{new}} \notin \{t_p\} \cup \text{fath}(t_p)$ . Отже, жоден маршрут  $t_0, \dots, t_p, t_{\text{new}}, \dots$  не містить кратних шаблонів, тому після зв'язування  $t_{\text{new}}$  з  $t_p$  дерево  $TT$ , за твердженням 4, буде скінченним, а  $t_{\text{new}}$  – допустимим нащадком для  $t_p$ .

Навпаки, припустимо, що існує маршрут  $t_0, \dots, t_p, t_{\text{new}}, \dots$  з кратними шаблонами одного сімейства. Згідно з твердженням 4, дерево, що містить такий маршрут, буде нескінченним, що суперечить умові та доводить це твердження.

**Наслідок.** Нехай  $t_p \in TT$ ,  $t_i \in TT$ . Шаблон  $t_p$  буде допустимим батьківським шаблоном для  $t_i$ , а  $t_i$  – допустимим нащадком для  $t_p$ , якщо  $(\{t_p\} \cup \text{fath}(t_p)) \cap (\{t_i\} \cup \text{leg}(t_i)) = \emptyset$ .

Доведення випливає з означення допустимого суміжного шаблону, а також тверджень 4 і 5.

**Твердження 6.** Нехай дано тип зв'язування донизу і  $\text{anch}(t_{\text{new}}) = \emptyset$ . Тоді  $t_{\text{new}}$  може бути допустимим нащадком для всіх шаблонів з  $TT$  і, навпаки, всі шаблони  $TT$  є допустимими батьками для  $t_{\text{new}}$ .

Доведення. Оскільки  $TT$  є скінченним, то жоден маршрут не містить кратних шаблонів одного сімейства. Новий шаблон не збігається з жодним існуючим в дереві, тому його зв'язування з якимось довільним шаблоном з  $TT$  не спричинить появу кратних шаблонів. Звідси випливає його максимальна допустимість в ролі нащадка.

Обґрунтування відповідних умов для зв'язування догори є аналогічними наведеним.

### Висновки

ШПП-система дозволяє динамічну модифікацію користувачами як контентної, так і структурної частини портальної системи, зокрема – проектування і динамічне додавання нових сутностей та модифікацію зв'язків між існуючими. Кратні шаблони надають можливість багатократного зв'язування однієї і тієї самої сутності у межах однієї ШПП-системи. Умови скінченності шаблонної ієрархії та допустимої суміжності шаблонів, описані та обґрунтовані у цій статті, є формальною основою алгоритмів модифікації дерева шаблонів у процесі функціонування порталу на основі ШПП. Дотримання цих формальних вимог забезпечує серверну частину від переповнення на рівні бізнес-логіки, а також дає змогу вести мову про структурну еволюцію порталу.

1. O'Reilly T. *What Is Web 2.0.* – <http://oreilly.com/web2/archive/what-is-web-20.html>.
2. Завадський І.О., Ткаченко О.М. Про один підхід до побудови мережевого освітнього середовища // *Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки.* – 2004. – №1. – С. 210–216.
3. Ткаченко О.М. Динамічне створення та зв'язування шаблонів у середовищі підтримки навчального процесу // *Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки.* – 2004. – №2. – С. 345–349.
4. Евстигнеев В.А. *Применение теории графов в программировании.* – М.: Наука, 1985. – 352 с.
5. *Основи дискретної математики: Підручник / Ю.В. Капітонова, С.Л. Кривий, О.А. Лещевський, Г.М. Луцький, М.К. Печурін.* – К.: Наук. думка, 2002. – 579 с.