УДК 536.24

В. Гавриш, О. Нитребич
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра програмного забезпечення

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВОГО СТАНУ В ЕЛЕМЕНТАХ МІКРОЕЛЕКТРОННИХ ПРИСТРОЇВ ІЗ НАСКРІЗНИМИ ЧУЖОРІДНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Розглядається стаціонарна осесиметрична задача теплопровідності для ізотропного шару з наскрізним чужорідним циліндричним включенням, яке виділяє тепло. За допомогою кусково-лінійної апроксимації температури на граничній поверхні включення та інтегрального перетворення Ганкеля побудовано аналітичний розв'язок задачі з граничними умовами другого роду. Виконано числові розрахунки температурного поля та проаналізовано їх для заданих геометричних і теплофізичних параметрів.

Ключові слова: температура, теплопровідність, стаціонарна, осесиметрична, ізотропний, чужорідне наскрізне циліндричне включення, ідеальний тепловий контакт.

The steady state axially symmetric problem of thermal conduction for isotropic layer with heat-generating foreign reach-through cylindrical inclusion has been considered. Using piecewise linear approximation of the temperature on the inclusion boundary surfaces and applying the Hankel integral transform the analytical solution of the heat conduction problem with boundary conditions of second order has been formed. The numerical calculations of temperature fields have been conducted and analyzed for given geometrical and thermophysical parameters.

Key words: temperature, thermal conduction, steady state, axially symmetric , foreign reach-through cylindrical inclusion, ideal thermal contact.

Вступ

У сучасній мікроелектроніці поширені матеріали з чужорідними включеннями. У процесі нагрівання включення спричиняють виникнення неоднорідного температурного поля, внаслідок чого виникає термофотопружний ефект, який полягає у появі двопроменезаломлення в структурах. Явище термофотопружного ефекту виявлено доволі давно, але він і досі є малодослідженим. Для спостереження цього явища використовують у експериментах як значні температурні градієнти, так і доволі значні абсолютні значення температури. Тому проблема достовірного визначення температурного режиму в елементах конструкцій мікроелектронних пристроїв є важливою. Оскільки експериментальні дослідження є неможливими через високі температури, то інформацію про тепловий стан окремих елементів конструкцій отримують розрахунковим шляхом, що вимагає розв'язування граничних задач теплопровідності, математичні моделі яких би максимально відображали найістотніші сторони теплофізичних процесів у розглядуваних структурах.

Деякі дослідження температурних режимів для вузлів та окремих елементів мікроелектронних пристроїв виконано раніше [1–7].

Нижче сформульовано граничну осесиметричну задачу теплопровідності, побудовано аналітичний розв'язок та виконано числовий аналіз для окремих конструктивних елементів мікроелектронних пристроїв, які описуються ізотропним шаром із наскрізним чужорідним включенням циліндричної форми, що виділяє тепло. Наведено [8, 9] загальні рівняння теплопровідності для кусково-однорідних тіл.

Формулювання задачі

Розглянемо ізотропний в сенсі теплофізичних характеристик шар, який містить чужорідне наскрізне циліндричне включення з радіусом R, віднесений до циліндричної системи координат ($Orj\,z$). В області $\Omega_0 = \{(r, j\,, z) : r \le R, 0 \le j\ \le 2p\,, |z| \le l\}$ включення діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла з потужністю $q_0 = const$. На граничній поверхні включення $K_R = \{(R, j\,, z) : 0 \le j\ \le 2p\,, |z| \le l\}$ відбувається ідеальний тепловий контакт, а на таких самих поверхнях шару $\varGamma_{\pm} = \{(r, j\,, \pm l) : 0 \le r \le \infty, 0 \le j\ \le 2p\}$ задано граничні умови другого роду (рис. 1).

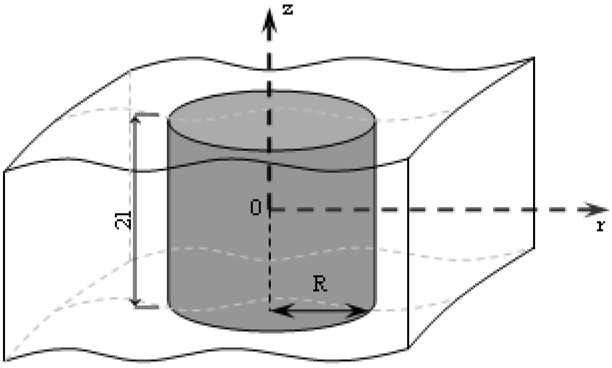

Рис. 1. Ізотропний шар з чужорідним наскрізним включенням циліндричної форми, що виділяє тепло

Математична модель процесу теплопровідності

Розподіл осесиметричного стаціонарного температурного поля $t(r, z)$ в розглядуваній системі отримується шляхом розв'язування рівняння теплопровідності [8,9]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r\,l\,(r)\frac{\partial t}{\partial r}] + \frac{\partial}{\partial z}[\,l\,(r)\frac{\partial t}{\partial z}] = -q_0 S_-(R - r) \tag{1}$$

з граничними умовами

$$t\Big|_{r\to\infty} = t_c\,, \frac{\partial t}{\partial r}\Big|_{r\to\infty} = 0\,,\ \frac{\partial t}{\partial z}\Big|_{|z|=l} = 0\,, \tag{2}$$

де
$$l\,(r) = l_1 + (\,l_0 - l_1)S_-(R - r) - \tag{3}$$

коефіцієнт теплопровідності неоднорідного шару; l_1, l_0 – коефіцієнти теплопровідності матеріалів шару та включення відповідно; t_c – температура зовнішнього середовища;

$$S_{\pm}(z\,) = \begin{cases} 1, & z\ > 0 \\ 0{,}5\,\mathbf{m}\,0{,}5, & z\ = 0 \\ 0, & z\ < 0 \end{cases}$$ – асиметричні одиничні функції [10].

Введемо функцію

$$T = l\,(r)q \tag{4}$$

і продиференціюємо її за змінною r, враховуючи опис коефіцієнта теплопровідності $l\,(r)$ (3). У результаті отримаємо:

$$l\,(r)\frac{\partial q}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial r} + (\,l_0 - l_1)q\Big|_{r=R} \cdot d_+(r - R). \tag{5}$$

Тут $q = t - t_c$ – надлишкова температура; $d_+(z\,) = \dfrac{dS_+(z\,)}{dz}$ – асиметрична дельта-функція Дірака [10].

Підставивши вираз (5) у співвідношення (1), приходимо до диференціального рівняння з частинними похідними із розривними та сингулярними коефіцієнтами

$$\Delta T+\frac{R}{r}(l_0-l_1)q\big|_{r=R}\cdot d'_{+}(r-R)=-q_0S_{-}(R-r), \tag{6}$$

де $\Delta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-$ оператор Лапласа в циліндричній системі координат.

Отже, шукане температурне поле у розглядуваній системі цілком визначається з рівняння (6) та граничних умов (2).

Побудова аналітичного розв'язку

Апроксимуємо функцію $q(R,z)$ виразом

$$q(R,z)=q_1+\sum_{i=1}^{n-1}(q_{i+1}-q_i)S_{-}(z-z_i), \tag{7}$$

де $z_i\in\,]-l;l[\,;z_1\le z_2\le\ldots\le z_{n-1};q_i(i=\overline{1,n})-$ невідомі апроксимуючі значення надлишкової температури $q(r,z)$.

Підставивши вираз (7) у рівняння (6), отримаємо:

$$\Delta T=-\frac{R}{r}(l_0-l_1)[q_1+\sum_{i=1}^{n-1}(q_{i+1}-q_i)S_{-}(z-z_i)]\cdot d'_{+}(r-R)-q_0S_{-}(R-r). \tag{8}$$

Застосувавши інтегральне перетворення Ганкеля за координатою r до рівняння (8) та граничних умов (2) із урахуванням співвідношення (4), приходимо до звичайного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2\overline{T}}{dz^2}-x^2\overline{T}=-RJ_1(Rx)\{x(l_0-l_1)[q_1+\sum_{i=1}^{n-1}(q_{i+1}-q_i)S_{-}(z-z_i)]+\frac{q_0}{x}\} \tag{9}$$

і граничних умов

$$\frac{d\overline{T}}{dz}\bigg|_{|z|=l}=0, \tag{10}$$

де $\overline{T}=\int_0^\infty rJ_0(rx)Tdx-$ трансформанта функції $T(r,z)$; $x-$ параметр інтегрального перетворення Ганкеля; $J_\nu(z)-$ функція Бесселя першого роду ν-го порядку.

Загальний розв'язок рівняння (9) запишемо у вигляді

$$\overline{T}=c_1e^{xz}+c_2e^{-xz}+\frac{R}{x}J_1(Rx)\{(l_0-l_1)[q_1+\sum_{i=1}^{n-1}(q_{i+1}-q_i)(1-chx(z-z_i))S_{-}(z-z_i)]+\frac{q_0}{x^2}\}.$$

Тут c_1,c_2-сталі інтегрування.

Використавши граничні умови (10), отримаємо частковий розв'язок задачі (9), (10)

$$\overline{T}=\frac{R}{x}J_1(Rx)\{\frac{q_0}{x^2}+(l_0-l_1)[q_1+\sum_{i=1}^{n-1}(q_{i+1}-q_i)(\frac{chx(l+z)}{sh2xl}shx(l-z_i)+ \\ +(1-chx(z-z_i))S_{-}(z-z_i))]\}. \tag{11}$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Ганкеля до співвідношення (11), одержимо

$$T(r,z)=R\int_0^\infty J_0(rx)J_1(Rx)\{\frac{q_0}{x^2}+(l_0-l_1)[q_1+\sum_{i=1}^{n-1}(q_{i+1}-q_i)(\frac{chx(l+z)}{sh2xl}shx(l-z_i)+ \\ +(1-chx(z-z_i))S_{-}(z-z_i))]\}dx. \tag{12}$$

Невідомі апроксимуючі значення q_i $(i=\overline{1,n})$ надлишкової температури знаходимо, розв'язавши систему n лінійних алгебраїчних рівнянь, отриману з виразу (12).

Отже, шукане температурне поле в шарі з наскрізним циліндричним включенням, що виділяє тепло, описує формула (12). Зі співвідношення (12) отримуємо значення температури в довільній точці шару та неоднорідного включення.

Аналіз числових результатів

Виконано числовий аналіз безрозмірної надлишкової температури $T^* = T/(q_0 R^2)$ для таких вихідних даних: матеріал шару – кераміка ВК94–І $\left(l_1 = 13,4 \ вт/(м \cdot C^0) \right)$, матеріал включення – срібло $\left(l_0 = 419 \ вт/(м \cdot C^0) \right)$, $n = 5$ – кількість розбиттів інтервалу $]-l;l[$; $L = l/R = 1$.

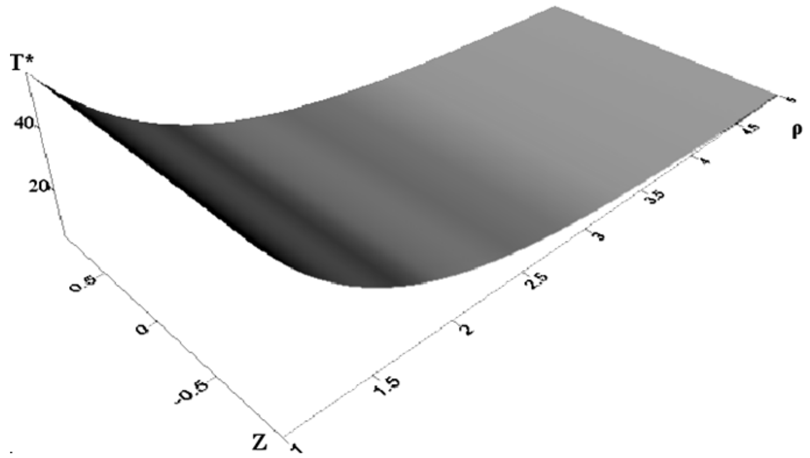

Рис. 2. Залежність безрозмірної температури T^* від безрозмірних координат r та Z

Побудовано (рис. 2) залежність температури T^* від безрозмірних радіальної $r = r/R$ та аксіальної $Z = z/R$ координат. Як бачимо, максимальної температури досягають в області дії рівномірно розподілених за об'ємом циліндричного наскрізного чужорідного включення внутрішніх джерел тепла.

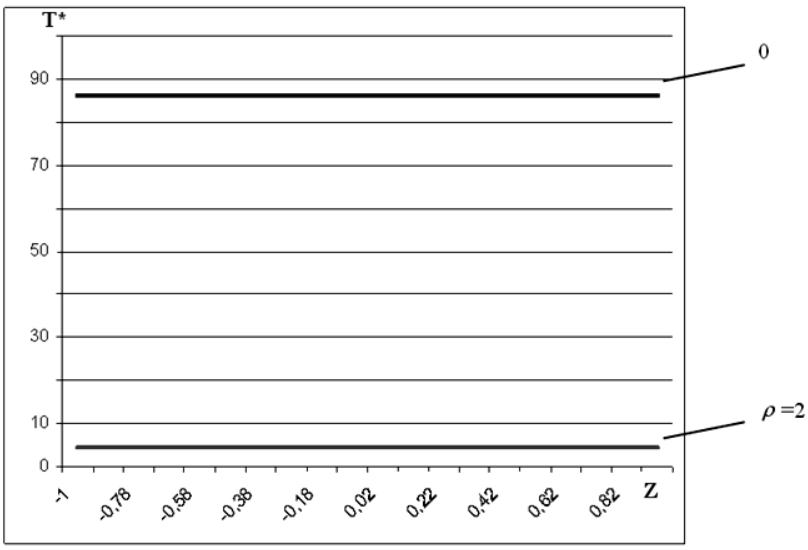

Рис. 3. Залежність безрозмірної температури T^* від безрозмірної координати Z

Рис.3 ілюструє зміну температури T^* залежно від аксіальної координати Z для різних значень радіальної координати r. Як видно із графіків, температура змінюється лінійно і практично є сталою для наведених значень r, причому значення її значно відрізняються в області включення ($r = 0$) та в шарі ($r = 2$), що відповідає розглядуваній фізичній моделі.

Висновки

Із використанням методу, який ґрунтується на застосуванні узагальнених функцій, кусково-лінійної апроксимації температури на поверхні включення та інтегрального перетворення Ганкеля побудовано аналітичний розв'язок граничної осесиметричної задачі теплопровідності для шару з чужорідним наскрізним включенням циліндричної форми, що виділяє тепло. Встановлено, що за товщиною ізотропного шару температура змінюється за лінійним законом для граничних умов другого роду. Отримано числові результати на основі розроблених алгоритмів та програмних засобів, які дають змогу аналізувати температурні режими в окремих елементах та вузлах мікроелектронних пристроїв, які описуються ізотропним шаром із чужорідним наскрізним циліндричним включенням, що виділяє тепло.

1. Барвінський А.Ф. Нелінійна задача теплопровідності для неоднорідного шару з внутрішніми джерелами тепла / А.Ф. Барвінський, В.І. Гавриш // Проблемы машиностроения. – 2009. – 12, № 1. – С. 47–53. 2. Гавриш В.І. Метод розрахунку температурних полів для термочутливої кусково-однорідної смуги із чужорідним включенням / В.І. Гавриш, Д.В. Федасюк // Промышленная теплотехника. – 2010. – 32, № 5. – С. 18–25. 3. Гавриш В.І. Гранична задача теплопровідності для шару з чужорідним циліндричним включенням / В.І. Гавриш, Д.В.Федасюк, А.І. Косач // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2010. – 46, № 5. – С. 115–120. 4. Gavrysh V.I. Thermal simulation of heterogeneous structural components in microelectronic devices / V.I. Gavrysh, D.V. Fedasyuk // Semiconductor Physics, Quantum Electronics & Optoelectronics 13. – № 4. – pp.439–443. 5. Гаврыш В.И. Моделирование температурних режимов в элементах микроэлектронных устройств / В.И. Гаврыш, А.И. Косач // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. – 2011. № 1–2 (90). – С. 27–30. 6. Гавриш В.І. Моделювання теплового стану в термочутливому елементі потужного світлодіода / В.І. Гавриш, А.І. Косач // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка" Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – 2011. – № 694. – С. 254–259. 7. Гаврыш В.И. Моделирование температурных режимов в электронных устройствах кусочно-однородной структуры / В.И. Гаврыш, А.И. Косач // Электронное моделирование. – 2011. – 33, № 4. – С. 99–113. 8. Подстригач Я.С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я.С. Подстригач, В.А. Ломакин, Ю.М. Коляно. – М.: Наука, 1984. – 386 с. 9. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с. 10. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Корн Г., Корн Т. – М.: Наука, 1977. – 720 с.