УДК 621.391: 517.5(075.8)

С. Заболотній
Черкаський державний технологічний університет,
кафедра радіотехніки

СТАТИСТИЧНЕ РОЗПІЗНАВАННЯ ОБРАЗІВ НА ОСНОВІ РОЗКЛАДУ В ПРОСТОРІ З ПОРІДНИМ ЕЛЕМЕНТОМ

Викладені принципи нового методу статистичного розпізнавання образів, який ґрунтується на апараті розкладу випадкових величин в просторі з порідним елементом (просторі Кунченка). Запропоновано спосіб формування класифікаційних ознак на основі статистики нелінійних функціональних перетворень вхідних даних. Визначено критерій прийняття рішень у вигляді мінімуму середньоквадратичної похибки розкладу. Розроблена структура системи розпізнавання.

Principles of new method of statistical analysis of patterns, which is based on the apparatus of decomposition of random values in space with a generating element (space of Kunchenko) are expounded. The method of forming of classification signs on basis statistician of nonlinear functional transformations of input dates is offered. The criterion of decision-making in an aspect to a minimum square-error expansion is defined. The structure of the system of recognition is developed.

Вступ

Розпізнавання образів є важливою прикладною проблемою, яка виникає в багатьох галузях сучасної науки і техніки: автоматичне управління, телекомунікації, оптична, акустична та радіолокація, робототехніка, технічна діагностика, медицина, економіка та ін. У багатьох ситуаціях сигнали як носії інформації про об'єкти дослідження є випадковими за природою свого походження або детерміновані. У процесі формування, поширення та обробки піддаються впливу різноманітних випадкових збурень та завад. У таких випадках методи розв'язання задач розпізнавання мають ґрунтуватися на теорії статистичних рішень та теорії оцінювання [1].

Множинність цільових призначень та сфер застосування породжує різноманіття прикладних математичних апаратів, що застосовуються як для опису образів та сигналів, так для синтезу і аналізу алгоритмів класифікації. Серед цих апаратів значне місце в теорії розпізнавання посідають розклади в ряди за різними базисними функціями (ряди Тейлора–Маклорена, ортогональні ряди Фур'є, Еджворта, Грама–Шарльє, поліноми Чебишова, Ерміта, ортогональні розклади Карунена–Лоєва, канонічний розклад Пугачова та ін.).

У роботі пропонуються нові підходи до побудови систем статистичного розпізнавання, основані на властивості зменшення дисперсій випадкових величин при наближенні їх стохастичними функціональними поліномами [2]. Подібне представлення засноване на принципово новому апараті розкладу в абстрактному математичному просторі з порідним елементом, або званому за іменем свого автора, просторі Кунченка [3].

Мета дослідження

Метою роботи є закладення основ нового методу статистичного розпізнавання образів, який ґрунтується на математичному апараті розкладу випадкових величин в просторі з порідним елементом (просторі Кунченка).

Постановка задачі

Нехай $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ – N-мірний вектор, що містить статистично незалежні однаково розподілені випадкові ознаки x_n, $n = \overrightarrow{1,N}$. Відомо, що цей вектор може належати одному із множини M класів, кожен з яких описується власною одновимірною щільністю розподілу W_m, причому ці класи не перетинаються ($W_m \cap W_l = \varnothing$, $m \neq l$, $m, l = \overrightarrow{0, M-1}$). Необхідно на основі аналізу X визначити, до якого з M класів належить ця реалізація.

Результати дослідження

1. Поняття узгодженості

Використовуючи математичний апарат представлення випадкових величин у вигляді стохастичних поліномів [2], отримаємо на основі вектора X інший вектор Y такої самої розмірності N, складові якого формуються у вигляді поліномів S-го порядку

$$y_n = k_0 + \sum_{i=1}^{S} k_i \varphi_i(x_n),\ n = \overrightarrow{1,N}, \tag{1}$$

де коефіцієнти полінома k_0 та k_i, $i = \overrightarrow{1,S}$ – деякі постійні (незалежні від n) величини, а базисні функції $\varphi_i(\cdot)$ є певним чином впорядковані нелінійні перетворення, такі, що існують їх математичні сподівання для кожного з M класів

$$E\{\varphi_i(\cdot)\} = \Psi_i^{(m)} < \infty,\ i = \overrightarrow{1,S},\ m = \overrightarrow{0, M-1}. \tag{2}$$

Вираз (1) можна також записати у компактнішій матричній формі

$$Y = k_0 + K\Phi(X), \tag{3}$$

де K – вектор коефіцієнтів розмірності S, а матриця $\Phi(X)$ має розмірність $N \times S$

$$K = \{k_1, k_2, \ldots, k_S\}; \qquad \Phi(X) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \ldots & \varphi_1(x_N) \\ \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2) & \ldots & \varphi_2(x_N) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_S(x_1) & \varphi_S(x_1) & \ldots & \varphi_S(x_N) \end{bmatrix}.$$

За теорією поліноміального наближення в просторі Кунченка [3] наведемо означення.

Означення 1. Поліноміальний порядку S вектор Y, сформований на основі співвідношення (3), називатимемо *узгодженим* з *порідним* вектором X, якщо скалярний добуток узгодженого і порідного векторів дорівнюватиме квадрату норми узгодженого вектора

$$X \cdot Y = \|Y\|^2. \tag{4}$$

Неважко показати, що умова (4) спричиняє нерівність $\|X\|^2 \geq \|Y\|^2$, адже

$$(X - Y)^2 = \|X\|^2 - 2(X \cdot Y) + \|Y\|^2 = \|X\|^2 - \|Y\|^2 = \|Z\|^2 \geq 0. \tag{5}$$

З теорії просторів також відомо [4], що для деякого вектора X найкращим буде наближення, коли апроксиманта Y підібрана так, що дає найменше відхилення, тобто коли вектор $Z = X - Y$ має найменшу норму. Таке можливе, коли апроксиманта є проекцією вектора на відповідний підпростір, тобто буде справедлива теорема Піфагора

$$\|Z\|^2 = \|X - X_Y\|^2 = \|X\|^2 - \|X_Y\|^2, \tag{6}$$

тобто із (5) та (6) випливає, що $Y = X_Y$.

Приклад 1. Прикладом, що демонструє користь властивості узгодження, є функціонально-векторна аналогія, відповідно до якої випадкові величини можуть трактуватися як вектори у гільбертовому просторі. Наведемо відому [5] властивість екстремальності (мінімальності) дисперсії деякої випадкової величини X, яка полягає у тому, що функція

$$D = E\left\{\left(X - \Psi_0\right)^2\right\} \tag{7}$$

досягає мінімуму, якщо існує рівність

$$E\{\Psi_0 X\} = \Psi_0^{\ 2},$$

а це можливо, коли $E\{X\} = \Psi_0$. Тобто за аналогією із (4) величина Ψ_0 є лінійно узгодженою із випадковою величиною X. Причому мінімум (7) дорівнює дисперсії σ_X^2 випадкової величини X, тобто

$$D = E\{X^2\} - \Psi_0^{\ 2} = \sigma_X^2 . \tag{8}$$

Зазначимо, що властивість мінімізації дисперсії або середньоквадратичної похибки (СКП) є дуже важливою в математичній статистиці, адже ця категорія є однією з основних характеристик точності алгоритмів статистичного оцінювання та якості вирішних правил при перевірці статистичних гіпотез, які, як вже було зазначено вище, є математичною основою більшості методів статистичного розпізнавання образів.

2. Оптимальність коефіцієнтів розкладу

Як показано в [3,6], для забезпечення мінімуму величини квадрата похибки наближення $D_S = \|Z\|^2$ порідного вектора X поліноміальним узгодженим вектором Y, який отримано при певній степені апроксимуючого поліному S, необхідно, щоб складові вектора коефіцієнтів K розкладу знаходились із вирішення системи S лінійних алгебраїчних рівнянь, які можуть бути записані в матричній формі

$$KF = B, \tag{9}$$

де F – квадратична матриця розмірності S, що містить так звані [2] центровані корелянти $F_{i,j} = E\{[\varphi_i(x) - \Psi_i][\varphi_j(x) - \Psi_j]\}$, $i, j = \overrightarrow{1,S}$, а B – вектор-стовпець розмірності S, який складається із елементів $B_i = E\{[x - \Psi_0][\varphi_i(x) - \Psi_i]\}$, $i = \overrightarrow{1,S}$, а через Ψ_0, як і в (7), позначено математичне сподівання $\Psi_0 = E\{x\}$.

Для мінімізації D_S також необхідно, щоб коефіцієнт k_0 знаходився із співвідношення

$$k_0 = \Psi_0 - K\Psi, \tag{10}$$

де Ψ – вектор-стовпець розмірності S, який складається із відповідних (2) математичних сподівань Ψ_i, $i = \overrightarrow{1,S}$.

Із врахуванням (3) та (10) величину квадрата похибки наближення можна записати

$$D_S = \{[X - \Psi_0] - K[\Phi(X) - \Psi]\}^2 . \tag{11}$$

3. Мінімізація дисперсії (середньоквадратичної похибки)

Форма представлення D_S у вигляді (11) є показовою, адже, з одного боку, дає змогу провести аналогію з класичними результатами теорії оцінювання та перевірки статистичних гіпотез, а з іншого, демонструє сутність методу розпізнавання, що пропонується.

Приклад 2. Розглянемо типову задачу із теорії перевірки простих статистичних двоальтернативних ($M = 2$) гіпотез, відповідно до постановки якої, реалізацію обсягу N нормально розподіленої випадкової величини X з дисперсією σ_X^2 вважають такою, що належить до класу $m = 0$ (гіпотеза H_0), якщо її математичне сподівання дорівнює $\Psi_0^{(0)}$, а альтернативою гіпотезою H_1 (приналежність до класу $m = 1$) – якщо математичне сподівання рівне $\Psi_0^{(1)}$ ($\Psi_0^{(0)} \neq \Psi_0^{(1)}$). При розв'язанні цієї задачі як класифікаційної статистичної ознаки, як правило, вибирають лінійну оцінку (статистику) середнього значення

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n ,$$

адже легко показати, що

$$\underset{N\to\infty}{lim}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n\right) = \Psi_0 , \tag{12}$$

а отже, ступінь наближення (мінімальна відстань) $\overline{X}$ до одного з математичних сподівань $\Psi_0^{(m)}$ і визначатиме приналежність X до того чи іншого класу $m = 0,1$. Критерієм близькості в такому разі є середньоквадратична похибка (середній квадрат відстані) між оцінкою та очікуваним значенням математичного сподівання

$$D_N = E\left\{\left(\overline{X} - \Psi_0\right)^2\right\} = \frac{\sigma_X^2}{N} . \tag{13}$$

Зміст прикладів 1 та 2 показує, що при лінійному опрацювання єдиним способом зменшення середньоквадратичної похибки при визначеній величині дисперсії статистичних даних є збільшення їх розміру (обсягу вібірки N). У цьому контексті аналіз (11) відкриває новий шлях до зменшення величини похибок, сутність якого полягає в оптимальному (в сенсі мінімуму СКП при певному порядку S формуючого полінома) виборі для кожного із M класів вектора коефіцієнтів $K^{(m)}$, який мінімізує величину $D_S \le D$, що в оптимальному випадку дорівнює

$$D_S = D - KB = D - J_S . \tag{14}$$

Величину $J_S = KB$ називають [2] інфоркуною стохастичного полінома. Її значення характеризує ступінь наближення поліноміального узгодженого вектора Y до порідного вектора X залежно від порядку полінома S. Динаміку апроксимації можна прослідити, якщо скористатися поняттям годографа вектор-функції як кривої, що зображує множину кінців змінного вектора, початком якого при всіх значеннях аргументу є фіксована точка. За аналогією з роботою [4] наведемо таке означення.

Означення 2. *D-годографом* порідного вектора X назвемо годограф послідовності його апроксимант у вигляді узгоджених векторів Y, отриманих при різних порядках S.

Очевидно, що годограф векторної послідовності як функції дискретного аргументу S стає сукупністю вершин полігона – ламаної зі стрибками від S до $S+1$ апроксиманти (див. рис.1). В роботі [4] показано, що вершини всіх D-полігонів лежать на півколі, діаметром якого є апроксимований (порідний) вектор X. Доведення цієї властивості ґрунтується на співвідношенні (6), відповідно до якого множина кінців векторів-апроксимант, відкладених від початку апроксимованого вектора, збігається з вершинами прямих кутів, утворених вектором похибки з апроксимантою.

Характер траєкторії D-годографа, наведений на рис.1, підтверджує можливість зменшення дисперсії σ_Z^2 випадкової величини $Z = X - Y$ при відповідному, знайденому із (9), оптимальному наборові коефіцієнтів K. Тоді при $S \to \infty$ величина інфоркуни асимптотично прагне до $J_S \to D$, а дисперсія $\sigma_Z^2 \to 0$, і, відповідно, має місце розклад випадкової величини в стохастичний функціональний ряд.

4. Побудова системи розпізнавання

Все вищевикладене дає змогу давати відповіді на два основні питання, які виникають при побудові систем розпізнавання образів: вибір інформаційних ознак та визначення процедури класифікації [1].

З огляду на викладені особливості представлення випадкових величин у вигляді стохастичних рядів, для зменшення розмірності вхідних статистичних даних X як основного набору інформаційних ознак класифікації пропонується використовувати статистики (середні значення) нелінійних базисних функції $\varphi_i(\cdot)$, тобто

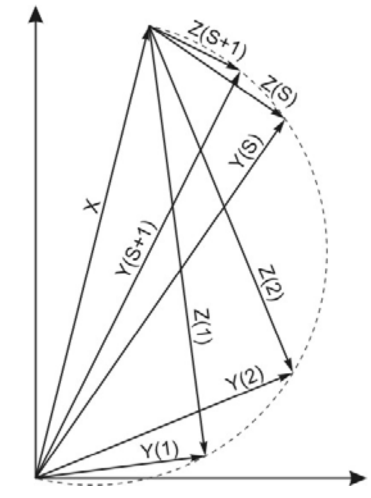

Рис. 1. D-полігон наближення випадкової величини стохастичним поліномом

$$\overline{\Phi_i(X)}=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\varphi_i(x_n),\ i=\overrightarrow{1,S},\ S<<N. \qquad (15)$$

Аналізуючи (11) з точки зору теорії статистичного оцінювання, процедуру класифікації можна інтерпретувати як зважене (на оптимальні для свого класу коефіцієнти $K^{(m)}$, $m=\overrightarrow{0,M-1}$) порівняння (визначення відстаней) оцінок $\overline{\Phi_i(X)}$ та їх математичних сподівань $\Psi_i^{(m)}$, $i=\overrightarrow{1,S}$, $m=\overrightarrow{0,M-1}$, характерних для кожного з M класів. Очевидна асимптотичність такого підходу, адже за аналогією з (12) можна показати, що

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\varphi_i(x_n)\right)=\Psi_i.$$

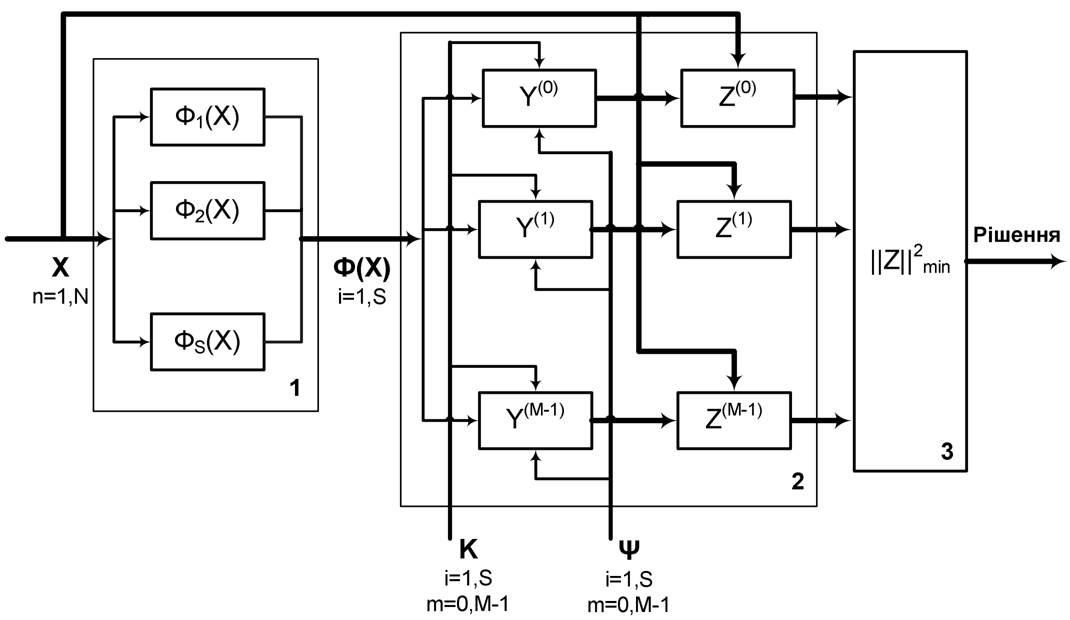

Рис. 2. Структура системи статистичного розпізнавання образів на основі розкладу в просторі з порідним елементом

На основі елементів $\varphi_i(x_n)$, $i=\overrightarrow{1,S}$, $n=\overrightarrow{1,N}$ статистик (15) для кожного з M класів формується свій поліноміальний вектор $Y^{(m)}$, $m=\overrightarrow{0,M-1}$, і лише одному із них буде притаманна властивість узгодженості (максимальної близькості) з порідним вектором X. Отже, процес відображення простору ознак в простір рішень полягатиме в обчисленні M середньоквадратичних відстаней між вхідним (порідним) вектором X та відповідними поліноміальними векторами $Y^{(m)}$, $m=\overrightarrow{0,M-1}$. Відповідно критерієм винесення рішень про приналежність образу X до того чи іншого класу буде мінімальне значення квадрата норми одного з векторів $Z^{(m)}$, тобто

$$\left\|Z^{(m)}\right\|^2=\left[X-Y^{(m)}\right]^2,\ m=\overrightarrow{0,M-1}.$$

Загальну структуру системи статистичного розпізнавання образів, побудовану на основі розкладу в просторі з порідним елементом, умовно можна представити (див. рис. 2) у вигляді трьох основних функціональних блоків:

1) блоку формування S статистичних класифікаційних ознак;
2) блоку формування M векторів різниць між порідним та поліноміальними порядку S векторами;
3) блоку винесення рішень на основі визначення мінімальної із M величин СКП розкладу.

Висновки

Запропонований метод розпізнавання образів ґрунтується на лінійному статистичному оцінюванні (усередненні) нелінійних функціональних перетворень вхідних статистичних даних з подальшим оптимальним в сенсі забезпечення мінімуму середньоквадратичної похибки їх порівнянням з очікуваними значеннями цих оцінок для кожного з класів. Отже, цей метод можна віднести до класу нелінійних параметричних методів, що працюють за правилом «найближчого сусіда».

Наявність нелінійних процедур опрацювання дає змогу передбачити потенційну ефективність застосування цього методу для розпізнавання образів саме в тих ситуаціях, коли не підтверджується гіпотеза про нормалізацію статистичних даних, і вони розподілені за деяким іншим, негауссовим законом. Подібні передбачення підтверджуються результатами ряду експериментів, отриманих шляхом імітаційного моделювання.

Необхідно також зазначити, що введене в постановці задачі обмеження на однаковий розподіл та незалежність елементів вхідного вектора може бути нівельовано, а запропонований метод розпізнавання узагальнено на складніший випадок множинності розподілів та кореляції статистичних даних, що планується зробити в подальших роботах.

1. Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов. – М.: Наука, 1979. – 368 с. 2. Кунченко Ю.П. Полиномиальные оценки параметров, близких к гауссовским случайным величинам. Ч.1. Стохастические полиномы, их свойства и применение для нахождения оценок параметров. – Черкассы: ЧИТИ, 2001. – 133 с. 3. Кунченко Ю.П. Полиномы приближения в пространстве с порождающим элементом. – К.: Наук. думка, 2003. – 243 с. 4. Драґан Я. Енергетична теорія лінійних моделей стохастичних сигналів: – Львів: Центр стратегічних досліджень екобіотехнічних систем, 1997. – 333 с. 5. Parzen E. Time series analysis paper. San-Francisco: Holden-day, 1967. – 565 p. 6. Заболотній С.В. Про деякі результати, отримані за допомогою методу неортогонального розкладання випадкових величин в просторі з породжуючим елементом // Вісник ЧДТУ. – 2007. – № 1–2. – С.50–54.