

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В'ЯЗКОПРУЖНОГО ДЕФОРМУВАННЯ КАПІЛЯРНО-ПОРИСТИХ МАТЕРІАЛІВ

© Соколовський Я., Мокрицька О., 2011

Наведено чисельне моделювання двовимірного в'язкопружного деформування деревини як трифазної системи з урахуванням механіко-сорбційної повзучості. Числова реалізація математичної моделі здійснена на основі методу скінченних елементів. Вивчено закономірності в'язкопружного деформування деревини залежно від різних факторів: лінійних розмірів, розподілу вологості, залежності реологічних властивостей від температури і вологості.

Ключові слова: математична модель, деревина, в'язкопружний стан, метод скінченних елементів, вологість, напруження.

Numerical simulation of two-dimensional viscoelastic deformation of wood as a three-phase system with regard to mechanical and sorption creep. Numerical implementation of the mathematical model is based on the finite element method. The regularities of viscoelastic deformation of wood depending on various factors: the linear size distribution of moisture, depending on the rheological properties on temperature and humidity.

Key words: mathematical model, wood, viscoelasticity, finite element method, moisture stress.

Вступ

Проблема розроблення нових та вдосконалення технологій гідротермічного оброблення капілярно-пористих матеріалів тісно пов'язана з вивченням деформаційно-релаксаційних і тепломасообмінних процесів. За умов обмежених ресурсів ці процеси залишаються найенергомічнішими. Адже тут проявляються особливості, пов'язані зі зміною структури матеріалів, порушенням форм міжмолекулярних зв'язків, наявністю механізмів руйнування матеріалу. Осушення капілярно-пористих матеріалів в умовах змінних потенціалів тепломасоперенесення супроводжується залишковими напруженнями, зміною більшості фізико-механічних властивостей, які визначають практичну цінність готової продукції. Великі напруження є основним фактором, що перешкоджає інтенсифікації процесів сушіння капілярно-пористих матеріалів. Важливим представником таких матеріалів є деревина зі складною дисперсною структурою та анатомічною будовою. Вирішення проблеми ускладнюється тим, що деревина належить до фізично нелінійних природних полімерів, характеризується високою гігроскопічністю та значною мінливістю фізико-механічних властивостей. Тому адекватний опис складної реологічної поведінки деревини з урахуванням особливостей капілярно-пористої будови та багатофазності можна отримати за допомогою математичного моделювання в'язкопружної поведінки деревини у змінних умовах тепломасоперенесення. У зв'язку з цим актуалізується числове моделювання в'язкопружного деформування деревини у межах механіки гетерофазних систем [1, 2] з урахуванням особливостей капілярно-пористої будови.

Математична модель

В основу математичної моделі покладено допущення, що деревина є трифазною системою, складається з деревного скелета (деревної речовини), сорбованої рідини, сухого повітря і пари, які

містяться у порожнинах. Кожна з фаз займає відповідну частину (V_T , V_p , V_{II} – об’єми концентрації твердої (т), рідкої (р) і парогазової фаз (п)) загального (геометричного) об’єму капілярно-пористого тіла. Складність капілярної структури деревини, мінливість різних фаз практично унеможливує визначення фактичних геометричних розмірів капілярів. Тому дослідження в’язкопружного деформування деревини здійснюються у межах механіки гетеро фазних систем [1, 2] з використанням методів усереднених мікрофаг. Такий підхід використано і у [3] для моделювання процесу пресування деревини. Якщо характерна розмірність пор і капілярів є набагато більшою від молекулярно-кінетичних розмірностей, а тверда фаза є нестискаючим матеріалом, то рівняння збереження усереднюються за окремими фазами.

Запишемо повний тензор напружень для гетерогенного середовища S^{kl} у вигляді суми усереднених напружень у фазах

$$S^{kl} = a_T \langle S_T^{kl} \rangle_T + a_p \langle S_p^{kl} \rangle_p + a_{II} \langle S_{II}^{kl} \rangle_{II} \quad (1)$$

$$\text{де } \langle S_T^{kl} \rangle_T = \frac{1}{dV} \int_{dV_T} S_T^{kl} d'V, \quad \langle S_p^{kl} \rangle_p = \frac{1}{dV} \int_{dV_p} S_p^{kl} d'V, \quad \langle S_{II}^{kl} \rangle_{II} = \frac{1}{dV} \int_{dV_{II}} S_{II}^{kl} d'V,$$

$$a_T = dV_T/dV; \quad a_p = \frac{dV_p}{dV}; \quad a_{II} = \frac{dV_{II}}{dV} \quad - \text{об’ємні концентрації твердої (т), рідкої (р) і}$$

парогазової (п) фаз; штрихом (') позначено усереднені параметри у межах мікрооб’єму $d'V \ll V_i^3$; верхні індекси, зокрема k і l, позначають компоненти тензора напружень.

Для малих деформацій елементарного мікрооб’єму можна записати співвідношення Коші щодо деформацій для деревної речовини

$$2e_T^{ij} = \frac{\partial \langle h_T^i \rangle_T}{\partial x^i} + \frac{\partial \langle h_T^j \rangle_T}{\partial x^j}; \quad i, j = 1, 2; \quad (2)$$

де $\langle h_T^i \rangle_T$ – усереднені зміщення деревної речовини. Окрім того, можна записати

$$e_T^{ik} - e_{T0}^{jk} = 1 - a_T/a_{T0}, \quad (3)$$

де e_{T0}^{jk} , a_{T0} – компоненти деформацій та об’ємна концентрація твердої фази у початковий момент часу.

Для числового моделювання в’язкопружного стану деревини під дією температурно-вологісного навантаження скористаємось двовимірною моделю. Її розглядаємо з двох міркувань: по-перше, напруження, що виникають у деревині у процесі сушіння в тангенціальному та радіальному напрямках анізотропії, значно перевищують напруження у напрямі волокон та є основним джерелом дефектів у визначених пиломатеріалах; по-друге, розмір матеріалів вздовж волокон практично завжди значно більший від розмірів поперек волокон.

Отже, математична модель задачі включає розгляд рівнянь рівноваги в області поперечного перетину прямокутного дерев’яного бруса $\Omega = \{(x, y) : x \in (0, l_1), y \in (0, l_2)\}$, центр якого суміжний з початком координат

$$\begin{aligned} \frac{\partial (a_T \langle S_{TX} \rangle_T)}{\partial x} + \frac{\partial (a_T \langle S_{TXY} \rangle_T)}{\partial y} + p_T \frac{\partial c_T}{\partial x} + Q_1 &= 0; \\ \frac{\partial (a_T \langle S_{TY} \rangle_T)}{\partial x} + \frac{\partial (a_T \langle S_{TY} \rangle_T)}{\partial y} + p_T \frac{\partial c_T}{\partial y} + Q_2 &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

де $p_T = -\frac{1}{3} \langle S_T \rangle_T$, Q_1 , Q_2 – складові потоків масоперенесення у рідкій і газоподібній фазах деревини; S_x , S_y , S_{xy} – компоненти напружень.

Граничні умови, що задовольняють рівняння (4), характеризують площкові значення напружень на поверхні прямокутного дерев'яного бруска:

$$\langle \mathbf{s}_{Tx} \rangle_T = 0; \langle \mathbf{s}_{Ty} \rangle_T = 0; \langle \mathbf{s}_{Txy} \rangle_T = 0.$$

Деревина й деревні матеріали належать до класу фізично нелінійних, неоднорідних й анізотропних полімерів, які складаються з високомолекулярних сполук і характеризуються істотною гідрофільністю та значною мінливістю фізико-механічних властивостей.

У процесі деформування специфічні властивості деревини зумовлюють зміну капілярно-парової структури матеріалу і полів масоперенесення. Для моделювання напружено-деформованого стану деревини у твердій фазі прийнято модель спадкових середовищ [4, 5], яка відображає пружні, в'язкопружні та залишкові деформації. Окрім цих деформацій, експериментальні дослідження [6] свідчать про наявність у деревині деформацій механіко-сорбційної повзучості, пов'язаної залежністю процесу деформування не лише від зміни (градієнта) вологості, але й від швидкості зміни вологості. Відношення механіко-сорбційної деформації e_{MC} до пружної пропорційне до величини $EU(t)$, де s визначається співвідношенням $s = \int_0^t m(U) \frac{\partial W}{\partial t} dt$ (m – компоненти механіко-сорбційної деформації).

Величина e_{MC} є найбільшою у деревині гігроскопічної вологості й поступово знижується зі зменшенням такої вологості. З іншого боку, всихання приповерхневих зон деревини зумовлює збільшення механіко-сорбційних деформацій всередині матеріалу. Тобто e_{MC} визначається одночасно взаємодією механічного навантаження і швидкості зміни вологості. Окрім того, величина e_{MC} не є інваріантом для механічного навантаження, зокрема для розтягу і стискання у напрямках анізотропії. Такі висновки вказують на складність механізму механіко-сорбційної повзучості. Для моделювання деформування деревини як трифазної системи з урахуванням пружних, в'язкопружних деформацій, а також деформацій, зумовлених механізмом механіко-сорбційної повзучості використано математичну модель [7]. Співвідношення, які описують деформаційно-релаксаційні процеси у деревині, мають вигляд

$$\begin{aligned} e^{ij}(t) = & (D_T + A_{MK}) \mathbf{s}^{ij} + (D_T \mathbf{a}_\Pi + A_{MK} \mathbf{g}_1) p_\Pi d^{ij} + (D_T \mathbf{a}_P + A_{MK} \mathbf{g}_2) p_P d^{ij} + \\ & + \int_0^t ((D_T K(t, t) + A_{MK} K_\phi(t, t)) \mathbf{s}^{ij} + (D_T K(t, t) \mathbf{a}_\Pi + \\ & + A_{MK} K_\phi(t, t) \mathbf{g}_1) p_\Pi d^{ij} + (D_T K(t, t) \mathbf{a}_P + A_{MK} K_\phi(t, t) \mathbf{g}_2) p_P d^{ij}) dt - m \frac{\partial U_T}{\partial t} - \mathbf{b} e_T^U \end{aligned} \quad (5)$$

Введено такі позначення: $D_T = \Pi / \mathbf{a}_T$; $A_{MK} = \Pi_\phi / (1 - c_{MK})$; $\mathbf{g}_1 = c_{MK} (\mathbf{a}_{MK}^P - \mathbf{a}_K^P) + \mathbf{a}_K^P$; $\mathbf{g}_2 = c_{MK} (\mathbf{a}_{MK}^\Pi - \mathbf{a}_K^\Pi) + \mathbf{a}_K^\Pi$; Π – тензор миттєвих піддатливостей деревини; Π_ϕ – фіктивний тензор піддатливості; $K(t, t)$ і $K_\phi(t, t)$ – відповідно ядра повзучості для визначення реологічної поведінки деревної речовини, за відомими методиками залежно від конкретного виду ядер релаксації; \mathbf{b} – коефіцієнти тензора всихання; \mathbf{s}^{ij} – одиничний тензор. Інші позначення наведено у [7].

Числові дослідження та аналіз результатів

Для реалізації математичної моделі (4) – (5) з граничними умовами використано метод скінченних елементів [9, 10]. Програмну реалізацію МСЕ для цієї задачі відповідно до об'єктно-орієнтованого підходу наведено у [11]. Створене програмне забезпечення складається із задокументованих класів, які відповідають концепції застосування МСЕ.

Важливим моментом у процесі числового моделювання є вибір функцій реологічної поведінки деревини $K(t, t)$ і $K_0(t, t)$, які входять у реологічну модель (5).

Функції реологічної поведінки деревини $K(t, t)$, $K_\phi(t, t)$ вибирають у вигляді

$$K(t, t) = d_0 + \sum_{i=1}^N d_i \exp\left(\frac{-b_i(t-t)}{t_p}\right), \quad (6)$$

де d_0 , d_i , b_i і t_p – час релаксації визначають за допомогою апроксимації експериментальних даних деформацій повзучості [4, 12, 13].

Наприклад, для $U = 0.14$ і температури $T = 60^\circ C$ значення коефіцієнтів апроксимації ядра $K(t, t)$ для деревини сосни такі: $d_0 = 4,9001$; $d_1 = 1,143$; $d_2 = 1,142$; $d_3 = 1,144$; $b_1 = 1,447$; $b_2 = 0,052$; $b_3 = 0,054$; $d'_1 = 1,447$; $d'_2 = 0,052$; $d'_3 = 0,823$.

Для числового експерименту приймали такі значення компоненти тензора П: модулі Юнга $E_1 = 14,3$, $E_2 = 0,42$, $G_{12} = 0,71$ (у Гпа), $n_{21} = 0,031$. Коефіцієнт всихання $b = 6,8\%$. Компоненти механіко-сорбційної деформації дорівнюють [14]: $m_1 = 0,1 \cdot 10^{-3}$ МПа⁻¹; $m_2 = 0,2$ МПа⁻¹; $m_{12} = 0,008$ МПа⁻¹.

Для здійснення розрахунків в'язкопружного стану деревини потрібно визначити величини об'ємних вмістів твердої фази a_T , рідкої a_p і пароповітряної фаз a_{II} . Приймаємо, що $V = V_T + V_p + V_{II}$. Значення відносного внеску кожної фази в загальний об'єм можна знайти за заданим розподілом вологості матеріалу.

Для абсолютно сухого стану маса деревини визначається масою деревної речовини $m_T = r_0 V_0 = r_T V_T$, де V_0 , r_0 – об'єм та густина деревини в абсолютно сухому стані. Звідси можна отримати значення величини $V_T/V_0 = r_0/r_T$. Враховуючи, що значення вологовмісту деревини U знаходять за формулою $U = r_p V_p / r_0 V_0$, можна одержати, що $V_p/V_0 = r_0 U / r_p$ і $V_{II}/V_0 = V_T/V_0 - r_0 U / r_p - r_0 / r_T$, де r_p – густина рідини. Для розрахунків можна скористатися експериментальними даними [4] визначення площі поверхні F_m в одиниці маси. Зокрема, для деревини сосни $F_m = 0,892 - 0,977$ м²/г, а для ялини $F_m = 0,865 - 0,935$ м²/г. Перехід від величини F_m до площі поверхні розділу фаз (площі поверхні в одиниці об'єму деревини) здійснюється за формулою $F = r F_m$, де r – густина деревини.

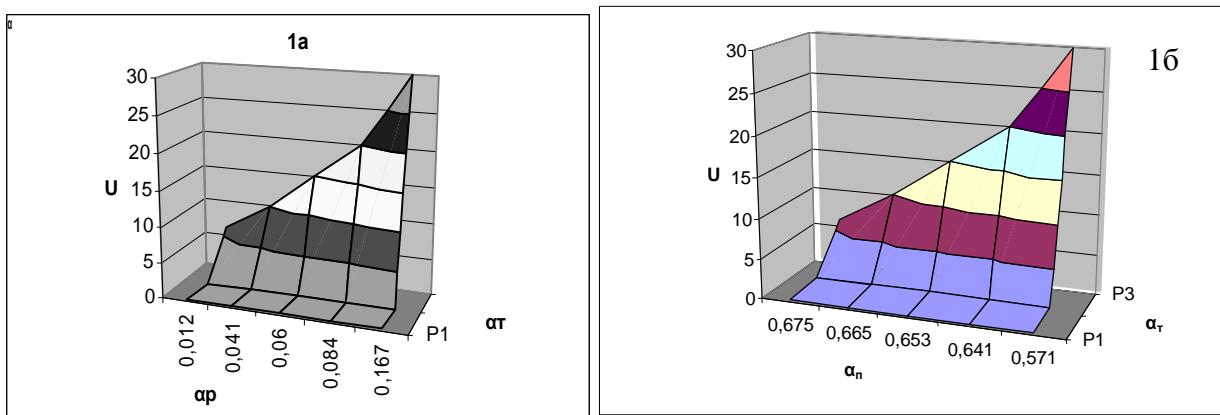


Рис. 1. Залежність складових трифазного середовища від вологи

На рис. 1, а, б наведено графічні залежності об'ємного вмісту твердої, рідкої і пароповітряної фаз залежно від вмісту води для деревини ($r_0 = 460 \text{ кг/м}^3$).

Пов'яжемо поверхні взаємодії окремих фаз з вологістю деревини та відносною зміною об'єму. Для цього прийемо, що останній лінійно залежить від вологості, тобто $(V_V - V_0)V_0 = bU$, де b – коефіцієнт всихання. Тоді можна отримати, що $V_T/V_V = r_0U/(1 + bU)r_p$; $V_{II}/V_V = 1 - (r_0/r_T + r_0/r_pU)/(1 + bU)$. Для розрахунків густину деревини для цієї вологості U визначаємо за формулою [4]

$$r_U = \begin{cases} K_{a_1} r_{12} \frac{100 + U}{100 + K_{a_2} U}, U \leq 30\%; \\ K_{a_3} r_{12} (1 + 0.01U), U > 30, \end{cases}$$

де r_{12} – нормалізована вологість для різних порід деревини, а $K_{a_1} = 0,957$, $K_{a_2} = 0,6$, $K_{a_3} = 0,81$ для листяних порід і $K_{a_1} = 0,946$, $K_{a_2} = 0,5$, $K_{a_3} = 0,823$ для хвойних порід.

Оскільки на поверхні контакту рідкої і пароповітряної фаз виникає різниця тисків, зумовлена силою поверхневого натягу, то величину p_p можна подати у вигляді суми

$$p_p = p_{II} + p_{K.T}, \quad (7)$$

де $p_{K.T}$ – капілярний тиск, що залежить від вологості деревини.

Згідно з [15, 16] величину $p_{K.T}$ можна визначити як середній капілярний тиск рідини у порах капілярно-пористого тіла. Капілярний тиск для циліндричних капілярів радіуса r обчислюють за формулою Лапласа $p_{K.T} = \frac{2s(T)}{r}$, $s = 0,07564(1 - 0,02T)$. Тоді об'єм рідкої фази у капілярах визначається залежністю $dV(r) = q(r)c(r)pr^2 f(r)dr$, де $c(r)$ – середня довжина капілярів, $q(r)$ – частка об'єму капілярів, заповнених рідкою фазою, $f_v(r)$ – диференціальна функція заповнення пор за об'ємом. Середнє значення капілярного тиску визначається формулою

$$p_{K.T} = 2s(T) \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} q(r)c(r)rf_v(r)dr \bigg/ \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} q(r)c(r)r^2 f_v(r)dr \approx \frac{2s(T)}{r^*}, \quad (8)$$

де r_{\min} , r_{\max} – мінімальні і максимальні радіуси капілярних пор; r^* – параметр дисперсності розмірів пор ($r_{\min} \leq r^* \leq r_{\max}$). Величину r^* встановлюють на основі експериментальних даних функції розподілів об'ємів пор за розмірами [17, 18].

Для визначення деформацій у (5), які відповідають всиханню матеріалу, використовують коефіцієнти всихання [4, 13], отримані експериментально для різних порід деревини.

Параметри функцій реологічної поведінки деревини (6), а саме d_0 , d_{ij} , $b_{\partial j}$, e_p знаходять за допомогою апроксимації експериментальних даних кривих повзучості [12] у радіальному і тангенціальному напрямках. Пружні властивості матеріалу, залежні від температури і вологості, апроксимовані на основі експериментальних даних [4].

Для чисельної реалізації розглянуто різні співвідношення геометричних розмірів деревного зразка. Нагрівання зразка здійснювалося для температури середовища $T_c = 64^\circ \text{C}$ і відносної вологості $j = 0,75$ до моменту, коли різниця між температурою середовища і центром зразка не досягала 3°C . Після цього переходили до розрахунків з такими параметрами середовища: $T_c = 79^\circ \text{C}$, $j = 0,71$.

На рис. 3 і 4 показано залежності нормальних S_{Tx} і тангенціальних S_{Txy} напружень залежно від значень вологості й тривалості нагрівання. Розрахунки свідчать про те, що розподіл та динаміка напружень у матеріалі має складний характер. Збільшення вологості істотно впливає на деформативність деревини і зменшує значення нормальних напружень. Зменшення вологості матеріалу зумовлює зростання тангенціальних напружень у поверхневих шарах матеріалу порівняно з середнім шаром.

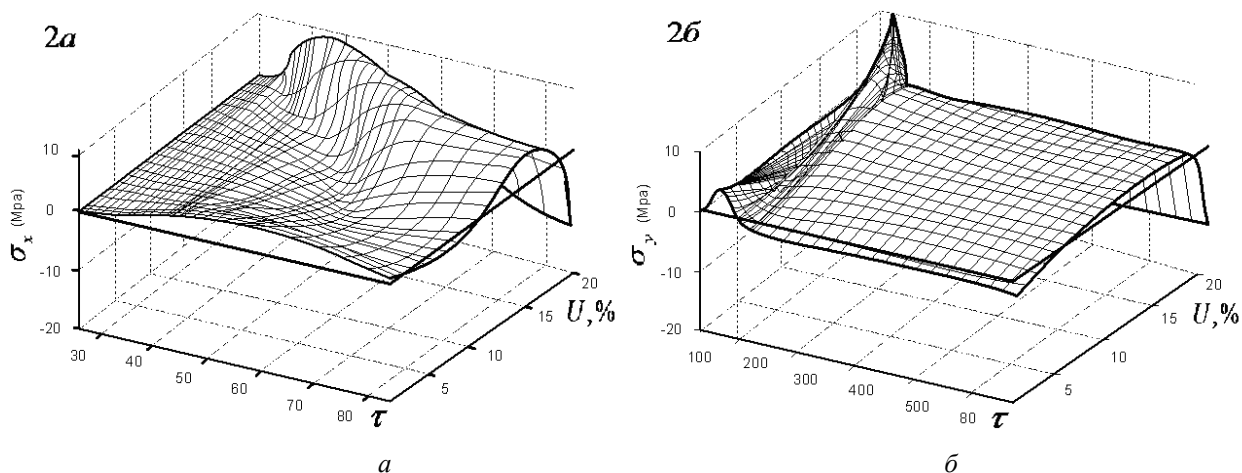


Рис. 2. Зміни компонент напружень у часі для різних значень вологості

Апробували математичну модель, порівнюючи отримані дані досліджень у випадку ($a_T = 1, a_p = 0, a_{II} = 0$) з відомими результатами для гомогенних середовищ. Їх аналіз свідчить про задовільний збіг отриманих результатів числового моделювання.

Висновок

Виконано чисельне моделювання в'язкопружного стану деревини як трифазної системи. Досліджено вплив об'ємного вмісту фаз на розподіл напружено-деформівного стану деревин з урахуванням механізму сорбційної повзучості. Досліджені закономірності розвитку в'язкопружного деформування деревини залежно від зміни вологісного навантаження.

1. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. – М.: Наука, 1978 – 336 с.
2. Николаевский В.Н. Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984 – 232с.
3. Дорняк О.Р. Математическое моделирование, компьютерная оптимизация технологий, параметров оборудования и систем лесного комплекса// Межв. сборн. науч. тр. ВГЛТА. – Воронеж, 2001. – 132–139 с.
4. Уголев Б.Н. Древесиноведение и лесное товароведение. – М., 2002 – 260 с.
5. Соколовський Я.І. Взаємозв'язок деформаційно-релаксаційних і тепломасообмінних процесів у капілярно-пористих тілах // Доповіді НАН України, пр. Механіка, 1998, №9. – С.76–80.
6. Raufmann A., Korfenman M. An analysis of the state of stress of timfev caund by moisture gradient // IUFRO Timfev Engineering Meeting, 1988. – 113–116 p.
7. Sokolowskyy Ya., Mokritskyy O., Sokolowskyy Ya. Mathematical simulation of deformatical and relaxation process in capillary-porous materialis // Forestry, Forest, Paper and Woodworking Industry, 2010. – №36. – P.116 – 124.
8. Копысов С.П. Комбинированное уточнение по p- и h-версии МКЭ при решении трехмерных задач теории упругости / С.П. Копысов, С.Л. Устюжанин // XIII Всероссийская конференция, посвященная памяти К.И. Бабенко «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов для решения задач математической физики». – Пушино: 2000.
9. Zienkiewicz O.C. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals/ Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhov. Z. // Elsevier. Oxford, 6-th Edition, 2005. – 792 p.
10. Мокрицька О., Соколовський Я. Об'єктно-орієнтована реалізація методу скінченних елементів для розрахунку в'язкопружного стану капілярно-пористих матеріалів //

Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка" «Комп'ютерні науки та інформаційні технології», 2011, №710, с.181–188. 11. Соколовський Я.І., Андрашек Й.В. Методика та результати експериментальних досліджень реологічної поведінки деревини // Науковий вісник: зб. наук.-техн. пр. Львів, УкрДЛТУ, 1999. – Вип. 9.13. – С. 15–26. 12. Rodic J., Jayne A. *Mechanics of Wood and Composites*. – Van Nostrand Reinhold. New York, 1982 – 712 p. 13. Raufa-Mannus A., Korfenman M. *An analysis of the state of stress of timber caused by moisture gradient*// IUFRO Timfey Engineering Meeting, 1988. – P. 113–116. 14. Бурак Я., Кондрат В., Гайвась Б. До математичного моделювання процесу сушіння пористих тіл // Інформативно-математичне моделювання складних систем. – Л.: Спайн, 2002. – С. 153–159. 15. Никитенко Н.И., Снежкин Ю.Ф., Сорокова Н.Н. Математическое моделирование динамики процесса обезвоживания слоя диспергированного коллоидного капиллярно-пористого материала // Пром. техника, 2006, Т.28, №3. – С. 28–37. 16. John F. Sian. *Wood: influence of moisture on physical properties*. – Virginia, 1995. – 227 p. 17. Чудинов Б.С. *Вода в древесине*. – М.: Наука, 1984. – 270 с.

УДК 531.36+534

М. Назаркевич

Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра інформаційних технологій видавничої справи

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ДОКУМЕНТІВ НА ОСНОВІ АПЕРІОДИЧНИХ АТЕВ-ФУНКЦІЙ

© Назаркевич М., 2011

Побудовано метод ідентифікації на основі аперіодичних Атев-функцій, яка є обов'язковою та невід'ємною умовою ефективного захисту. Ідентифікацію здійснено на основі кореляційних методів порівняння з еталоном на основі максимуму кореляції та метрики Мінковського. Як додатковий параметр у просторі ознак введено похідні Атев-функцій.

Ключові слова: метод ідентифікації, кореляційні методи, метрика простору.

The identification method based on aperiodic Ateb-functions was developed, which is a mandatory and an essential condition of effective protection. Identification is based on a correlation comparison with the ethalon by methods based on the maximum correlations and Minkowski metric. Derivatives of Ateb-functions were introduced as an additional option in the feature space.

Keywords: identification method, correlation methods, spase metric.

Вступ

Поруч з проблемою захисту документів одночасно постає проблема їх ідентифікації. Ідентифікація й оцінювання достовірності поліграфічних документів є обов'язковими й невід'ємними умовами ефективного захисту. У роботах [1] автори навели метод і на його основі програмний продукт для побудови елементів захисту, геометричною базою фігур якого є графіки Атев-функцій. У зв'язку з цим виникає задача ідентифікації документів, захищених на основі Атев-функцій. На основі цієї технології захисту запропоновано методи ідентифікації поліграфічних документів, що є практично важливим завданням.