України, 2004. – С. 255–260. 5. Шваб'юк В.І., Максимович О.В., Соляр Т.Я Розрахунок динамічних напружень біля криволінійних тріщин при зсуві на основі уточненої формули чисельного обернення Лапласа //. Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2005. – 47, №1. – С. 148–157. 6. Chen W. and Renji T. Cauchy singular integral eguation method for transient antiplane dynamic problems // Eng. Fract. Mech. – 1996. – №54. – P.177–187. 7. Kanninen M.F. A critical appraisal of solution techniques in dynamic fracture mechanics // Numer. Math. Fracture Mech (Edited by Luxmore A.R. and Owen D.R.J.). – Swansea, 1978. – P. 612–634. 8. Ch. Zhang, D. Gross. On Wave Propagation in Elastic Solids with Cracks. – Computational Mechanics Publications Southampton, UK, Boston, USA. – 1998. – 264 P.

УДК 534.1+539.5

Б.І. СОКІЛ, О.І. ХИТРЯК, М.Б. СОКІЛ, *М.П. КОЗЛИНСЬКИЙ
Академія сухопутних військ ім. гетьмана Петра Сагайдачного,
*Національний університет "Львівська політехніка"

ДИНАМІКА І СТІЙКІСТЬ ГНУЧКИХ ЕЛЕМЕНТІВ СИСТЕМ ПРИВОДУ ЗА ЗМІННОЇ СИЛИ НАТЯГУ

Проведено дослідження впливу швидкості поздовжнього руху та змінного натягу на поперечні коливання у гнучких двовимірних елементах систем приводів. Отримано співвідношення, які описують основні параметри динамічного процесу.

Researches of influence of a velocity of longitudinal movement and variable tension on the transverse vibrations in flexible two-dimensional belt drive systems. The relations describing key parameters of the dynamic process are received.

Актуальність та огляд основних результатів досліджень. Динамічні системи, що характеризуються поздовжньою швидкістю руху, зустрічаються у різних сферах інженерної діяльності: рухомі сталеві полоси на тонкій металевій технологічній лінії, привідні паси, магнітні стрічки, леза стрічкових пил, паперові листи під час обробки та ін. Незважаючи на широке використання цих елементів систем, їх вібрації та коливання сьогодні недостатньо вивчені. Водночас останні обмежують можливості їх застосування. Так, наприклад, у магнітних стрічках коливання створюють модуляції сигналу та прискорюють зношуваність стрічки, у стрічкових пилах коливання леза призводить до низької якості обробки різанням. Такі коливання спричиняють, з одного боку, надто дорогі дефекти у кінцевому продукті виробництва, а з іншого – їх наслідком є значне перевантаження у об'єкті коливань. Саме тому вивчення поперечних коливань у рухомих об'єктах є важливим ще на етапі проектування технологічних ліній, що їх містять. Збудником небажаних коливань рухомих гнучких об'єктів як складових елементів механічних систем можуть бути шківи з ексцентриситетом, нестаціонарні швидкості привідного двигуна і навіть сили аеродинамічної природи навколишнього середовища.

Впродовж останніх десятиліть набули широкого розвитку дослідження гіперболічних диференціальних рівнянь, які описують динамічні процеси як у лінійних, так і нелінійних моделях рухомих систем [1–9]. Зокрема, у роботах [6–9] розглядалися поперечні та поздовжні коливання одно- та двовимірних гнучких елементів систем приводу, що характеризуються сталою швидкістю поздовжнього руху. З математичного погляду, динамічні процеси у зазначених системах описуються диференціальними рівняннями із частинними похідними та сталими коефіцієнтами, що містять мішану похідну за часовою та просторовою координатами. Із цим пов'язані основні труднощі дослідження навіть лінійних моделей систем [4, 5]. У випадку змінних швидкості руху гнучкого елемента та сили натягу у ньому математичними моделями динамічних процесів є якісно нові співвідношення, а саме диференціальні рівняння із змінними коефіцієнтами [7]. Змінні в часі параметри (швидкість, натяг) суттєво впливають на стійкість коливань досліджуваних об’єктів. З огляду на вказане, дослідження стійкості динамічних процесів двовимірних гнучких елементів систем приводу за змінних у часі параметрів є актуальною задачею.

Постановка задачі. Математичною моделлю поперечних коливань двовимірного гнучкого елемента систем приводу, що характеризується швидкістю поздовжнього руху та змінним натягом у змінних Ейлера [10], є диференціальне рівняння [9].

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2V\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}-(\frac{S(t)}{r}-V^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{mS(t)}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\varepsilon f\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right). \tag{1}$$

У (1) $u(t,x,y)$ – переміщення серединної поверхні гнучкого двовимірного тіла в напрямку, перпендикулярному до цієї поверхні у довільний момент часу t, r – маса одиниці площі, V – швидкість поздовжнього руху, що є незмінною величиною, $S(t)$ – змінний у часі натяг гнучкого елемента, m – коефіцієнт Пуассона, $f\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$ – аналітична функція, що описує нелінійні складові зв’язку між деформаціями та переміщеннями, в’язкопружні сили, що діють на гнучке тіло, ε – малий параметр.

Нехай крайові умови для диференціального рівняння (1) набудуть вигляду

$$u(x,y,t)_{|x=0}=u(x,y,t)_{|x=l}=0, \tag{2}$$

$$u(x,y,t)_{|y=0}=u(x,y,t)_{|y=b}=0. \tag{3}$$

де l, b – геометричні параметри гнучкого елемента (віддаль між точками дотику до шківів). Задача полягає у дослідженні впливу змінної сили натягу на динамічний процесс, зокрема на його стійкість.

Методика розв’язування задачі. Аналітичні методи дослідження динаміки та стійкості процесів у гнучких елементах розроблені у достатній мірі для випадків коливань систем із закріпленими кінцями (без урахування швидкості поздовжнього руху). Щодо рухомих систем, то такі задачі частково розглядались у роботах [6,7], де показано значний вплив швидкості поздовжнього руху на стійкість коливань. У цій роботі, використовуючи основну ідею [6], досліджується динаміка складніших, а саме двовимірних гнучких елементів систем приводу. Суть її полягає у наступному. Використовуючи базові принципи методу Бубнова–Гальоркіна для крайової задачі (1)–(3), функцію $u(x,y,t)$ шукатимемо у вигляді

$$u(x,y,t)=\sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M}Y_m(y)X_k(x)T_{km}(t), \tag{4}$$

де $X_k(x)$ функції, що справджують крайові умови, які випливають із (2)

$$X_k(x)_{|x=0}=X_k(x)_{|x=l}=0, \tag{5}$$

а $Y_m(y)$ – крайові умови, які випливають із (3), тобто

$$Y_m(y)_{|y=0}=Y_m(y)_{|y=b}=0. \tag{6}$$

За вказані функції можна вибрати повну ортонормовану систему функцій $\{X_k(x)\} = \left\{\sin\left(\frac{kp}{l}x\right)\right\}_{k=1}^{K}$, та $\{Y_m(y)\} = \left\{\sin\left(\frac{mp}{b}y\right)\right\}_{m=1}^{M}$. Із урахуванням вказаного, вираз (4) набуває вигляду

$$u(x,y,t) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M} T_{km}(t)\sin\left(\frac{mp}{b}y\right)\sin\left(\frac{kp}{l}x\right). \tag{7}$$

Шляхом диференціювання (7) за незалежними змінними отримуємо

$$\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} = -\sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M}\left(\frac{kp}{l}\right)^2 T_{km}(t)\sin\left(\frac{mp}{b}y\right)\sin\left(\frac{kp}{l}x\right);\ \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} = -\sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M}\left(\frac{mp}{b}\right)^2 T_{km}(t)\sin\left(\frac{mp}{b}y\right)\sin\left(\frac{kp}{l}x\right);$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M}\ddot{T}_{km}(t)\sin\left(\frac{mp}{b}y\right)\sin\left(\frac{kp}{l}x\right);\ \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t\partial x} = \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M}\frac{kp}{l}\cdot\dot{T}_{km}(t)\sin\left(\frac{mp}{b}y\right)\cos\left(\frac{kp}{l}x\right). \tag{8}$$

Підставивши знайдені залежності у рівняння (1), з використанням принципу одночастотності коливань отримуємо звичайне диференціальне рівняння із невідомими функціями $T(t)$

$$\ddot{T} + w^2 T = e\bar{f}(T, \dot{T}), \tag{9}$$

де $w^2 = \left\{\left(\frac{S(t)}{r} - V^2\right)\left(\frac{kp}{l}\right)^2 - \frac{S(t)m}{r}\left(\frac{mp}{b}\right)^2\right\}$,

$$\bar{f}(T,\dot{T}) = \frac{4}{lb}\int_0^l\int_0^b f\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\Bigg|_{u(x,y,t)=\sum\limits_{k=1}^{K}\sum\limits_{m=1}^{M}T_{km}(t)\sin\left(\frac{mp}{b}y\right)\sin\left(\frac{kp}{l}x\right)} \cdot\sin\left(\frac{kp}{l}x\right)\sin\left(\frac{mp}{b}y\right)dydx.$$

У наведеному вище рівнянні індекси km, які вказують на форму динамічної рівноваги, для простоти запису опущені. Отже, розв'язок задачі (1)–(3) має вигляд (7) за умови, що невідомі функції $T_{km}(t)$ визначаються із рівнянь (9).

Значний інтерес становить випадок, коли сила натягу гнучкого елемента систем приводу є періодичною функцією або близькою до неї. У цьому випадку її можна подати у вигляді $S(t) = Z_0 + \sum\limits_{n=1}^{N}\left(Z_n\cos nt + \bar{Z}_n\sin nt\right)$, n – частота зміни натягу гнучкого елемента. З урахуванням вказаного, диференціальне рівняння (9) набуває вигляду

$$\ddot{T} + \left\{\left(\frac{Z_0}{r} - V^2\right)\left(\frac{kp}{l}\right)^2 - \frac{Z_0 m}{r}\left(\frac{mp}{b}\right)^2\right\}T =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{Z_n}{r}\cos nt + \frac{\bar{Z}_n}{r}\sin nt\right)\left(m\left(\frac{mp}{b}\right)^2 - \left(\frac{kp}{l}\right)^2\right)T + e\bar{f}(T,\dot{T}). \tag{10}$$

Розглянемо параметричні коливання, які описуються рівнянням (10) у випадку, коли нелінійні сили з достатньою точністю можна апроксимувати залежністю

$$f\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = -k_1\frac{\partial u}{\partial t} + k_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{11}$$

Тоді права частина диференціального рівняння (11) матиме вигляд

$$e\bar{f}\left(T,\dot{T}\right)=-B\dot{T}+DT^{3}, \qquad (12)$$

де $B=k_1$ – коефіцієнт демпфування, пропорційний до швидкості, $D=-\frac{3}{16}k_2\left(\frac{kp}{l}\right)^4$ – коефіцієнт кубічної відновлювальної сили.

Найцікавішим із практичної точки зору є випадок, коли одна із частот періодичного збурення є близькою до власної частоти коливань динамічної системи. У цьому випадку має місце залежність

$$\left(\frac{Z_0}{r}-V^2\right)\left(\frac{kp}{l}\right)^2-\frac{Z_0 m}{r}\left(\frac{mp}{b}\right)^2=w^2-\Delta w^2, \qquad (13)$$

звідки $w=\left[\left(\frac{Z_0}{r}-V^2\right)\left(\frac{kp}{l}\right)^2-\frac{Z_0 m}{r}\left(\frac{mp}{b}\right)^2\right]^{0,5}\cdot(1-\Delta)^{-0,5}$, а параметр Δ вказує на відхилення власної частоти від частоти змушуючої сили. Із урахуванням (12), (13) рівняння (10) матиме вигляд

$$\ddot{T}+w^2T=w^2\Delta\cdot T+\sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n\cos nt+h_n\sin nt\right)\cdot T-B\dot{T}+DT^3, \qquad (14)$$

де $x_n=\frac{Z_n}{r}\left(m\left(\frac{mp}{b}\right)^2-\left(\frac{kp}{l}\right)^2\right)$, $h_n=\frac{\bar{Z}_n}{r}\left(m\left(\frac{mp}{b}\right)^2-\left(\frac{kp}{l}\right)^2\right)$ – коефіцієнти параметричного збурення.

Тобто отримано рівняння, що описує випадок довільного періодичного параметричного збурення. Відповідно до методу Ван-дер-Поля, його розв’язок за умови, що має місце залежність (13), шукатимемо у вигляді [7]

$$T=p\cos wt+q\sin wt. \qquad (15)$$

Це дає можливість отримати систему рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів p,q

$$\left(w^2\Delta+\frac{3}{4}D\Theta^2+G+H\right)p+(J-wB)q=0,$$

$$\left(w^2\Delta+\frac{3}{4}D\Theta^2+G-H\right)p+(J+wB)q=0, \qquad (16)$$

де $\Theta=\sqrt{p^2+q^2}$, $G=0{,}25\sum_{n=1}^{\infty}\left[\Psi_n+\Phi_n\right]\left(x_n^2+h_n^2\right)$, $\Psi_n=\left(w^2-(w-n)^2\right)^{-1}$, $\Phi_n=\left(w^2-(w+n)^2\right)^{-1}$,

$$H=0{,}5x_{2w}+0{,}25\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(x_nx_{2w-n}+x_nx_{n-2w}-h_nh_{2w-n}+h_nh_{n-2w}\right)\Psi_n+\left(x_nx_{n+2w}+h_nh_{n+2w}\right)\Phi_n\right],$$

$$J=0{,}5h_{2w}+0{,}25\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(x_nh_{2w-n}-x_nh_{n-2w}+h_nx_{2w-n}+h_nx_{n-2w}\right)\Psi_n+\left(x_nh_{n+2w}-h_nx_{n+2w}\right)\Phi_n\right].$$

Із (17) визначаємо необхідну умову існування тривіального розв’язку $p=q=0$

Отже, для існування параметричних коливань необхідно, щоб виконувалася умова $Q_1^2+Q_2^2\geq w^2B^2$. Зокрема у випадку косинусоїдального закону зміни натягу гнучкого елемента приводу

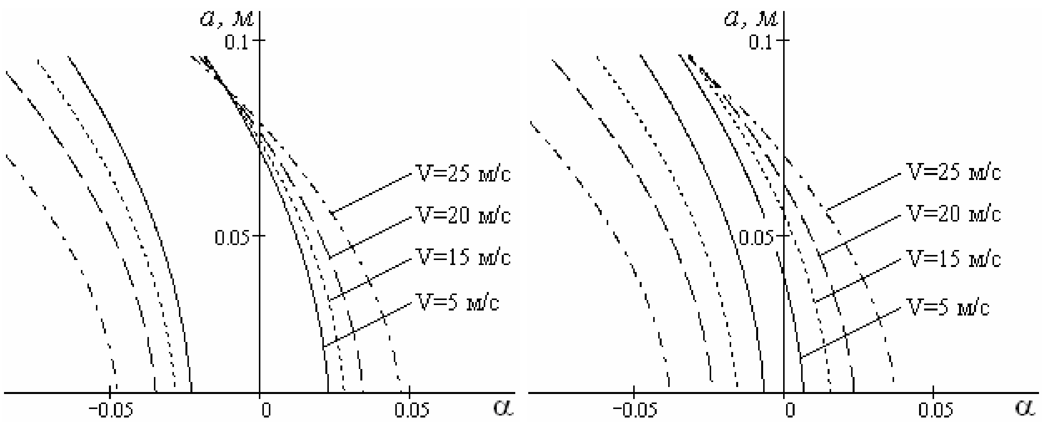
$$Z(t)=Z_0+Z_1\cos nt \qquad (18)$$

вона трансформується до вигляду

$$w^2\Delta = -\frac{3}{4}D\Theta^2 \pm \sqrt{0{,}25x^2 - w^2B^2}. \tag{19}$$

Дослідження системи рівнянь (16) в околі нульового розв’язку $r = s = 0$ $(e = 0)$ є доволі цікавим випадком, оскільки це пов’язано із вивченням стійкості тривіального розв’язку.

Нижче на рисунку зображено резонансні криві, які відповідають рівнянню (19) за таких значень параметрів: а) $b_1 = 3$; б) $b_2 = 4$.



а *б*

Резонансні криві, що відповідають (19) за різних значень коефіцієнта демпфування

Висновки. За наведеною методикою можна дослідити вплив швидкості поздовжнього руху та змінної сили натягу на динамічні процеси у двовимірних гнучких елементах систем приводу як для резонансного, так і для нерезонансного випадків. Наведені графічні залежності показують, що із зростанням розбалансування власних частот резонансна амплітуда для більших значень швидкостей поздовжнього руху є більшою. Крім цього, отримані аналітичні залежності дають можливість дослідити стійкість процесу, що є не менш важливою задачею динаміки гнучких елементів приводів.

1. Li-Qun Cheng Analysis and Control of Transverse Vibrations of Axially Moving Strings // Applied Mechanics Reviews. – 2005. – Vol. 58. – P.91-116. 2. Wei Zhang, Li-Qun Chen Vibration control of an axially moving string system: Wave cancellation method // Applied Mathematics and Computation. – 2006. – № 175. – P. 851–863. 3. F. Pellicano. Complex dynamics of high-speed axially moving systems // Journal of Sound and Vibration . – 2002. – № 258(1) . – 31–44. 4. Кузьо І. В. Харченко Є. В., Сокіл М. Б. Динамічні процеси у середовищах, які характеризуються поздовжнім рухом, та вплив крайових умов на амплітуду і частоту їх коливань // Вібрації в техніці і технологіях. – 2007. – № 3 (48). – С. 53–56. 5. Мартинців М. П., Сокіл М.Б. Одне узагальнення методу Д’Аламбера для систем, які характеризуються поздовжнім рухом // Науковий вісник: Збірник науково-технічних праць. – Львів: УДЛТУ, 2003. – Вип. 13.4. – С. 64–67. 6. Назар І.І., Сокіл Б.І. Метод Ван-дер-Поля у дослідженні періодичних збурень рухомих одновимірних систем // Оптимізація виробничих процесів і технічний контроль у машинобудуванні та приладобудуванні. – Львів, 2006. − №560. – С. 71–75. 7. Гащук П.М., Назар І.І. Вплив змушувальної сили на параметричні коливання гнучкого робочого елемента механічного приводу // Динаміка і міцність машин. − Львів, 2008. − №614. − С. 55–65. 8. Сокіл Б. І., Ліщинська Х. І. Вплив поздовжньої швидкості руху на поперечні коливання в двовимірних сильно нелінійних системах // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка” “Автоматизація виробничих *процесів у машинобудуванні та приладобудуванні”. – 2008. – №. 42. – С. 96–100. 9. Хитряк О.І. Хвильова теорія у дослідженні процесів у двовимірних системах зі сталою складовою швидкості поздовжнього руху / О. І. Хитряк // Науковий вісник: Збірник науково-технічних праць. – Львів: УДЛТУ, 2010. – Вип. 20.14. – С.340–344. 10. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы математической физики. – М.: Наука, 1973. – 352 с.*

УДК 621.9.048

З.А. СТОЦЬКО, В.Г. ТОПІЛЬНИЦЬКИЙ, Я.М. КУСИЙ, О.Т. ВЕЛИКА
Національний університет “Львівська політехніка”

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОПИСУ ДИНАМІКИ ТЕХНОЛОГІЧНИХ СЕРЕДОВИЩ НЕЛІНІЙНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ ОБРОБЛЕННЯ ТА ТРАНСПОРТУВАННЯ

Використовуючи асимптотичні методи нелінійної механіки, розроблено параметризовану математичну модель руху технологічних середовищ нелінійних механічних систем оброблення та транспортування, що дає змогу дослідити вплив їх параметрів при довільній їх комбінації на продуктивність роботи систем з метою їх оптимізації.

In activity, using the asymptotic methods of nonlinear mechanics, is worked out parametric mathematical model of motion of technological environments of the nonlinear mechanical systems of treatment and transporting, that allows to investigate influence of their parameters at their arbitrary combination on the productivity of work of the system with the purpose of her optimization.

Аналіз останніх досліджень і публікацій та постановка проблеми у загальному вигляді. Використання великої кількості технічних систем у галузі промисловості, транспорту, енергозабезпечення супроводжується виникненням різноманітних нелінійних коливних процесів, які можуть чинити як позитивний, так і негативний вплив. Зокрема в системах оброблення поверхонь виробів, наприклад, зміцнення поверхонь довгомірних циліндричних деталей обкатними пристроями чи поверхонь деталей різного ступеня складності потоком вільного незв‘язаного інструменту – коливання відіграють основну роль з виникнення чинників впливу на оброблювані об‘єкти. Оптимальне їх виникнення в цих механічних системах забезпечує якісні і кількісні показники їх функціонування, зокрема інтенсивність та продуктивність роботи [1]. З іншого боку, наприклад, при експлуатації низки транспортних систем – конвеєрних ліній та установок, різноманітних транспортерів, підвісних доріг, систем буксирування (лісове господарство), магістральних нафто- та газотрубопроводів, в лініях електропередач тощо, низки різноманітних обертових пристроїв різної маси (валів, турбін тощо) поперечні, поздовжні, крутильні коливання та їх комбінації можуть виникати як негативне явище, яке суттєво впливає на умови, стабільність та ефективність їх роботи, а у граничних випадках може спричинити їх вихід з ладу та серйозні ушкодження з відповідними економічними втратами [2]. Тому дослідження динамічних процесів у таких нелінійних дискретно-неперервних механічних системах є надзвичайно актуальною прикладною задачею.