

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ВЕЗ В УМОВАХ СКЛАДНОГО РЕЛЬЄФУ МІСЦЕВОСТІ

Представлено алгоритми для математичного моделювання електророзвідувальних робіт постійним струмом у тривимірних геосередовищах із складними границями розділу. Запропоновано методику нормування кривих ВЕЗ для їх інтерпретації з врахуванням рельєфу місцевості. Вибрано ефективні алгоритми розв'язку оберненої задачі для горизонтально-шаруватого півпростору. На основі розроблених алгоритмів створено комплекс програм для моделювання електрометричних робіт та інтерпретації результатів ВЕЗ.

Ключові слова: математичне моделювання; вертикальні електричні зондування; рельєф поверхні; обернена задача.

Вступ. Сучасний розвиток геофізичної науки та техніки спричинив появу багатьох нових методів електророзвідки. Проте не втратили своєї актуальності і класичні методи постійного електричного струму, серед яких і вертикальні електричні зондування (ВЕЗ). Стандартна методика їх інтерпретації базується на моделі горизонтально-шаруватого півпростору. Однак, реальне середовище може суттєво відрізнитися від нього, що призводить як до ускладнення процесу інтерпретації, так і до неточностей у визначенні справжніх параметрів геологічного середовища (глибин залягання границь пластів, питомого опору гірських порід тощо). Одним із факторів, що може суттєво впливати на достовірність результатів інтерпретації ВЕЗ, особливо у гірських районах, є нерівності денної поверхні [Сапужак та ін., 2006].

Загальна постановка задачі. У роботі поставлено завдання розробити програмне забезпечення для інтерпретації кривих ВЕЗ у неоднорідному середовищі із складним рельєфом поверхні. Для цього необхідно було розробити алгоритми:

- знаходження електричного потенціалу у складному кусково-однорідному середовищі;
- нормування кривих вертикальних електричних зондувань для врахування рельєфу місцевості;
- розв'язку оберненої задачі ВЕЗ для горизонтально-однорідного півпростору з використанням рішення прямої задачі для такого середовища.

Математична модель кусково-однорідного середовища. Розглянемо тривимірний простір, у якому маємо область Ω , що складається із M електрично-однорідних областей Ω_m провідністю σ_m із геометрично складними границями $\partial\Omega_m$, $\Omega = \cup \Omega_m$, $m = 1, \dots, M$, $\partial\Omega_m \cap \partial\Omega_n = S_{mn}$, $m, n = 1, \dots, M$, $m \neq n$. При цьому вважається, що границя $\partial\Omega$ (денна поверхня), $\partial\Omega = \cup S_{m0}$, $m = 1, \dots, M$, електрично-ізольована, а на S_{mn} виконуються умови неперервності потенціалу та густини струму. Для знаходження електричного потенціалу та густини струму в області Ω маємо рівняння:

$$\Delta U_m = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 U_m}{\partial x_i^2} = -g_m / \sigma_m, \quad x \in \Omega_m \quad (1)$$

де g_m – контрольовані джерела струму в Ω_m , $x = (x_1, x_2, x_3)$ – система координат, спільна для всіх Ω_m , та граничну і контактні умови:

$$-\sigma_m \frac{\partial U_m}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad x \in S_{m0}, \quad (2)$$

$$U_m = U_n, \quad -\sigma_m \frac{\partial U_m}{\partial \mathbf{n}} = -\sigma_n \frac{\partial U_n}{\partial \mathbf{n}}, \quad x \in S_{mn}, \quad (3)$$

де \mathbf{n} – нормалі до поверхонь в точках визначення густини струму.

Для розв'язку задачі використаємо метод граничних елементів [Сапужак, 2002]. Кожну з границь S_{mn} поділимо на P_{mn} граничних елементи γ_{mnp} , $p = 1, \dots, P_{mn}$ так, що:

$$\bigcup_{p=1}^{P_{mn}} \gamma_{mnp} = S_{mn}, \quad \gamma_{mns} \cap \gamma_{mnt} = \emptyset, \quad s \neq t,$$

$$P_{mn} = P_{nm}, \quad \gamma_{mnp} = \gamma_{nmp}, \quad n \neq 0.$$

Нескінчені границі розбиваються на граничні елементи лише в області моделювання.

На кожному граничному елементі γ_{mnp} введемо невідомі джерела постійної інтенсивності g_{mnp} . Тепер, вимагаючи задоволення граничних і контактних умов (2),(3) у точках колокації на кожному граничному елементі, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР):

$$U_{m0} + \sum_{n=1}^M \sum_{p=1}^{P_{nm}} (1 - \delta_{mn}) g_{nmp} \int_{\gamma_{mnp}} E_m(x, \xi) d\gamma_{mnp} = \quad (4)$$

$$U_{n0} + \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^{P_{nm}} (1 - \delta_{nm}) g_{nmp} \int_{\gamma_{mnp}} E_n(x, \xi) d\gamma_{mnp},$$

$$q_{m0} + \sum_{n=1}^M \sum_{p=1}^{P_{nm}} (1 - \delta_{mn}) g_{nmp} \int_{\gamma_{mnp}} F_m(x, \xi) d\gamma_{mnp} = \quad (5)$$

$$q_{n0} + \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^{P_{nm}} (1 - \delta_{nm}) g_{nmp} \int_{\gamma_{mnp}} F_n(x, \xi) d\gamma_{mnp},$$

$$q_{m0} + \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^{P_{m0}} g_{m0p} \int_{\gamma_{m0p}} F_m(x, \xi) d\gamma_{m0p} = 0, \quad (6)$$

де $m = 1, \dots, M$, $n = m+1, \dots, M$, $p = 1, \dots, P_{mn}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ – система координат, що співпадає з x та використовується для визначення відстаней, δ_{mn} – символ Кронекера,

$$U_{m0} = \int_{\Omega_m} g_m E_m(x, \xi) d\Omega_m, \quad q_{m0} = \int_{\Omega_m} g_m F_m(x, \xi) d\Omega_m,$$

$$E_m(x, \xi) = \frac{1}{4\pi\sigma_m r}, \quad F_m = \frac{y_1 n_1 + y_2 n_2 + y_3 n_3}{4\pi r},$$

$$y_i = x_i - \xi_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad r^2 = y_1 y_1 + y_2 y_2 + y_3 y_3.$$

Розв'язавши СЛАР, знайдемо невідомі джерела. Тоді, у довільній точці областей Ω_m потенціал та густину струму можемо знайти за формулами:

$$U_m = U_{m0} + \sum_{n=0}^M \sum_{p=1}^{P_{mn}} (1 - \delta_{mn}) g_{mnp} \int_{\gamma_{mnp}} E_m(x, \xi) d\gamma_{mnp}, \quad (7)$$

$$q_m = q_{m0} + \sum_{n=0}^M \sum_{p=1}^{P_{mn}} (1 - \delta_{mn}) g_{mnp} \int_{\gamma_{mnp}} F_m(x, \xi) d\gamma_{mnp}, \quad (8)$$

Розроблені алгоритми та розрахункові формули можна використовувати для розрахунку прямої задачі електророзвідки постійним струмом у кусково-однорідних середовищах із геометрично складними границями розділу середовищ, у тому числі і денної поверхні. Крім того, у випадку моделі середовища, яка складається тільки з однієї області та однієї границі (денної поверхні), формули (1)–(8) також використовуються для розрахунку впливу рельєфу на дані методів постійного електричного струму (ВЕЗ, профілювання тощо).

Методика розрахунку впливу рельєфу на дані вертикальних електричних зондувань. При реальних польових спостереженнях методами постійного електричного струму звичайно використовують трансформацію кривих у позірний опір: $\rho_n = K \cdot dU / I$, (9) де K – геометричний коефіцієнт установки, dU – різниця потенціалів, I – сила струму.

Відомо, що в однорідному півпросторі r_n дорівнює справжньому питомому опору r_c середовища. Якщо ж поверхня однорідного середовища відрізняється від площини, тобто має рельєф, то позірний опір (позначимо його r_p) не збігатиметься зі справжнім. Очевидно, що і в неоднорідному середовищі рельєф впливатиме на електророзвідувальні дані, а отже, і на результати інтерпретації. Щоб коректно врахувати цей вплив [Сапужак та ін., 2006], запропоновано провести трансформацію польових кривих ВЕЗ шляхом введення коефіцієнтів нормування k_n для кожного розташування електродів (розносу) та, відповідно, іншого геометричного коефіцієнту K . Для моделі електрично-однорідного середовища з рельєфом поверхні за формулами (1)–(8) розраховуються потенціали для кожного K та перераховуються у позірний опір r_p як визначено у (9). Знаючи справжній питомий опір r_c знаходимо коефіцієнти нормування:

$$k_n = r_c / r_p. \quad (10)$$

Отже, маючи реальні дані про рельєф місцевості, ми можемо розрахувати коефіцієнти нормування за формулами (1)–(9) для кожного

значення позірного опору кривої ВЕЗ. При потребі запропоновану методику можна також використовувати і для нормування результатів інших методів постійного струму – профілювання, дипольного зондування, багатоелектродної томографії тощо.

Розв'язання оберненої задачі ВЕЗ у горизонтально-шаруватому середовищі. Після нормування кривої позірного опору ВЕЗ подальшу її інтерпретацію можна виконувати класичними методами [Матвеев, 1974]. Відомо, що проблема розв'язку оберненої задачі полягає в її неоднозначності, тобто для вимірних значень поля може відповідати декілька варіантів значень параметрів. Неоднозначність закладається із самого початку проведення вимірів електричного поля: обмеження інтервалу вимірів, дискретизація, апаратні похибки та інше. Все це накладається на розв'язок оберненої задачі. Переважно обернена задача ВЕЗ розв'язується методом підбору, який полягає у варіації параметрів моделі розрізу, щоб досягнути задану точність між теоретичною та експериментальною кривими. Загальний алгоритм розв'язку оберненої задачі можна записати наступними кроками:

- ввід експериментальної кривої та моделі початкового наближення;
- розв'язок прямої задачі (розрахунок теоретичної кривої);
- розрахунок нев'язки експериментальної та теоретичної кривих;
- перевірка умов закінчення розв'язку оберненої задачі;
- розрахунок поправок параметрів для зменшення нев'язки;
- розрахунок нових параметрів моделі та перехід знову до розв'язку прямої задачі.

Одним з методів, який широко використовується для мінімізації багатовимірних обернених задач геофізики, в тому числі і для інтерпретації ВЕЗ, і застосований нами, є алгоритм швидкого спуску [Куфуд, 1984; Хмелевской, Шевнин, 1992]. Цей метод дозволяє отримати розв'язок оберненої задачі з порівняно невеликими обчислювальними затратами.

Для розв'язку оберненої задачі ми використовуємо модель горизонтально-однорідного півпростору, для якого вирішується пряма задача. Одним з методів, які для цього застосовуються, є метод дзеркальних відображень [Матвеев, 1974]. Суть методу полягає у тому, що вплив плоских границь розділу враховується введенням фіктивних джерел, дзеркально відображених відносно цих границь. Недоліком цього методу є порівняно великі розрахункові затрати, які виникають при обчисленні рядів, збіжність яких залежить від значень питомих опорів. При наявності сильно контрастних середовищ ряди збігаються повільно. З іншого боку, перевагою цього методу виступає

можливість розрахунку з високою точністю параметрів електричного поля при наявності великої кількості числа членів ряду, які сумуються. Враховуючи це, ми використали метод дзеркальних відображень для тестування точності інших більш швидких алгоритмів.

Нами було обрано метод лінійної фільтрації, серед переваги якого – швидкий розрахунок прямої задачі ВЕЗ, в тому числі і у сильноконтрастних середовищах, з непоганою точністю. Слід зазначити, що, використовуючи різні фільтри для розрахунків: Гоша, Рижова [Рыжов, Каринская, 1981], Йохансона, короткого (8 точок) та довгого (15 точок) Абрамової [Хмелевской, Шевнин, 1988], ми отримували різну точність. Наприклад, при використанні восьмиточкового фільтру Абрамової похибка обчислень сильно зростала при збільшенні величини розносів ВЕЗ. Проведені тестування показали, що найкращим (найточнішим) виявився 15-точковий фільтр Абрамової – найбільш стійкий до змін параметрів розрізів (контрастності, кількості шарів) та розмірів розносів, тому ми зупинилися на використанні саме цього фільтра для розв'язання оберненої задачі.

Висновки. З використанням методу граничних елементів розроблено алгоритми для математичного моделювання електророзвідувальних робіт постійним струмом у тривимірних геосередовищах, в тому числі із складним рельєфом денної поверхні та границь розділу. Використовуючи створений математичний апарат, розроблено методику нормування кривих ВЕЗ для їх інтерпретації з врахуванням складного рельєфу денної поверхні. На основі тестування (порівняння результатів із

методом дзеркальних відображень) різних способів рішення прямої задачі для горизонтально-шаруватого півпростору вибрано оптимальний за швидкістю та точністю алгоритм, що був застосований для реалізації розв'язку оберненої задачі.

Розроблені алгоритми дозволили створити комплекс програм, який можна застосовувати на всіх стадіях електрометричних робіт – від моделювання спостережень та визначення можливості виявлення геологічних об'єктів до інтерпретації реальних польових результатів.

Література

- Куфуд О. Зондирования методом сопротивлений. – М., 1984. – 270 с.
- Матвеев Б.К. Интерпретация электромагнитных зондирований. – М., Недра, 1974. – 232 с.
- Рыжов А.А., Каринская И.Д. Программы решения прямой и обратной задачи ВЭЗ и ВЭЗ-ВП для ЭВМ серии ЕС. – М, 1981. – 134 с.
- Сапужак О. Геоэлектрическое поле у неоднородному середовищі із складним рельєфом денної поверхні // Праці НТШ. – Львів: НТШ, 2002. – Т.VIII. – С. 25–29.
- Сапужак Я., Сапужак О., Сиороечко О. Методика розрахунку впливу рельєфу на дані вертикальних електричних зондувань // Праці НТШ. – Львів: Вид-во НТШ, 2006. – Т.XVII: Геофізика. – С. 11–21.
- Хмелевской В., Шевнин В. Электрическое зондирование геологической среды. – Моск. ун-т, Ч. 1, 1988. – 176 с.
- Хмелевской В., Шевнин В. Электрическое зондирование геологической среды. – Моск. ун-т, Ч. 2, 1992. – 200 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЭЗ В УСЛОВИЯХ СЛОЖНОГО РЕЛЬЕФА МЕСТНОСТИ

О.Я. Сапужак, О.В. Сыроечко

Представлено алгоритмы для математического моделирования электроразведочных работ постоянным током в трехмерных геосредах со сложными границами раздела. Предложено методику нормирования кривых ВЭЗ для их интерпретации с учетом рельефа местности. Выбраны эффективные алгоритмы решения обратной задачи для горизонтально-слоистого полупространства. На основании разрабатываемых алгоритмов создан комплекс программ для моделирования электрометрических работ и интерпретации результатов ВЭЗ.

Ключевые слова: математическое моделирование; вертикальные электрические зондирования; рельеф поверхности; обратная задача.

MATHEMATICAL MODELING AND INTERPRETATION VES DATA FOR A COMPLEX SURFACE RELIEF

O. Sapuzhak, O. Syrojezhko

Algorithms for the mathematical modeling of the direct current electrical prospecting in the 3D complex boundary geomedias are presented. Methods of normalization VES data for the interpretation accounting any surface relief are suggested. Effective algorithms of the direct problem solution for a horizontal layered halfspace are chosen. On the basis of the above the software for electrical prospecting modeling and VES data interpretation is developed.

Key words: mathematical modeling; vertical electrical sounding; surface relief; inverse problem.