

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ЗОВНІШНЬОГО СЕРЕДОВИЩА НА НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМІВНИЙ СТАН ДЕРЕВИНИ У ПРОЦЕСІ СУШІННЯ

© Крошний І., Соколовський Я., 2011

Сформульовано математичну модель тепломасоперенесення та деформування капілярно-пористих матеріалів у процесі сушіння з урахуванням пружних, в'язкопружних і пружно-пластичних деформацій. Здійснено чисельне моделювання та досліджено закономірності впливу основних факторів процесу сушіння на розвиток напружено-деформівного стану деревини в умовах неізотермічного вологоперенесення.

Ключові слова: математична модель, процес сушіння, тепломасоперенесення, в'язкопружний стан, деревина, метод скінченних елементів.

In the article is formulated a mathematical model of heat and mass transfer and deformation of capillary-porous materials during drying, taking into account elastic, viscoelastic and elastic-plastic deformations. Done numerical simulation and studied patterns of the major factors influence the drying process on the development of stress-deformable of wood in a non-isothermal moisture transfer.

Key words: mathematical model, the process of drying, heat and mass transfer, viscoelastic state, wood, finite element method.

Актуальність досліджень

Сушіння капілярно-пористих матеріалів широко використовується у різних галузях промисловості й потребує значних енергетичних, часових і матеріальних затрат. Тому підвищення енерго- і ресурсозбереження за умови дотримання необхідної якості продукції є важливим завданням. У цьому аспекті перспективним для розв'язання цієї проблеми є розроблення математичних моделей та методів дослідження спрощених процесів тепломасоперенесення та деформування капілярно-пористих матеріалів у процесі сушіння, які дають можливість здійснювати деталізацію технології сушіння, прогнозувати якість готової продукції та розробляти обладнання для забезпечення заданої ефективності. Вирішення цієї проблеми ускладнюється тим, що деревина належить до класу фізично нелінійних гідрофільних полімерів, які характеризуються значною мінливістю структурних і механічних властивостей.

Аналіз одержаних результатів

Сьогодні побудовано одновимірні математичні моделі пружного і в'язкопружного деформування деревини [1 – 3]. Застосування числових методів дало змогу розв'язати двовимірні задачі розрахунку напружень в об'ємі висушеної деревини відповідно до теорії пружності [4, 5]. Математичні моделі неізотермічного вологоперенесення і в'язкопружного стану деревини у процесі сушіння побудовано у працях [6 – 8]. У них враховується вплив анізотропії механічних і температурно-вологісних властивостей матеріалу за допомогою емпіричних залежностей, отриманих на основі експериментальних досліджень. Згідно з підходами моделювання багатофазних середовищ в [9, 10] отримано систему рівнянь тепломасоперенесення з врахуванням фазових перетворень та всихання вологих матеріалів у процесі сушіння. Однак все ще недостатньо висвітлені питання встановлення залежностей зв'язку між компонентами напружено-деформівного

стану капілярно-пористих матеріалів з параметрами зовнішнього і внутрішнього процесів тепломасоперенесення. Тому метою цієї роботи є обґрунтування фізично коректної математичної моделі та чисельних методів розрахунку неізотермічного волого- і теплоперенесення двовимірного в'язкопружного та пластичного деформування деревини у процесі сушіння з врахуванням анізотропії змінних тепломеханічних характеристик, залежних від зміни температури і відносної вологості середовища (агента процесу сушіння).

Математична модель. Сформулюємо математичну модуль визначення розподілу температури $T(X, \tau)$, вологовмісту $U(X, \tau)$, компонент деформацій $\varepsilon_{ij}(X, \tau)$ та напружень $\sigma_{ij}(X, \tau)$ у процесі сушіння капілярно-пористого матеріалу на прикладі дерев'яного бруса протягом часу $\tau \in [0, \tau_{\text{суш}}]$. Розглядаємо поперечний перетин матеріалу $W = \{X = (x_1, x_2); x_1 \in [0, l_1], x_2 \in [0, l_2]\}$, центр якого сумісний з початком координат, а осі анізотропії збігаються з координатними осями (l_1, l_2 – геометричні розміри бруса). Побудовано систему модельних рівнянь.

Рівняння для визначення температурних і вологісних полів тепло- і масоперенесення мають вигляд:

$$c r \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(I_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(I_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) + e r_0 r \frac{\partial U}{\partial t}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(a_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(a_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(a_1 d \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(a_2 d \frac{\partial T}{\partial x_2} \right).$$

Початкові умови:

$$U|_{t=0} = U_0; T|_{t=0} = T_0, \quad (2)$$

Граничні умови:

$$I_i \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{x_i=l_i} + r_0 (1 - e) b_i (U|_{x_i=l_i} - U_p) = a_i (T_c - T|_{x_i=l_i}), \quad (3)$$

$$\left(a_i \frac{\partial U}{\partial n} + a_i d \frac{\partial T}{\partial n} \right) \Big|_{x_i=l_i} = b_i (U_p - U|_{x_i=l_i}),$$

$$\left(a_i \frac{\partial U}{\partial n} + a_i d \frac{\partial T}{\partial n} \right) \Big|_{x_i=0} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{x_i=0} = 0; \quad i = 1, 2.$$

У цьому випадку $T_0(X)$, $U_0(X)$ – початкові розподіли температури та вмісту вологи у матеріалі; $U_p(T_c, j)$ – рівноважна вологість; $c(T, U)$ – теплоємність; $r(U)$ – густина; $I_i(T, U)$ – коефіцієнти теплопровідності у напрямках анізотропії; e – коефіцієнт фазового переходу; r_0 – базисна густина; r – питома теплота пароутворення; $d(T, U)$ – термоградієнтний коефіцієнт; $a_i(T, U)$ – коефіцієнти вологопровідності у напрямках анізотропії; $a_i(T_c, v)$ – коефіцієнти теплообміну; $b_i(T_c, j, v)$ – коефіцієнти вологообміну; T_c – температура середовища; $j(t)$ та $v(t)$ – відносна вологість та швидкість руху агента сушіння відповідно; n – вектор зовнішньої нормалі границі області W , τ – поточний час. Під час моделювання процесу сушіння в періоді нерегулярного режиму початковий розподіл вологовмісту у деревині приймається сталим, а в періоді регулярного режиму початковий вологовміст змінюється за параболічним законом.

Компоненти вектора напружень $\mathbf{s}_{ij} = (s_{11}, s_{22}, s_{12})$ задовольняють рівняння рівноваги:

$$\frac{\partial s_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial s_{12}}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial s_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial s_{22}}{\partial x_2} = 0. \quad (4)$$

Граничні умови враховують відсутність зовнішніх зусиль:

$$\mathbf{s}_{ij} \Big|_{x_1=l_1, x_2=l_2} = 0. \quad (5)$$

Моделювання в'язкопружних напружень та деформацій у деревині під час сушіння ґрунтоване на законах усадки гігроскопічних матеріалів та інтегральних рівняннях спадкової теорії Больцмана–Вольтера і визначається формулами:

$$\begin{aligned}
s_{11}(t) &= C_{11}(T, U)[e_{11}(t) - e_{U1}] - C_{11}(T, U) \int_0^t R_{11}(t-s, T, U)[e_{11}(t) - e_{U1}] ds + \\
&+ C_{12}(T, U)[e_{22}(t) - e_{U2}] - C_{12}(T, U) \int_0^t R_{12}(t-s, T, U)[e_{22}(t) - e_{U2}] ds; \\
s_{22}(t) &= C_{21}(T, U)[e_{11}(t) - e_{U1}] - C_{21}(T, U) \int_0^t R_{21}(t-s, T, U)[e_{11}(t) - e_{U1}] ds + \\
&+ C_{22}(T, U)[e_{22}(t) - e_{U2}] - C_{22}(T, U) \int_0^t R_{22}(t-s, T, U)[e_{22}(t) - e_{U2}] ds; \\
s_{12}(t) &= 2C_{33}(T, U)e_{12}(t) - 2C_{33}(T, U) \int_0^t R_{33}(t-s, T, U)e_{12}(s) ds,
\end{aligned} \tag{6}$$

де $\mathbf{e}_U = (e_{U1}, e_{U2}, e_{U3})^T$ – вектор компонент деформацій, які виникають внаслідок зміни температури і вологовмісту; C_{ij} – компоненти тензора пружності анізотропного тіла. Величини e_{Ui} , C_{ij} визначають за формулами:

$$\begin{bmatrix} e_{U1} \\ e_{U2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \Delta T + b_1 \Delta U \\ a_2 \Delta T + b_2 \Delta U \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - u_1 u_2} & \frac{u_1 E_2}{1 - u_1 u_2} & 0 \\ \frac{u_1 E_2}{1 - u_1 u_2} & \frac{E_2}{1 - u_1 u_2} & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix},$$

де ΔT , ΔU – відповідно приріст температури і вологовмісту; $E_i(T, U)$ – модулі Юнга; $\nu_i(T, U)$ – коефіцієнти Пуассона; $\mu(T, U)$ – модуль зсуву.

Функції реологічної поведінки деревини у процесі сушіння з урахуванням механізму накопичення незворотних деформацій вибирають у вигляді

$$e^*(t) = \left[a_0 - \sum_{i=1}^M a_i \exp(-b_i t) \right] h(t) h(t_0 - t) - \left[a_0 - \sum_{i=1}^M a_i \exp(-b_i (t - t_0)) \right] h(t - t_0), \tag{7}$$

де $h(\tau)$ – функція Хевісайда, а невідомі коефіцієнти a_i , b_i , α_i , β_i визначено методом найменших квадратів на основі апроксимації експериментальних даних повзучості зразків деревини під навантаженням та після розвантаження [11].

Аналіз експериментальних досліджень реологічної поведінки деревини [12] свідчить про те, що у матеріалі під час стискання у радіальному напрямі в момент прикладання навантажень, окрім пружних деформацій, які не залежать від величини навантаження, виникають миттєві необоротні після розвантаження деформації, причому їхня величина збільшується зі зростанням зовнішнього навантаження на зразок. За природою ці деформації є пластичними, хоча відомо, що пластичні деформації у матеріалах проявляються у разі досягнення границі повзучості. Але, за даними робіт [12, 13], пластичні деформації у деревині помітні вже на пружній стадії деформування. Збільшення навантаження зумовлює накопичення пластичних деформацій.

Для моделювання пластичних властивостей деревини використано теорію пластичного плинуну Прандтля–Рейса [14]:

$$\begin{aligned}
de_{ij} &= s_{ij} dI + \frac{ds_{ij}}{2s}; \quad dI = \frac{3}{2} \frac{de^{nn}}{Hs}; \\
de^{nn} &= \frac{3}{2} \sqrt{de_{ij}^{nn} de_{ij}^{nn}}; \quad H = \frac{d\bar{s}}{de^{nn}}; \quad \bar{s} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}},
\end{aligned} \tag{8}$$

де e_{ij} , s_{ij} – девіатори деформацій та напружень.

Згідно із законами пластичності [14], можна записати лише співвідношення між диференціалами напружень і деформацій. Тоді з (8) можна записати

$$ds_{ij} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(de_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} d_{ij} de_{ij} - s_{ij} \frac{s_{ke} de_{ke}}{s} \right) \quad s = \frac{2-2\nu}{3} \left(1 + \frac{2(1+\nu)}{3E} \right) \tag{9}$$

де δ_{ij} – символ Кронекера.

Отже, співвідношення (4) – (9) являють собою математичну модель в'язкопружного деформування капілярно-пористих матеріалів у процесі сушіння з урахуванням накопичення необоротних, зокрема пластичних, деформацій.

Числове розв'язання математичної моделі (1) – (3). Для числової реалізації моделі тепломасоперенесення використаємо метод скінченних елементів (МСЕ), застосовуючи символіку, властиву МСЕ [15]. Також приймаємо, що теплові потоки, зумовлені градієнтами тепла $\partial U_1/\partial t$ і вологи $\partial U_2/\partial t$, незалежні. Тоді

$$\frac{\partial U(\bar{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial U_1(\bar{X}, t)}{\partial t} + \frac{\partial U_2(\bar{X}, t)}{\partial t}$$

Тоді, згідно з основною концепцією МСЕ, запишемо варіаційні функціонали для рівнянь математичної моделі (1) – (3) у матричному вигляді

$$\begin{aligned} \Omega_1(U) = & \frac{1}{2} \int_V \left(\{U\}^T \{B\}^T \{D^*\} \{B\} \{U\} + 2 \{N\} \{U\} \{N\}^T r_0 \frac{\partial \{U_1\}}{\partial t} \right) dV + \\ & + \int_S \left(\frac{1}{2} r_0 b \left(\{U\}^T \{N\}^T \{N\} \{U\} - 2U_p \{N\} \{U\} + U_p^2 \right) dS \right); \\ \Omega_2(U) = & \frac{1}{2} \int_V \left(\{T\}^T \{B\}^T \{H\} \{B\} \{T\} + 2 \{N\} \{T\} \{N\}^T r_0 \frac{\partial \{U_2\}}{\partial t} \right) dV, \end{aligned} \quad (10)$$

де $\{D\}$, $\{D^*\}$, $\{H\}$ – матриці теплофізичних характеристик матеріалу; $\{N\}$ – матриця функцій форми; $\{U\}$, $\{T\}$ – вектори вологості й температури. Інтегрування у (10) здійснюється за окремими елементами розбиття області Ω дерев'яного бруса. На основі процедури мінімізації функціоналів $\Omega_1(U)$, $\Omega_2(U)$ після громіздких перетворень отримаємо рівняння

$$[C] \frac{\partial \{U\}}{\partial t} + [K] \{U\} + \{F\} = 0, \quad (11)$$

де $[C] = \int_V r_0 [N]^T [N] dV$; $[K] = \int_V [B]^T [D^*] [B] dV + \int_S r_0 b_w [N]^T [N] dS$; $\{F\} = \int_V [B]^T [H] [B] [T] dV - \int_S r_0 b U_p [N]^T dS$ – відповідно матриці теплофізичних властивостей матеріалу, демпфування

та навантаження.

Щоб знайти значення функцій $\{U\}$ у кожній точці часового інтервалу, скористаємось методом скінченних різниць [15].

Після заміни похідної $\partial \{U\}/\partial t$ кінцево-різницеvim аналогом розв'язок диференційного рівняння (11) зводиться до системи рівнянь такого вигляду

$$[A] \{U\}_{\text{наступне}} = \{R\}, \quad (12)$$

де $[A] = 0.5[K] + [C]/\Delta t$; $\{R\} = ([C]/\Delta t - 0.5[K]) \{U\}_{\text{попереднє}} - 0.5(\{R\}_{\text{наступне}} + \{R\}_{\text{попереднє}})$.

Оскільки у нашому випадку коефіцієнти вологопровідності a_1 , a_2 і термоградієнтний коефіцієнт залежать від температури і вологості, то на кожному кроці за часом виконується ітераційний процес для розв'язування нелінійного рівняння (11).

Аналогічний підхід використано для першого рівняння математичної моделі (1) – (3) тепломасоперенесення. Варіаційний функціонал у цьому випадку має вигляд

$$\begin{aligned} \Omega(T) = & \frac{1}{2} \int_V \left(I_1 \left(\frac{\partial T}{\partial x_1} \right)^2 + I_2 \left(\frac{\partial T}{\partial x_2} \right)^2 + 2c r_0 \frac{\partial T}{\partial t} T - 2 r_0 r e \frac{\partial U}{\partial t} T \right) dV + \\ & + \int_S \left(\frac{a}{2} (T_c - T)^2 - r_0 r (1 - e) b (U - U_p) T \right) dS. \end{aligned} \quad (13)$$

Записуючи (13) у матричній формі, після громіздких перетворень для знаходження значень температурного поля, отримаємо

$$[C_T] \frac{\partial \{T\}}{\partial t} + [K_T] \{T\} + \{F_T\} = 0, \quad (14)$$

де $[C_T]$, $[K_T]$, $\{F_T\}$ – відповідні матриці, пов'язані з коефіцієнтами теплопровідності та теплообміну.

Застосовуючи до рівняння (14) метод скінченних різниць, одержимо

$$[A_T]\{T\}_{\text{наступне}} = \{R_T\}, \quad (15)$$

де $[A_T] = 0.5[K_T] + [C_T]/\Delta t$; $\{R_T\} = ([C_T]/\Delta t - 0.5[K_T])\{T\}_{\text{попереднє}} - 0.5(\{R_T\}_{\text{наст.}} + \{R_T\}_{\text{попереднє}})$.

Оскільки теплофізичні коефіцієнти деревини залежать від температури і вологості, то ітераційний процес реалізації рівняння (15) здійснюється на кожному часовому кроці. Умовою завершення ітерацій для рівнянь (11) і (14) є умови $\{U_n\} - \{U_{n-1}\} \leq 10^{-4}$ і $\{T_n\} - \{T_{n-1}\} \leq 10^{-4}$.

Числове розв'язання математичної моделі (4) – (9). Після визначення температурно-вологісних полів за допомогою числового розв'язання математичної моделі (1)–(5) перейдемо до реалізації математичної моделі визначення напружено-деформівного стану деревини у в'язкопружній області деформування з урахуванням накопичення необоротних деформацій. Для цього еквівалентно сформулюємо модель (4) – (9) на основі принципу мінімуму повної потенціальної енергії [7, 15]. Функціонал Лагранжа, мінімум якого збігається з розв'язанням математичної моделі (4) – (9), має вигляд:

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \int_V {}^T C dV + \int_V {}^T C \int_0^t \mathbf{R}(t, t) (t) dt dV - \int_V {}^T C (\Delta T + \Delta U) dV. \quad (16)$$

Якщо підставити у функціонал (16) у співвідношення Коші [14], отримаємо запис функціонала Лагранжа у переміщеннях:

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{u} dV + \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C} \int_0^t \mathbf{R}(t, t) \mathbf{B} \mathbf{u} dt dV - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C} (\Delta T + \Delta U) dV. \quad (017)$$

де B – це матриця: $B^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}$.

Розв'язок задачі про мінімум функціонала (17) методом скінченних елементів шукаємо, використовуючи невідомі функції $\mathbf{j}_1(\mathbf{x}), \mathbf{j}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{j}_N(\mathbf{x})$, що покривають сіткою область V і не перетинаються між собою. Тоді переміщення на кожному елементі V_e виражаються через вузлові значення переміщень:

$$u_1(t, \mathbf{x}) = \sum_{e=1}^N u_{1e}(t) \mathbf{j}_e(\mathbf{x}), \quad u_2(t, \mathbf{x}) = \sum_{e=1}^N u_{2e}(t) \mathbf{j}_e(\mathbf{x}). \quad (18)$$

Введемо поділ за часом за правилом $s_k = t_k = k\Delta t$, $k = 0, 1, \dots, M$, $\Delta t = T/M$, де M – натуральне число, та позначимо $\mathbf{u}_e^k = \{u_{1e}(t_k), u_{2e}(t_k)\}^T$. Вектор переміщень на k -му кроці за часом можна виразити так

$$\mathbf{u}(t_k, \mathbf{x}) = \sum_{e=1}^N \mathbf{u}_e^k \mathbf{j}_e(\mathbf{x}).$$

Замінімо інтеграл за часом в функціоналі (17) формулою трапецій [15] згідно з введеним розбиттям за часом:

$$\int_0^{s_k} f(t) dt = \frac{\Delta t}{2} f(t_0) + \Delta t \sum_{i=1}^{k-1} f(t_i) + \frac{\Delta t}{2} f(t_k)$$

Підставляючи співвідношення (18) в функціонал (17) і підсумовуючи всі скінченні елементи, із умови мінімуму функціоналу $d\Pi = 0$, на кожному кроці за часом, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь ($k = 1, \dots, M$) виду:

$$\sum_{e=1}^N \mathbf{u}_e^k \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{j}_e(\mathbf{x}) d\Omega \right] + \sum_{e=1}^N \mathbf{u}_e^k \left[\frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{R}(s_k, t_k) \mathbf{B} \mathbf{j}_e(\mathbf{x}) d\Omega \right] =$$

$$= \sum_{e=1}^N \left[\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} (\Delta T(t_k, \mathbf{x}) + \Delta U(t_k, \mathbf{x})) d\Omega \right] - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{e=1}^N \mathbf{u}_e^i \left[\Delta t \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{R}(s_k, t_i) \mathbf{B} \mathbf{j}_e(\mathbf{x}) d\Omega \right]. \quad (19)$$

Зазначимо, що у (19) матриці C і R характеризують пружні та в'язкопружні властивості деревини і визначаються із співвідношень (6), (7). Стисло (19) можна записати так

$$[K]\{U\} = [F] - [K]\{U_0\}, \quad (20)$$

де $[K] = \sum_{i=1}^N [K^i]$ – матриця вузлової жорсткості, яка визначається пружними властивостями деревини і геометричними параметрами елемента розбиття; $[F]$ – матриця навантаження, яка визначається реологічною поведінкою деревини (7) і характеристиками температурно-вологісних полів, знайденими з числової реалізації математичної моделі (1) – (3); $\{U\} = \{u_1, u_2\}$ – вектор вузлових переміщень деревини як в'язкопружного матеріалу.

Для моделювання пружно-пластичних деформацій у випадку плоского напруженого стану скористаємось результатами [16]. Тоді система алгебраїчних рівнянь матиме вигляд, аналогічний (20). Але матриця фізичних властивостей матеріалу в загальних матрицях рівняння $[K]$ та $[F]$ містить пластичні властивості та отримується з співвідношень (9):

$$[D^{nl}] = j \frac{E}{Q} \begin{bmatrix} s_{yy}^2 + 2p & -s_{xx}s_{yy} + 2vp & -\frac{s_{xx} + vs_{yy}}{1+v} s_{xy} \\ -s_{xx}s_{yy} + 2vp & s_{yy}^2 + 2p & -\frac{s_{xx} + vs_{yy}}{1+v} s_{xy} \\ -\frac{s_{xx} + vs_{yy}}{1+v} s_{xy} & -\frac{s_{xx} + vs_{yy}}{1+v} s_{xy} & \frac{R}{2(1+v)} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

де $p = s_{xy}^2 / (1+v)$, $R = s_{xx}^2 + 2vs_{xx}s_{yy} + s_{yy}^2$; $Q = R + 2(1-v^2)p$; φ – стала, для пластичного матеріалу дорівнює одиниці; s_{ij} – девіатор напружень.

Для в'язкопружної області деформування обчислення виконано за формулами (19), (20) з урахуванням матриць із співвідношень (6), (7). Коли інтенсивність девіатора напружень \bar{S} на елементі перевищує границю текучості [12, 14], тоді розрахунок локальної матриці у (20) здійснюється з використанням (21).

Числові результати та їх аналіз. Запропонована математична модель та методика розрахунку дають змогу досліджувати в'язкопружні процеси деформування капілярно-пористих матеріалів залежно від зміни температурно-вологісних полів, а також враховувати фізичну нелінійність процесів та залежність теплофізичних і механічних властивостей матеріалу від вологовмісту і температури. Для розрахунків використано вхідні дані для деревини сосни (густина сухої маси $r_0 = 470 \text{ кг/м}^3$). Геометричні розміри l_1 і l_2 вибрано різні, зокрема $l_1 = l_2 = 25 \text{ мм}$; $l_1 = 2l_2 = 50 \text{ мм}$; $2l_1 = l_2 = 50 \text{ мм}$. Початковий вологовміст $U_0 = 0.3 \text{ кг/кг}$; коефіцієнти масопровідності і вологообміну визначено апроксимаційними залежностями [17]: $a_1 = 10^{9.361 \lg(t+273) - 22.6} \cdot 10^{-10} \text{ м}^2/\text{с}$; $a_1/a_2 = 1.25$; $a_1 = [0.527(t_c + 10)^{2.06} \cdot 10^{-6} + 0.04[(5v + 3.5) - (0.0017v + 0.0116)(j - 45)^2]] \cdot 10^{-7}$. Для розрахунків вибрано сталий температурний режим, для якого $t_c = 75^\circ\text{C}$; $\varphi = 0.3$; $v = 2 \text{ м/с}$. Рівноважний вологовміст визначено за формулою $U_p = 10.6^j (0.0327 - 0.00015t_c)$. Коефіцієнти лінійного всихання у радіальному і тангентальному напрямках у формулах (6) відповідно дорівнюють $\beta_1 = 0.17$ і $\beta_2 = 0.28$, а коефіцієнти α_1 і α_2 у формулах (6) дорівнюють нулеві. Коефіцієнти Пуассона $\nu_{12} = 0.4$; $\nu_{24} = 0.4$; $\nu_{13} = 0.4$, а модулі Юнга – $E_1 = 1200 + 31.30U + 9.5T + 24.2UT$; $E_2 = 1.6E_1$. Інші теплофізичні властивості деревини сосни наведено в [17]. Для апроксимаційних залежностей

функцій реологічної поведінки деревини $R(t, \tau)$ використано результати досліджень [11]. Також на основі експериментальних досліджень [12, 13] для деревини сосни прийнятий модуль пластичності у співвідношеннях (9) $E_{пл} = 188 \text{ МПа}$ для вологості 12% і $E_{пл} = 237 \text{ МПа}$ для вологості 4%. Значення ν прийнято 0.5. Згідно з [12] величина границі текучості дорівнює $S_{ГТ} = 3.2 \cdot 10^6 \text{ Па}$.

Геометрія дерев'яного бруска зображена на рис. 1. За характерні точки вибрано: точку в центрі бруска $A(0;0)$, точку в серединній зоні бруска $B(l_1/2; l_2/2)$ та точку $C(l_1; l_2)$ на межі бруска.

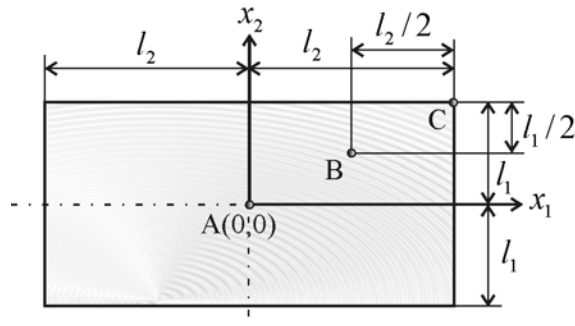


Рис. 1. Характерні точки поперечного перерізу осесиметричного дерев'яного бруска (l_1, l_2 – половини геометричних розмірів)

Проаналізуємо вплив зміни геометрії, а саме відношення тангенціального розміру бруска l_2 до радіального l_1 , на розподіл температури, вологості та компонент напружень у площині поперечного перерізу деревини бука. Розміри поперечного перерізу бруска змінюватимемо так: $l_1 = 0,05 \text{ м}$ – незмінне, а l_2 дорівнюватиме: а) 0,05м; б) 0,1 м; в) 0,15 м. Збільшення вмісту води в центральних шарах призводить до їхнього розбухання (збільшення об'єму), а зменшення вологості в поверхневих шарах матеріалу – до всихання (зменшення об'єму). Тобто на початку процесу сушіння у деревині виникають напруження різних знаків: у поверхневих шарах розвиваються стискаючі напруження (додатні), а у центральних – розтягуючі (від'ємні). Це підтверджують криві розвитку напружень S_{11}, S_{22}, S_{12} , зображені на рис. 2 а, б відповідно. Під час подальшого сушіння площина випаровування води переміщується вглиб матеріалу. Знак напружень змінюється після того, як починається переміщення води з центральних шарів у поверхневі. Розтягуючі напруження, які розвивалися у центральних шарах, змінюються на стискаючі.

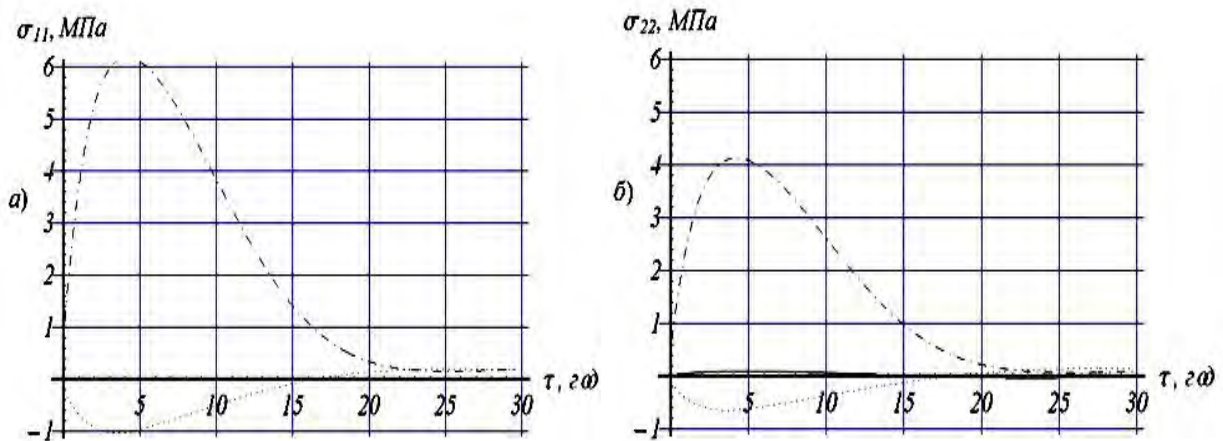


Рис. 2. Зміна напружень а) S_{11} , б) S_{22} в різних точках поперечного перерізу висушуваної деревини сосни (суцільна лінія – для $A(0;0)$, штрихова – для $B(l_1/2; l_2/2)$, штрих-пунктирна – для $C(l_1; l_2)$)

Як коефіцієнти моделі тепломасоперенесення (1) – (3), так і коефіцієнти моделі (4) – (9) визначення напружено-деформівного стану вважаються ортотропними та залежними від температури та вологості деревини. Крім коефіцієнтів, у формулювання задачі визначення напружено-деформівного стану входить ядро релаксації $R(t - \tau)$. Окрім виявлення загальних закономірностей,

мета числового дослідження – показати, що якщо розв’язана математична модель процесу сушіння враховує властивість анізотропії деревини, то зміна розміру бруска l_2 вздовж тангенціальної осі x_2 вплине на розподіл нормальних напружень S_{11} , та S_{22} вздовж радіальної осі x_1 і навпаки. Для цього побудуємо криві розподілу компонент напружень у заданий момент часу (наприклад, 10 год після початку сушіння) вздовж радіальної осі при різних тангентальних розмірах зразка (рис. 3).

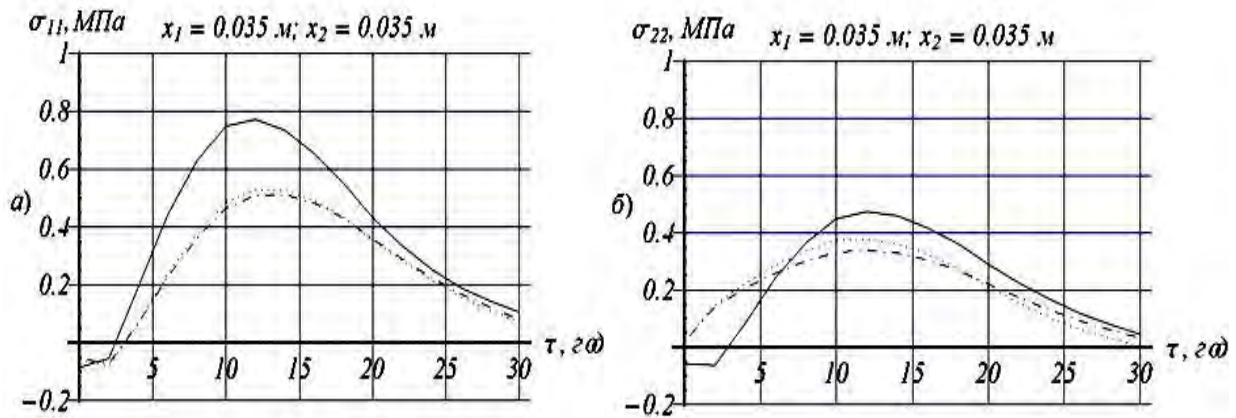


Рис. 3. Зміна напружень а) σ_{11} , б) σ_{22} під час сушіння сосни з різними співвідношеннями геометричних розмірів (суцільна лінія – для $l_2/l_1 = 1$, штрихова – для $l_2/l_1 = 2$, штрихпунктирна – для $l_2/l_1 = 3$)

Оскільки коефіцієнт вологообміну $\beta(T_c, \varphi, v)$ залежить від відносної вологості агента сушіння φ , то під час гідротермічної обробки, якщо $\varphi = 67\%$, видалення вологи із деревини інтенсивніше, ніж при $\varphi = 77\%$. Аналіз зміни швидкості руху агента сушіння показав, що вона істотно не впливає на зменшення вологовмісту, проте її збільшення пришвидшує нагрівання матеріалу.

Підвищення температури середовища, як відомо, є основним фактором інтенсифікації процесу сушіння, нагрівання матеріалу та видалення вологи з нього. Це підтверджують графічні залежності на рис. 4. Одночасно з інтенсифікацією процесу сушіння, зростання температури середовища T_c збільшує напруження. Як видно із рис. 4, а та б, нормальні напруження набувають більших значень та починають знижуватись пізніше, що може спричинити виникнення руйнівних деформацій.

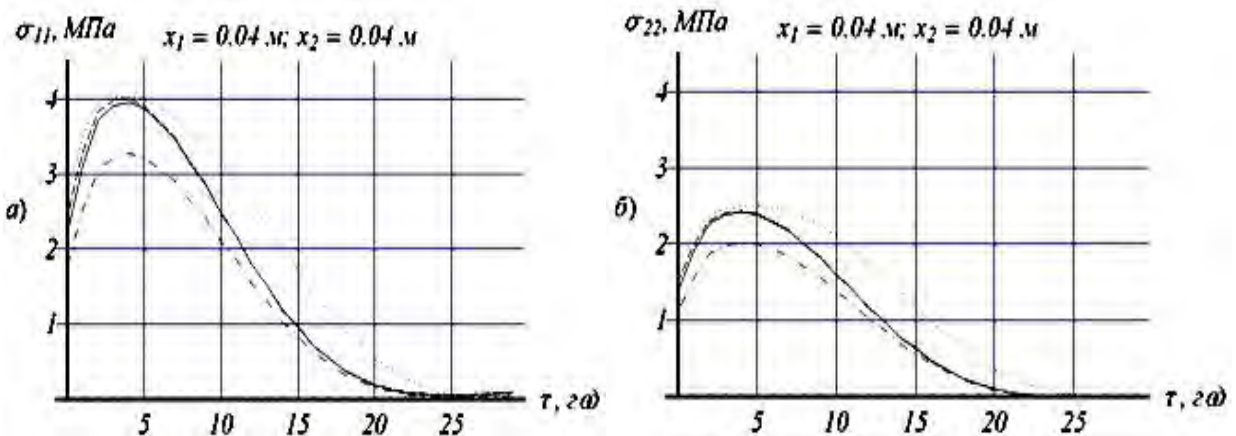


Рис. 4. Вплив параметрів зовнішнього середовища на розвиток компонент напружень: а) σ_{11} , б) σ_{22} під час сушіння в точці $(0.04; 0.04)$ поперечного перерізу бруска (суцільна лінія – для $T_c = 60^\circ\text{C}$, $\varphi = 67\%$, $v = 2$ м/с, штрихова – для $T_c = 80^\circ\text{C}$, $\varphi = 67\%$, $v = 2$ м/с, штрихпунктирна – для $T_c = 60^\circ\text{C}$, $\varphi = 77\%$, $v = 2$ м/с, штрихова – для $T_c = 60^\circ\text{C}$, $\varphi = 67\%$, $v = 4$ м/с)

Збільшення відносної вологості φ сповільнює видалення вологи із деревини, але „пом’якшує” режим сушіння, тобто нормальні напруження S_{11} та S_{22} набувають менших значень.

Висновок

Сформульована математична модель в'язкопружного деформування і процесів тепломасо-перенесення у капілярно-пористих матеріалах з урахуванням змінних анізотропних механічних характеристик. Побудовано алгоритми методу скінченних елементів для в'язкопружної і пружно-пластичної області деформування капілярно-пористих матеріалів у процесі сушіння. На основі числового експерименту встановлені закономірності впливу гігроскопічної вологи, геометричних розмірів, технологічних параметрів сушіння на розподіл напружено-деформівного стану осушеної деревини.

1. Уголев Б.Н. Деформативность древесины и напряжения при сушке. – М.: Лесная промышленность, 1971. – 174 с.
2. Соколовський Я.І. Технологічні напруження і деформації деревини у процесі сушіння // Науковий вісник: Зб. наук.-техн. праць. – Львів: УкрДЛТУ. – 1999. – Вип. 9.3. – С. 168–176.
3. Соколовський Я.І., Поберейко Б.П. Расчет нестационарных напряжений в древесине при воздействии влаги // Лесной журнал: Изв. ВУЗов России. – 2000. – №1. – С. 99–105.
4. Соколовський Я.І. Дослідження плоского напружено-деформівного стану деревини у процесі сушіння // Науковий вісник: Зб. наук.-техн. праць. – Львів: УкрДЛТУ. – 1997. – Вип.8. – С. 161–168.
5. Луцьк Р.В. Напряженно-деформируемое состояние твердого тела в процессе сушки // Теоретические основы химической технологии. – 1988. – Т.22., №1. – С. 21–28.
6. Соколовський Я.І., Дендюк М.В. Математичне моделювання двовимірного в'язкопружного стану деревини у процесі сушіння // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2008. – Вип.7. – С. 17–26.
7. Соколовський Я.І. Моделювання деформаційно-релаксаційних процесів у висушуваній деревині методом скінченних елементів / Я.І. Соколовський, А.В. Бакалець // Вісник Національного університету “Львівська політехніка”: Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – Львів: НУ “Львівська політехніка”. – 2006. – Вип. 565. – С. 51–57.
8. Соколовський Я.І. Моделювання та оптимізація технологічних режимів сушіння деревини / Я.І. Соколовський, А.В. Бакалець // Вісник Національного університету “Львівська політехніка”: Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – Львів: НУ “Львівська політехніка”. – 2008. – Вип. 629. – С. 105–111.
9. Sokolowskyu Ya., Mokrytska O. Mathematical simulation of deformational and relaxation process in capillary-porous materials // Forestry, forest, paper and wood working industry. – 2010. – Vol. 36. – p. 116–124.
10. Дорняк О.Р. Математическое моделирование, компьютерная оптимизация технологий, параметров оборудования и систем лесного комплекса // Межв. сборн. назн. тр. ВГЛТА, Воронеж, 2001. – С. 132–139.
11. Соколовський Я.І., Андрашек Й.В. Методика та результати експериментальних досліджень реологічної поведінки деревини // Науковий вісник: Зб. наук.-техн. праць. – Львів: УкрДЛТУ. – 1999. – Вип.9.13. – С. 15–26.
12. Тюленева Е.М. Природа упругих деформаций, возникающих в древесине в момент нагрузки и разгрузки / Е.М. Тюленева, В.Н. Курицын // Лесной и химический комплексы – проблемы и решения: сб. ст. – Красноярск, 2005. – Т. 2. – С. 232–233.
13. Rodic J., Jayne A. Mechanics of wood and composites. – Van Nostrand Reinhold. New York. 1982. – 712 p.
14. Можаровський М.С. Теорія пружності, пластичності і повзучості. – К.: Вища школа, 2002. – 312 с.
15. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 378 с.
16. Yamacla Y., Yoshimura N. and Sakarai T. Plastik stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by the finite element method // Jut. J. Mech. Sci. – 1978. Vol.10. – P. 345–354.
17. Шубин Г.С. Сушка и тепловая обработка древесины. – М.: Лесная промышленность, 1990. – 236 с.