УДК 004.421.2:517.443

І. Процько
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра систем автоматизованого проектування

ОСОБЛИВОСТІ ОБЧИСЛЕННЯ ЦИКЛІЧНИХ ЗГОРТОК ІДЕНТИЧНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Розглянуто особливість ефективного обчислення згорток для послідовностей, що містять повторення ідентичних груп елементів. Проаналізовано зменшення обчислювальної складності для швидких алгоритмів згортки цих послідовностей.

Ключові слова: лінійна згортка, циклічна згортка, швидка згортка, обчислювальна складність.

The specific of efficient computation convolutions for sequences consisting reiterative identical group elements is considered. The reduction of computational complexity the fast convolutions for identical sequences are denoted.

Keywords: linear convolution, circular convolution, fast convolution, computational complexity.

Вступ

Обчислення дискретних згорток широко застосовується в сучасних інформаційних технологіях для задач різноманітного призначення. Лінійні системи з постійними параметрами формують вихідний сигнал, що визначається через обчислення згортки, або в процесі знаходження вхідного за вихідним сигналом виконується обернення згортки. В процесі теоретичних і практичних застосувань поняття згортки розвивалось, доповнюючи свій зміст та набуваючи нових особливостей. Терміни “неперервна” і “дискретна”, “періодична” і “аперіодична”, “лінійна” і “кругова”, “циклічна, “польова” згортки можна зустріти у багатьох галузях інформаційних технологій. Актуальність ефективного обчислення дискретних згорток викликана важливістю їх використання в різноманітних застосуваннях, адже це є подальшою можливістю скорочення обчислювальних затрат під час виконання таких задач, як ідентифікація систем, виконання дискретних гармонічних перетворень, відновлення інформації та інших [1].

Аналіз літературних джерел

Існують різноманітні підходи до ефективного обчислення дискретних згорток. Найпоширенішим є ефективне обчислення згортки на основі теореми про швидку згортку. За теоремою швидкої згортки визначають пряме ефективне дискретне перетворення Фур’є над двома послідовностями згортки, потім поелементно перемножують отримані дані і виконують зворотне перетворення Фур’є [2]. Недоліки підходу – це значні похибки округлення, великі об’єми пам’яті для зберігання комплексних експоненціальних компонентів та все ще значний обсяг обчислень.

Застосування теоретико-числових перетворень (ТЧП) знайшло найбільше практичне поширення для обсягів, що є числами Ферма – $F=2^k+1$, $k=2^i$ та числами Мерсена – $M=2^p-1$, p – просте додатнє ціле число [3]. Відповідно до теореми швидкої згортки, для обчислення циклічної згортки необхідно визначити ТЧП двох послідовностей, поелементно перемножити одержані ТЧП і далі виконати зворотне ТЧП над отриманими добутками. Перевага ТЧП – точність перетворення в кільці цілих чисел. Недолік – залежність між довжиною послідовності і необхідною довжиною кодового слова, особливо для великих обсягів перетворення, що звужує область прикладного застосування ТЧП.

Згортку двох послідовностей можна обчислити добутком двох поліномів. Ефективне обчислення згорток на основі поліноміальних перетворень розглянуто також у роботах [4, 5]. У роботах Вайнограда визначено мінімальну мультиплікативну складову (число добутків) під час обчислення за алгоритмом на основі поліномінальних перетворень [6]. Для багатьох обсягів згорток, особливо простих значень, мінімальної мультиплікативної складової досягають ціною значного збільшення числа адитивних операцій. Обчислення згортки на основі поліноміальних перетворень забезпечує ефективність і точність обчислень, однак ускладнює програмування обчислень через конкретні особливості алгоритму для кожного обсягу перетворення, пов’язаного з переіндексацією та нерегулярністю взаємозв’язків між даними.

1. Обчислювальний взаємозв’зок лінійної та циклічної згорток

Дискретна лінійна згортка y(n) записується у вигляді

$$y(n)=\sum_{m=0}^{N-1}x(n)h(n-m)=\sum_{m=0}^{N-1}h(n)x(n-m), \qquad (1)$$
$$y(n)=x(m)\otimes h(m)=h(m)\otimes x(m),$$

де $\otimes$ – символ лінійної згортки, а $x(m)=h(m)=0$, $m<0$. Якщо послідовності $x(n)$ и $h(n)$ мають довжину відповідно N_1 і N_2, то з (1) випливає, що вихідний сигнал матиме в бічних діагоналях довжину $N=N_1+N_2-1$.

Можна лінійну згортку записати в альтернативній матричній формі

$$\begin{pmatrix} y(0)\\ y(1)\\ y(2)\\ \dots\\ y(n)\\ y(n+1)\\ \dots\\ y(2n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} h(0) & 0 & 0 & 0 & & 0\\ h(1) & h(0) & 0 & 0 & & 0\\ h(2) & h(1) & h(0) & 0 & & 0\\ \dots & & & & & \\ h(n) & h(n-1) & & h(1) & h(0) & \\ 0 & h(n) & & \dots & h(1) & h(0)\\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & h(n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(0)\\ x(1)\\ x(2)\\ \dots\\ x(n)\\ 0\\ \dots\\ 0\end{pmatrix} \qquad (2)$$

Тобто, y = H x , (3)

де x – вхідний вектор-стовпець обсягу N, y – вихідний вектор-стовпець обсягу N, H – матриця обсягу (Nx N), N=2n.

Основні властивості згортки (комутативність, дистрибутивність, асоціативність):

$$\begin{gathered} x1(t)\otimes x2(t)=x2(t)\otimes x1(t)\\ x1(t)\otimes[x2(t)+x3(t)]=x1(t)\otimes x2(t)+x1(t)\otimes x3(t)\\ x1(t)\otimes[x2(t)\otimes x3(t)]=[x1(t)\otimes x2(t)]\otimes x3(t)\end{gathered} \qquad (4)$$

Термін “циклічна згортка” характерний для формули запису згортки у вигляді

$$y(n)=\sum_{m=0}^{N-1}x(n)h(n-m)_N=\sum_{m=0}^{N-1}h(n)x(n-m)_N \qquad (5)$$
$$y(n)=x(n)\Theta\, h(n)=h(n)\,\Theta\, x(n)$$

де $h(n\text{-}m)_N$, $x(n\text{-}m)_N$ – операції індексів $(n\text{-}m)_N$ за модулем N; об’єднуються значення добутків лише з одного періоду або циклу обсягом N.

Тобто, матрична форма запису циклічної згортки буде

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ \ldots \\ y(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(0)\ \ h(3)\,h(2)\,h(1)\ldots h(n) \\ h(1)\ \ h(0)\,h(3)\,h(2)\ldots h(0) \\ h(2)\ \ h(1)\,h(0)\,h(3)\ldots h(1) \\ h(3)\ \ h(2)\,h(1)\,h(0)\ldots h(2) \\ \ldots \\ h(n)\,h(n-1)\ldots\ h(1)\,h(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ \ldots \\ x(n) \end{pmatrix} \tag{6}$$

Розмірність матриць лінійної згортки вдвічі більша від відповідної розмірності матриць циклічної (періодичної) згортки. На основі обчислення циклічної (періодичної) згортки можна визначити лінійні (аперіодичні) за допомогою доповнення нулями. Знаючи значення лінійної (аперіодичної) згортки, можна визначити циклічну (періодичну) згортку за допомогою накладання в часовій області.

Пряме (безпосереднє) обчислення циклічної згортки вимагає $M = n^2$ (добутків), $S = n^2\text{-}n$ (додавань) [7].

Таблиця 1

Кількість операцій під час обчислення циклічної згортки

Обсяг	2 3 4 5 6 7 8 9 10 11	n
Безпосереднє обчислення	<u>4 9 16 25 36 49 64 81 100 121</u> 2 6 12 20 30 42 56 72 90 110	<u>M</u> S
Мінімізоване обчислення	<u>2 4 5 8 8 13 12 16 30 46</u> 4 11 15 62 34 83 72 77 <100 356	<u>M</u> S

Мінімізоване обчислення враховує спеціальні алгоритми з мінімальним числом добутків (алгоритми Вайнограда) [6]. Однак, за загальною кількістю операцій (добутків і додавань) безпосереднє обчислення $S+M=(2n^2\text{- } n)$ для простих обсягів n краще, а мінімізоване обчислення краще при складених обсягах n. Мінімізація добутків у співвідношенні з загальною кількістю операцій не завжди виправдана, наприклад, n=5, M= 8 (10)+ S= 62 (31); n=8, M= 12 (14)+ S=72 (46).

Обчислення за теоремою швидкої згортки істотно зменшує кількість обчислювальних операцій порівняно з прямим обчисленням, вже починаючи зі значення обсягу перетворення N=128 (при використанні [2] алгоритму ШПФ Кулі–Тюкі з $2N\log_2 N$ – дійсних добутків та 3 $N\log_2 N$ – дійсних додавань за табл. 2).

Таблиця 2

Число дійсних множень при виконанні згортки 2^N-точкових обсягів

N	Прямий метод	Швидка згортка	(швидка згортка)/ (прямий метод)
8	64	448	7
16	256	1 088	4,25
32	1 024	2 560	2,5
64	4 096	5 888	1,4375
128	16 384	13 312	0,8125
256	65 536	29 696	0,4531
512	262 144	65 536	0,250
1024	1 048 576	143 360	0,1367
2048	4 194 304	311 296	0, 0742

Отже, використання ефективних обчислень дискретних згорток для конкретного значення обсягу має свої особливості та зменшує обчислювальну складність алгоритму. Теорема швидкої згортки, алгоритми на основі поліноміальних перетворень більше відповідають ефективному обчисленню циклічної згортки, хоч і не виключають можливість визначення лінійної.

2. Скорочення обчислень циклічних згорток для блочних структур даних

Матрична форма запису (3) циклічної згортки відображає особливість структури даних послідовностей, над якими виконується згортка

$$y = H\,x\,,$$

де x – вхідний стовпець обсягу N, y – вихідний стовпець обсягу N, H – квадратна матриця обсягу (NxN). Під час визначення вихідних значень згортки у багатьох прикладних задачах зустрічаються специфічні випадки структур даних, над якими виконуються згортки. До них належить повторюваність групи елементів та відповідна зміна знаків цих груп у послідовності згортки. Ці особливості визначають різноманітність блочно-матричних структур, які можуть привести до ефективнішого обчислення згортки. Обчислювальна складність циклічної згортки визначається швидким алгоритмом згортки і в загальному випадку представляється O(n), де n – обсяг циклічної згортки.

Розглянемо конкретні блочно-матричні структури, які задані особливістю повторення елементів однієї з послідовностей згортки. У випадку послідовності згортки виду

$$h(n) = (h_1, h_2,\ldots, h_m, h_1, h_2,\ldots, h_m),\ n=2m,$$

повторення групи елементів визначає блочно-матричну структуру і обчислення згортки виду

$$\begin{pmatrix} h(m)\,h(m) \\ h(m)\,h(m) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(m)\Theta(x_0 + x_1) \\ h(m)\Theta(x_0 + x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}; \tag{7}$$

у випадку послідовності виду h(n) = ($h_1, h_2,\ldots, h_m, -h_1, -h_2,\ldots, -h_m$), повторення групи елементів із протилежним знаком

$$\begin{pmatrix} h(m) - h(m) \\ -h(m)\,h(m) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(m)\Theta(x_0 - x_1) \\ -h(m)\Theta(x_0 - x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

де h(m) = ($h_1, h_2,\ldots, h_m$), x_0 =($x_1, x_2,\ldots, x_m$), x_1=($x_{m+1}, x_{m+2},\ldots, x_{2m}$), Θ-операція циклічної згортки. Обчислювальна складність циклічної згортки цієї послідовності *O(n/2)* визначається складністю виконання згортки вдвічі меншого обсягу.

За триразового повторення елементів послідовності

$$h(n) =(h_1, h_2,\ldots, h_m, h_1, h_2,\ldots, h_m\ h_1, h_2,\ldots, h_m),\ n=3m,$$

блочно-матрична структура для згортки набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} h(m)\,h(m)\,h(m) \\ h(m)\,h(m)\,h(m) \\ h(m)\,h(m)\,h(m) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(m)\Theta(x_0 + x_1 + x_2) \\ h(m)\Theta(x_0 + x_1 + x_2) \\ h(m)\Theta(x_0 + x_1 + x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

де h(m) = ($h_1, h_2,\ldots, h_m$), x_0 = ($x_1, x_2,\ldots, x_m$), x_1= ($x_{m+1}, x_{m+2},\ldots, x_{2m}$), x_2= ($x_{2m+1}, x_{2m+2},\ldots, x_{3m}$).

На основі властивостей згортки отримуємо рівність h Θ ($x_0 + x_1 + x_2$) = $h\Theta x_0 + h\Theta x_1 + h\Theta x_2$, однак за обчислювальною складністю ефективніше виконувати згортку суми, ніж суму згорток.

У випадку послідовності виду h(n) = ($h_1, h_2,\ldots, h_m, -h_1, -h_2,\ldots,-h_m, h_1, h_2,\ldots, h_m$) чергування груп знаків

$$\begin{pmatrix} h(m) - h(m)\,h(m) \\ -h(m)\,h(m)\,h(m) \\ h(m)\,h(m) - h(m) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(m)\Theta(x_0 - x_1 + x_2) \\ h(m)\Theta(-x_0 + x_1 + x_2) \\ h(m)\Theta(x_0 + x_1 - x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

Обчислювальна складність циклічної згортки цієї послідовності *O(n/3)* визначається складністю виконання згортки втричі меншого обсягу.

Блочно-матричні структури у (8,10) відповідають дво- і триточковим згорткам над m-мірними векторами ($h_1, h_2,\ldots, h_m$) та вектором суми x. Однак внаслідок однотиповості h(m) отримуємо формули обчислень (8,10) виконання m-точкових згорток від об'єднання вхідних даних.

Розглянуті випадки є частковим від загального, що розглянуто в [6], і показують спрощення обчислень внаслідок ідентичності набору елементів послідовності згортки. Наприклад,

$$\begin{pmatrix} \mathrm{h1(m)} & \mathrm{h2(m)} \\ \mathrm{h2(m)} & \mathrm{h1(m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{y(0)} \\ \mathrm{y(1)} \end{pmatrix} \qquad (11)$$

за алгоритмом двоточкової згортки

$$v_0 = (h_1(m) + h_2(m))/2 *(x_0 + x_1);$$
$$v_1 = (h_1(m) - h_2(m))/2 *(x_0 - x_1);$$
$$y_0 = v_0 + v_1;\ y_1 = v_0 - v_1.$$

У нашому випадку $h_1(m) = h_2(m) = h(m)$, то відповідно

$$y_0 = h(m)(x_0 + x_1);\ y_1 = h(m)(x_0 + x_1).$$

Отже, n/m – кількість повторень ідентичних груп елементів у послідовностях (в даному випадку для однієї з послідовностей) циклічної згортки обсягу – n приводить до зменшення обчислювальної складності алгоритму і дорівнює O(m), де m – кількість елементів у групі ідентичних повторень.

3. Спрощення обчислень в алгоритмах швидких згорток для блочних структур даних

Переведення одновимірної N-точкової циклічної згортки у багатовимірну приводить до обчислення згорток менших обсягів. Так, для переходу алгоритм Агарвала–Кулі [8] загалом містить такі етапи: спочатку одновимірна циклічна згортка за допомогою КТЗ для цілих чисел перетворюється на багатовимірну циклічну згортку; далі по кожному виміру (координаті) застосовується ефективний алгоритм коротких циклічних згорток; потім для об’єднання всіх одержаних перетворень використовується процедура, описана на основі прямого добутку (Кронекера) матриць. Цей перехід вимагає, щоб обсяг згортки розкладався на взаємно прості множники $N_1,N_2,\ldots$ Існує підхід переходу в багатовимірну згортку [9] на основі псевдоциркулянтної факторизації, який не вимагає взаємної простоти множників обсягу циклічної згортки N. Тому розглянемо зменшення обчислень для коротких обсягів з мінімальним числом добутків (алгоритми Вайнограда) [4,6] для послідовності, що містить повторення ідентичних груп елементів.

У випадку, коли одна з послідовностей циклічної згортки містить повторення групи елементів (парні обсяги згортки), то кількість арифметичних операцій для коротких циклічних згорток подано в табл. 3.

Таблиця 3

Кількість операцій під час обчислення парних циклічних згорток

Обсяг	2 4 6 8	n
Мінімізоване обчислення	<u>3 9 8 14</u> 4 20 34 46	<u>M</u> S
Повторення елементів	<u>1 2 4 5</u> 1 6 25 30	<u>M</u> S
Повторення елементів з протилежним знаком	<u>1 3 4 9</u> 1 7 25 24	<u>M</u> S

Алгоритми коротких згорток детально розписуються і узагальнено відповідають так званому гніздовому поданню, де всі обчислення множення зосередженні між вхідними і вихідними етапами об’єднання

$$Y = O\ H\ I\ x\,, \qquad (12)$$

де x, Y – відповідно, вхідний і вихідний стовпці; I – одинична матриця ($\mu\times N$) описує об’єднання вхідної послідовності; H – діагональна матриця множників ($\mu\times\mu$); O – одинична матриця ($N\times\mu$) описує вихідні об’єднання; в загальному випадку $\mu>N$. Наявність нулів в одиничних матрицях вказує на відсутність виконання адитивної операції.

Обчислення циклічної згортки за допомогою обчислення згорток менших обсягів використовується в методі парисекції [10, 11]. Вхідні і вихідні послідовності згортки можуть бути розщеплені на дві групи відповідно до парності елементів послідовності (Eh, Ex, Ey – парні і Oh, Ox, Oy – непарні вектори вихідної послідовностей). Тобто, згортку парних обсягів можна визначати через чотири згортки вдвічі менших обсягів.

$$y=h \otimes x ;$$
$$Ey = Eh \otimes Ex + Oh \otimes Ox ;$$
$$Oy = Eh \otimes Ox + Oh \otimes (Ex)'. \quad (13)$$

Інша версія цього підходу [12] визначає згортку парних обсягів через дві згортки вдвічі менших обсягів послідовностей, що відповідним чином зміщені

$$Ey=1/2(e+d) ;$$
$$Oy=1/2(d-e)'' ,$$

де $d = [Eh+(Oh)'] \otimes [Ex+(Ox)']$;

$$e = [Eh-(Oh)'] \otimes [Ex-(Ox)'] . \quad (14)$$

У випадку парних (n=2m) послідовностей h(n) або x(n) циклічної згортки, що містять повторення групи елементів, для парного - m матимемо повторення групи елементів

$$Eh=(h_2, h_4,\dots h_m, h_2, h_4\dots, h_m),\ Oh=(h_1, h_3,\dots, h_{m-1}, h_1, h_3,\dots, h_{m-1}), \quad (15)$$

що дасть змогу також скоротити обчислення за (13,14) за допомогою виконання вдвічі менших обсягів згорток над модифікованими послідовностями (15), які також містить повторення ідентичних груп елементів.

Отже, застосування швидких згорток для обчислення вихідного значення, коли одна з вхідних послідовностей містить повторення ідентичних груп елементів, дає змогу отримати ефективніші алгоритми опрацювання даних.

Висновки

Під час синтезу швидких алгоритмів дискретних гармонічних перетворень на основі згорток базисна функція часто містить повторення групи елементів та в багатьох інших прикладних областях зустрічаються особливості структури даних однієї з послідовностей згорток. Використання ефективних обчислень дискретних згорток для конкретного значення обсягу та структури даних має свої особливості і може привести до зменшення обчислювальної складності алгоритму. Однак, використання стандартних бібліотек алгоритмів коротких згорток не завжди виправдане і не враховує особливості послідовностей згорток.

Тому знання алгоритмів швидких згорток та їх реалізація дає змогу зменшити обчислювальну складність згорток для послідовностей з певною кількістю повторень ідентичних груп елементів. Так, в послідовностях (в даному випадку для однієї з послідовностей) циклічної згортки обсягу - n це приводить до зменшення обчислювальної складності алгоритму в $O(n)/O(m)$ разів, де m – кількість елементів у групі ідентичних повторень.

1. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. – М.: Техносфера, 2006. 2. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978. 3. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М. Цифровая обработка сигналов: Справочник. – М.: Радио и связь, 1985. 4. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1989. 5. Нуссбаумер Г.Дж. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. – М.: Радио и связь, 1985. 6. Макклеллан Дж., Рейдер Ч. Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов. – М.: Радио и связь, 1983. 7. Муттер В.М.Основы помехоустойчивой телепередачи информации. – Л.: Энергоатомиздат, 1990. 8. Agarwal, R.C. and J.W. Cooley,. New algorithms for digital convolution. IEEE Trans. On Acoustics, Speech, and Signal Processing, 25,1997, 392–410. 9. Marvi Teixeira, Y. Iván Rodríguez, Parallel Cyclic Convolution Based on Recursive Formulations of Block Pseudocirculant Matrices. IEEE Trans. On Signal Processing , vol. 56, no. 7, 2008, 27–55. 10. Pitassi D.A. Fast convolution using the Walsh transform // Applicat. Walsh Function. – 1971. – Apr. – p.130–133. 11. Daviss V.F. A class of efficient convolution algorithm // Applicat. Walsh Function. – 1971. – March.-p. 318–329. 12. Терещенко А.Н. Оптимизация метода Питасси вычисления свертки // Искусственный интеллект. – 2009. – 1. – С.204–212.