

О.В. МАКСИМОВИЧ, *Т.Я. СОЛЯР

Луцький національний технічний університет

*Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України

АНТИПЛОСКА ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ АНІЗОТРОПНИХ ТІЛ З ПОРОЖНИНАМИ

© Максимович О.В., Соляр Т.Я., 2011

Розроблено методику дослідження усталених коливань анізотропних тіл з порожнинами за антипласкої деформації. Поставлену задачу зведено до допоміжної задачі теорії пружності для ізотропного матеріалу з модифікованими граничними умовами. Допоміжну задачу розв'язано за допомогою методу інтегральних рівнянь. Розраховано напруження біля порожнин еліптичної форми, зумовлених гармонійною хвилею для різних анізотропних матеріалів.

The procedure of investigation of steady-vibrations of anisotropic bodies with cavities at anti – plane deformation has been developed. The formulated problem has been reduced to auxiliary problem of elasticity theory for isotropic material with modified boundary conditions. The solution of auxiliary problem has been realized using the BIE method. Calculations of stresses near the cavities of elliptic shape caused by harmonic wave for different anisotropic materials have been made.

Розглядається задача про коливання анізотропного тіла, послабленого порожнинами за зсуву. Показано, що при відповідно вибраному афінному перетворенні в новій системі координат поставлена задача зводиться до розв'язування допоміжної задачі теорії пружності для деякого ізотропного матеріалу. Інші методи дослідження динамічних задач теорії пружності за антипласкої деформації анізотропних тіл розглядалися у [8]. Динамічні антипласкі задачі для ізотропних тіл є добре вивченими в літературі [1, 4–8].

Позначимо через D область, яку займає поперечний переріз тіла та віднесемо її до декартової системи координат Oxy . Антипласка задача зводиться до визначення переміщень $w = w(x, y, t)$, де t – час. Прийmemo, що на граничних кривих, які обмежують область D , відомими є: переміщення $w = w_D(x, y, t)$ при $(x, y) \in L_j^{(w)}$, $j = 1, \dots, J$ та дотичні напруження $t_n = T_D(x, y, t)$ при $(x, y) \in L_i^{(T)}$, $i = 1, \dots, I$. Тут w_D, T_D – відомі на відповідному контурі функції. Крім цього, для динамічної задачі задані початкові умови

$$w|_{t=0} = w_0, \quad \partial w / \partial t|_{t=0} = w_1, \quad \text{при } (x, y) \in D. \quad (1)$$

Закон Гука має вигляд

$$e_{yz} = a_{44} t_{yz} + a_{45} t_{xz}, \quad e_{xz} = a_{45} t_{yz} + a_{55} t_{xz}, \quad (2)$$

де a_{ij} – пружні сталі. Перепишемо співвідношення (2) у вигляді

$$t_{xz} = c_{11} \frac{\partial w}{\partial x} - c_{12} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad t_{yz} = -c_{12} \frac{\partial w}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (3)$$

де $c_{11} = a_{44} / \Delta$, $c_{22} = a_{55} / \Delta$, $c_{12} = a_{45} / \Delta$, $\Delta = a_{44} a_{55} - a_{45}^2$.

Підставивши співвідношення для напружень (3) у рівняння рівноваги, отримаємо

$$\Omega w - r \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (4)$$

де $\Omega = c_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2c_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, r – густина.

Напруження на межі області D через переміщення визначаються за формулою $t_n = t_{xz} n_1 + t_{yz} n_2$, де $n_{1,2}$ – напрямні косинуси нормалі до межі, а дотичні напруження визначаються за формулами (1).

Крайова задача у новій системі координат. Перейдемо до нових змінних, які введемо так: $x = x + a y$, $h = b y$, де a, b – довільні сталі.

Тоді у нових змінних отримаємо

$$\Omega w = (c_{11} - 2c_{12}a + c_{22}a^2) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + c_{22}b^2 \frac{\partial^2 W}{\partial h^2} + 2(-c_{12} + c_{22}a)b \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial h},$$

де $W(x, h) = w(x, y)$ при заміні $x = x(x, h) = x - \frac{a}{b}h$, $y = y(x, h) = \frac{1}{b}h$.

Вибравши сталі a, b так:

$$a = \frac{c_{12}}{c_{22}}, \quad b = \frac{\sqrt{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}}{c_{22}}, \quad (5)$$

рівняння (4) у новій системі координат запишемо у вигляді

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial h^2} \right) W - \frac{r}{c_{22}b^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0. \quad (6)$$

Знайдемо тепер дотичні напруження на довільній площинці в точці (x_0, y_0) , нормаль до якої нахилена під кутом g до осі Ox (тобто, $n_1 = \cos g, n_2 = \sin g$).

Дотичні напруження у нових змінних матимуть вигляд

$$t_n = [(c_{11} - c_{12}a)n_1 + (-c_{12} + c_{22}a)n_2] \frac{\partial W}{\partial x} + (-c_{12}bn_1 + c_{22}bn_2) \frac{\partial W}{\partial h}. \quad (7)$$

Подамо напрямні косинуси (n_1, n_2) через напрямні косинуси (N_1, N_2) відповідної площинки в допоміжній системі координат. Для цього в основній системі координат запишемо рівняння прямої, на якій знаходиться площинка у вигляді

$$x - x_0 = s \cos q, \quad y - y_0 = s \sin q, \quad -\infty < s < \infty, \quad \text{де } q = g - p/2.$$

Тоді цій прямій у новій системі координат (x, h) відповідатиме пряма, яка описується рівнянням

$$x - x_0 = s(\cos q + a \sin q), \quad h - h_0 = sb \sin q, \quad x_0 = x_0 + a y_0, \quad h_0 = b y_0,$$

де (x_0, h_0) – точка, яка відповідає точці (x_0, y_0) .

$$\text{Зобразимо } \cos q + a \sin q = g \cos \Theta, \quad b \sin q = g \sin \Theta,$$

$$\text{де } g = \sqrt{(\cos q + a \sin q)^2 + b^2 \sin^2 q} = \sqrt{\cos^2 q + 2 \frac{c_{12}}{c_{22}} \cos q \sin q + \frac{c_{11}}{c_{22}} \sin^2 q}, \quad \text{tg } \Theta = \frac{b \sin q}{\cos q + a \sin q}.$$

Тоді рівняння прямої у новій системі координат набуде вигляду

$$x - x_0 = gs \cos \Theta, \quad h - h_0 = gs \sin \Theta, \quad -\infty < s < \infty,$$

де Θ – кут нахилу цієї прямої до осі Ox .

Оскільки кут між нормаллю і віссю Ox дорівнює $p/2 + \Theta$, то знаходимо

$$N_1 = -\sin \Theta = -b/g \sin q, \quad N_2 = \cos \Theta = (\cos q + a \sin q)/g.$$

$$\text{Звідси } n_1 = \frac{g}{b} N_1, \quad n_2 = g \left(\frac{a}{b} N_1 + N_2 \right).$$

Підставивши ці вирази у формулу (7), отримуємо

$$t_n / g = \left[\frac{1}{b} (c_{11} - 2c_{12}a + c_{22}a^2) N_1 + (-c_{12} + c_{22}a) N_2 \right] \frac{\partial W}{\partial x} + ((-c_{12} + c_{22}a) N_1 + c_{22}b N_2) \frac{\partial W}{\partial h}.$$

Враховуючи співвідношення (5), для знаходження дотичних напружень у новій системі координат, отримуємо формулу вигляду

$$t_n = c_{22} b g \left(\frac{\partial W}{\partial x} N_1 + \frac{\partial W}{\partial h} N_2 \right) = \sqrt{c_{11}c_{22} - c_{12}^2} g(q) \frac{\partial W}{\partial N} = c_{11} g_n(g) \frac{\partial W}{\partial N}, \quad (8)$$

$$\text{де } g_n(g) = e \sqrt{\frac{c_{22}}{c_{11}} \sin^2 g - 2 \frac{c_{12}}{c_{11}} \cos g \sin g + \cos^2 g}, \quad e = \sqrt{1 - \frac{c_{12}^2}{c_{11}c_{22}}}.$$

Отже, розв'язування антиплоскої задачі зводиться до розв'язування рівняння відносно переміщень $W(x, h) = w(x, y)|_{x=x-h(a/b), y=h/b}$ у допоміжній області

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial h^2} \right) W - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad (x, h) \in V, \quad (9)$$

за крайових умов вигляду

$$\frac{\partial W}{\partial N} = \frac{T_V(x, h, t)}{c_{11} g_n(g)}, \quad (x, h) \in \Gamma_i^{(T)}, \quad i = 1, \dots, I, \quad W = w_V(x, h, t), \quad (x, h) \in \Gamma_j^{(w)}, \quad j = 1, \dots, J, \quad (10)$$

де V , $\Gamma_i^{(T)}$ і $\Gamma_j^{(w)}$ – область і контури в площині (x, h) , які відповідають області D і граничним контурам $L_i^{(T)}$ і $L_j^{(w)}$ при афінному перетворенні $x = x + ay$, $h = by$; g – кут між нормаллю до граничного контуру L і віссю Ox ; $w_V(x, h, t) = w_D(x(x, h), y(x, h), t)$; $T_V(x, h, t) = T_D(x(x, h), y(x, h), t)$;

$$C = b \sqrt{\frac{c_{22}}{r}} = \sqrt{\frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{c_{22}r}} = e \sqrt{\frac{c_{11}}{r}}.$$

Тобто, антиплоска задача для анізотропного тіла зводиться до розгляду в допоміжній системі координат антиплоскої задачі для ізотропного тіла із швидкістю поширення хвиль C за модифікованих умов (10) на межі. Дотичні напруження на нахилених площинках визначаються за формулами (8).

Падаюча хвиля. Розглянемо також випадок хвилі, яка падає під кутом j до осі Ox . У загальному випадку тіла з порожнинами і тріщинами зобразимо переміщення у вигляді суми основної і коригувальної складових $w = w_i + f$.

При цьому основна складова у вихідній системі координат визначається переміщеннями в суцільному тілі, які мають вигляд [8]

$$w_i = f_i(t - (x \cos j + y \sin j) \sqrt{r} / J),$$

де f_i – задана функція (що може бути довільною), якою визначається вигляд падаючої хвилі

$$J = \sqrt{c_{11} \cos^2 j - 2c_{12} \cos j \sin j + c_{22} \sin^2 j}.$$

Запишемо цей розв'язок у нових змінних:

$$x \cos j + y \sin j = g_1 x + g_2 h, \quad \text{де } g_1 = \cos j, \quad g_2 = (-a \cos j + \sin j) / b.$$

Зобразимо $g_1 x + g_2 h = r(x \cos \Phi + h \sin \Phi)$,

$$\text{де } r = \sqrt{g_1^2 + g_2^2}, \quad \text{tg } \Phi = \frac{g_2}{g_1} = \left(\text{tg } j - \frac{c_{12}}{c_{22}} \right) \frac{c_{22}}{\sqrt{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}} = (\text{tg } j - a) / b.$$

Враховуючи, що $r\sqrt{\mathbf{r}} = J/C$, отримуємо

$$(x \cos j + y \sin j) \sqrt{\mathbf{r}} / J = (x \cos \Phi + h \sin \Phi) / C.$$

Тоді $w_i(x, y, t)|_{x=x(x,h), y=y(x,h)} = W_i(x, h, t)$, де $W_i = f_i(t - (x \cos \Phi + h \sin \Phi) / C)$.

Отже, у допоміжній системі координат маємо відомі співвідношення для падаючої зі швидкістю C хвилі в ізотропному тілі під кутом Φ відносно осі Ox .

Коригувальна складова f визначається із рівняння (9). У випадку вільних від навантаження порожнин і тріщин крайові умови на них мають вигляд

$$\frac{\partial f}{\partial N} = -\frac{\partial W_i}{\partial N}, \quad (x, h) \in \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, I. \quad (11)$$

Тобто, визначення коригувальної складової за розгляду падаючої хвилі виконується за тими самими формулами, що і у випадку ізотропного тіла. Аналогічні результати для тіла, на яке падає хвиля під кутом j , отримують із розгляду ізотропного тіла зі швидкістю поширення хвиль C , у якому хвиля поширюється зі зміненим напрямком Φ .

Усталені коливання. Прийmemo, що відомі функції мають вигляд $T_v(x, h, t) = Te^{-i\omega t}$, $w_v(x, h, t) = v(x, h)e^{-i\omega t}$, де ω – частота коливань.

Розв'язок задачі про усталені коливання шукаємо у вигляді $W = Fe^{-i\omega t}$. Тоді отримуємо такі рівняння та граничні умови:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial h^2} \right) F + K^2 F = 0, \quad (x, h) \in V, \quad (12)$$

$$\frac{\partial F}{\partial N} = \frac{T(x, h)}{c_{11}g_n}, \quad (x, h) \in \Gamma_i^{(T)}, \quad i = 1, \dots, I,$$

$$F = v(x, h), \quad (x, h) \in \Gamma_j^{(w)}, \quad j = 1, \dots, J, \quad (13)$$

де $K = \omega / C = \frac{\omega}{e} \sqrt{\frac{\mathbf{r}}{c_{11}}} = \omega \sqrt{\frac{c_{22}\mathbf{r}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}}$.

Розглянемо випадок гармонійної хвилі, яка падає під кутом j до осі Ox . Тоді в суцільному тілі переміщення матимуть вигляд

$$w_i = C_i \exp\left(i \frac{\omega \sqrt{\mathbf{r}}}{J} (x \cos j + y \sin j) \right),$$

де C_i – стала. Тут пропущено часовий множник.

У нових змінних маємо

$$W_i = C_i \exp\left(i \frac{\omega \sqrt{\mathbf{r}}}{J} (g_1 x + g_2 h) \right) = C_i \exp(iK(x \cos \Phi + h \sin \Phi)). \quad (14)$$

Нормальна похідна від цієї функції буде

$$\frac{\partial W_i}{\partial N} = iK C_i \cos(\Phi - g_N) \exp(iK(x \cos \Phi + h \sin \Phi)), \quad (15)$$

де g_N – кут між нормаллю до кривої Γ і віссю Ox .

У загальному випадку для тіла з порожнинами переміщення подамо у вигляді $W = W_i + F$, де функція F визначається із рівняння (12). У випадку, коли порожнини вільні від навантаження, крайові умови на них мають вигляд

$$\frac{\partial F}{\partial N} = -\frac{\partial W_i}{\partial N}, \quad (x, h) \in \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, I. \quad (16)$$

Знаходження напружень на межі порожнини. Розглянемо точку на межі порожнини. Позначимо напрямні косинуси до неї через (n_1, n_2) . Цій площинці в допоміжній системі координат буде відповідати площинка з напрямними косинусами (N_1, N_2) , які визначаються за формулами

$$N_1 = \frac{b}{g} n_1, \quad N_2 = \frac{n_2 - a n_1}{g}.$$

Напруження у допоміжній області знаходяться за формулою

$$t_n = \sqrt{c_{11}c_{22} - c_{12}^2} g \frac{\partial W}{\partial N}, \quad \text{де } g = \sqrt{n_1^2 - 2 \frac{c_{12}}{c_{22}} n_1 n_2 + \frac{c_{11}}{c_{22}} n_2^2}.$$

Знайдемо напруження на площинці, перпендикулярній до вибраної вище. Для неї напрямні косинуси в основній (n_1^S, n_2^S) і допоміжній системах координат (N_1^S, N_2^S) будуть:

$$n_1^S = -n_2; \quad n_2^S = n_1, \quad N_1^S = \frac{b}{g_s} n_1^S = -\frac{b}{g_s} n_2, \quad N_2^S = \frac{n_2^S - a n_1^S}{g_s} = \frac{n_1 + a n_2}{g_s}, \quad g_s = \sqrt{n_2^2 + 2 \frac{c_{12}}{c_{22}} n_1 n_2 + \frac{c_{11}}{c_{22}} n_1^2}.$$

Враховуючи, що $n_1 = \frac{g}{b} N_1$, $n_2 = g \left(\frac{a}{b} N_1 + N_2 \right) \oplus$, отримуємо формули

$$N_1^S = -g'(aN_1 + bN_2), \quad N_2^S = g' \left[\frac{1+a^2}{b} N_1 + aN_2 \right],$$

$$\text{де } g' = 1 / \sqrt{(aN_1 + bN_2)^2 + \left(\frac{1+a^2}{b} N_1 + aN_2 \right)^2}.$$

Напруження на цій площинці будуть такими:

$$t_n^S = \sqrt{c_{11}c_{22} - c_{12}^2} g_s \frac{\partial W}{\partial N_s} = \sqrt{c_{11}c_{22} - c_{12}^2} g_s \left(\frac{\partial W}{\partial N} \cos(N, N_s) + \frac{\partial W}{\partial S} \cos(S, N_s) \right),$$

де $\partial W / \partial S$ – похідна в перпендикулярному до N напрямку.

Зазначимо, що

$$\cos(N, N_s) = N_1 N_1^S + N_2 N_2^S, \quad \cos(S, N_s) = -N_2 N_1^S + N_1 N_2^S.$$

Напруження ще можуть бути записані у вигляді

$$t_n^S = \frac{g_s}{g} \cos(N, N_s) t_n + \sqrt{c_{11}c_{22} - c_{12}^2} g_s \cos(S, N_s) \frac{\partial W}{\partial S}.$$

Числовий алгоритм розв'язування задачі. Дослідження напружень проведемо для випадку падаючої хвилі. Для розв'язування задачі використаємо метод інтегральних рівнянь. Коригувальний розв'язок (функцію F) шукаємо у вигляді потенціального зображення [2]

$$F(x, y) = \int_L f(x, h) K_0(mr) ds, \quad (17)$$

де f – невідома функція на граничному контурі L ; (x, h) – точка, що розміщена на контурі L , за якою проводиться інтегрування; $m = iK$; s – дугова координата; $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-h')^2}$; $K_0(mr)$ – функція Макдональда.

Підставивши вираз (17) у граничну умову (16), для знаходження функції f отримаємо інтегральне рівняння вигляду

$$p f(x, y) + \int_L f(x, h) Q(x, y, x, h) ds = p(x, y), \quad (18)$$

де

$$Q = -mK_1(mr) \frac{\partial r}{\partial n_M}, \frac{\partial r}{\partial n_M} = \frac{(x-x)\cos(n,\mathbf{H}) + (y-h)\cos(n,\mathbf{H})}{r},$$

n_M – зовнішня нормаль до контуру L в точці $M(x, y)$, $p = -\partial W_i / \partial N$. Тут враховано відомі формули для знаходження граничного значення нормальної похідної від логарифмічних потенціалів простого шару [2].

Інтегральні рівняння розв'язуємо за алгоритмом, який ґрунтується на методі механічних квадратур і наведений у [3]

Результати розрахунків. Розрахунки проведено для випадку порожнин еліптичної форми з півосями a і b при падінні хвилі під кутом j до осі Ox . Відносні амплітуди коливань напружень t залежно від кутового параметра q наведено на рис. 1. Тут дотичні напруження на площинках, перпендикулярних до межі порожнини, віднесені до величини KC_i . Розрахунки проведено для випадку, коли поперечний переріз порожнини має форму круга ($b = a$) при $a_{45} = 0$ та значеннях відношення пружних сталей $c = 0; 0.01; 1; 2; 5$ (ці відношення наведено на рисунку біля відповідних кривих) за $a_{44}/a_{55} = 5$, $a_{45} = 0$, $c = Ka$.

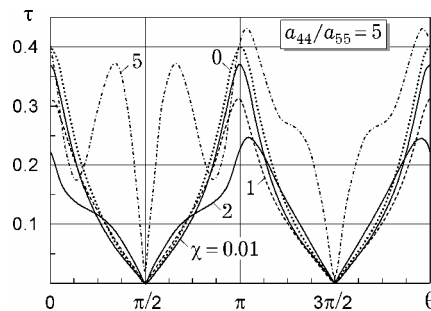


Рис. 1. Відносні амплітуди коливань напружень на межі кругового отвору за різних значень відносної частоти c при $a_{44}/a_{55} = 5$, $a_{45} = 0$

Аналогічні результати при $a_{44}/a_{55} = 0,2$ зображено на рис. 2.

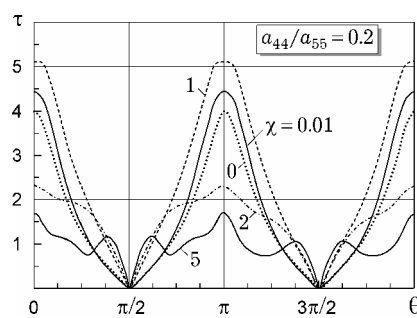


Рис. 2. Відносні амплітуди коливань напружень на межі кругового отвору за різних значень відносної частоти c при $a_{44}/a_{55} = 0,2$, $a_{45} = 0$

Розглянуто випадок двох еліптичних порожнин із півосями $(a, 0.3a)$ з центрами в точках $(0, 0)$, $(2.25a, 0)$, коли хвиля падає під кутом 90° до осі Ox . Розраховані відносні напруження для ізотропного матеріалу з відношенням сталей $a_{44}/a_{55} = 1; 5; 0,2$ за різних відносних частот наведено на рис. 3 – 5.

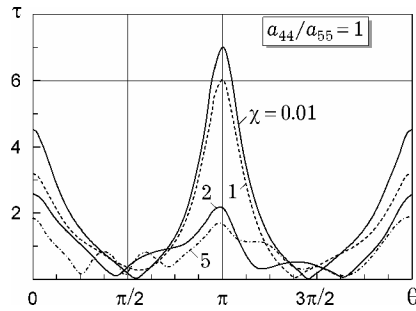


Рис.3. Відносні амплітуди коливань напружень на правій порожнині, півосі $(a, 0.3a)$, центри в точках $(0, 0)$, $(2.25a, 0)$, $a_{44}/a_{55} = 1$; $a_{45} = 0$

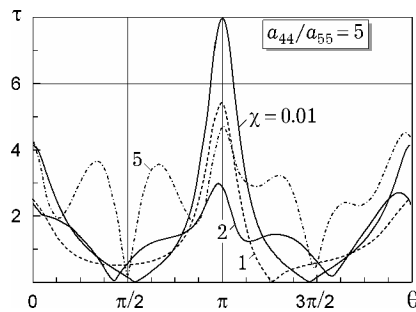


Рис.4. Відносні амплітуди коливань напружень на правій порожнині, півосі $(a, 0.3a)$, центри в точках $(0, 0)$, $(2.25a, 0)$, $a_{44}/a_{55} = 5$, $a_{45} = 0$

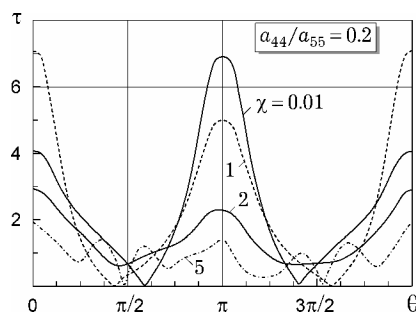


Рис. 5. Відносні амплітуди коливань напружень на правій порожнині, півосі $(a, 0.3a)$, центри в точках $(0, 0)$, $(2.25a, 0)$, $a_{44}/a_{55} = 0,2$, $a_{45} = 0$

Отже, розроблено ефективний підхід для дослідження усталених коливань в анізотропних тілах з порожнинами за антиплоскої деформації. Поставлену задачу, з використанням афінного перетворення, зведено до відомої крайової задачі для ізотропного середовища, яку розв'язано з використанням методу інтегральних рівнянь. Встановлено істотний вплив анізотропії на концентрацію напружень біля порожнин еліптичної форм при падінні гармонійної хвилі.

1. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракція упругих волн. – К.: Наукова думка, 1978. – 308 с. 2. Кит Г.С., Побережний О.В. Нестационарные процессы в телах с дефектами типа трещин. – Киев: Наук. думка, 1992. – 216 с. 3. Максимович О.В., Соляр Т.Я. Метод механічних квадратур для розв'язування інтегральних рівнянь термопружності для пластинок з тепловіддачею // Мат. методи і фіз-мех поля. – 2009. – 52, № 14. – С. 207–215. 4. Саврук М., Матвіїсів О. Динамічна задача для тіла з тріщиною за антиплоскої деформації // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій / За заг. ред. В.В. Панасюка. – Львів: ФМІ НАН

України, 2004. – С. 255–260. 5. Шваб'юк В.І., Максимович О.В., Соляр Т.Я Розрахунок динамічних напружень біля криволінійних тріщин при зсуві на основі уточненої формули чисельного обернення Лапласа // *Мат. методи і фіз.-мех. поля.* – 2005. – 47, №1. – С. 148–157. 6. Chen W. and Renji T. *Cauchy singular integral equation method for transient antiplane dynamic problems* // *Eng. Fract. Mech.* – 1996. – №54. – P.177–187. 7. Kanninen M.F. *A critical appraisal of solution techniques in dynamic fracture mechanics* // *Numer. Math. Fracture Mech (Edited by Luxmore A.R. and Owen D.R.J.)*. – Swansea, 1978. – P. 612–634. 8. Ch. Zhang, D. Gross. *On Wave Propagation in Elastic Solids with Cracks.* – *Computational Mechanics Publications Southampton, UK, Boston, USA.* – 1998. – 264 P.

УДК 534.1+539.5

Б.І. СОКІЛ, О.І. ХИТРЯК, М.Б. СОКІЛ, *М.П. КОЗЛИНСЬКИЙ
Академія сухопутних військ ім. гетьмана Петра Сагайдачного,
*Національний університет “Львівська політехніка”

ДИНАМІКА І СТІЙКІСТЬ ГНУЧКИХ ЕЛЕМЕНТІВ СИСТЕМ ПРИВОДУ ЗА ЗМІННОЇ СИЛИ НАТЯГУ

© Сокіл Б.І., Хитряк О.І., Сокіл М.Б., Козлинський М.П., 2011

Проведено дослідження впливу швидкості поздовжнього руху та змінного натягу на поперечні коливання у гнучких двовимірних елементах систем приводів. Отримано співвідношення, які описують основні параметри динамічного процесу.

Researches of influence of a velocity of longitudinal movement and variable tension on the transverse vibrations in flexible two-dimensional belt drive systems. The relations describing key parameters of the dynamic process are received.

Актуальність та огляд основних результатів досліджень. Динамічні системи, що характеризуються поздовжньою швидкістю руху, зустрічаються у різних сферах інженерної діяльності: рухомі сталеві полоси на тонкій металевій технологічній лінії, привідні паси, магнітні стрічки, леза стрічкових пил, паперові листи під час обробки та ін. Незважаючи на широке використання цих елементів систем, їх вібрації та коливання сьогодні недостатньо вивчені. Водночас останні обмежують можливості їх застосування. Так, наприклад, у магнітних стрічках коливання створюють модуляції сигналу та прискорюють зношуваність стрічки, у стрічкових пилах коливання леза призводить до низької якості обробки різанням. Такі коливання спричиняють, з одного боку, надто дорогі дефекти у кінцевому продукті виробництва, а з іншого – їх наслідком є значне перевантаження у об'єкті коливаний. Саме тому вивчення поперечних коливаний у рухомих об'єктах є важливим ще на етапі проектування технологічних ліній, що їх містять. Збудником небажаних коливаний рухомих гнучких об'єктів як складових елементів механічних систем можуть бути шківні з ексцентриситетом, нестационарні швидкості привідного двигуна і навіть сили аеродинамічної природи навколишнього середовища.

Впродовж останніх десятиліть набули широкого розвитку дослідження гіперболічних диференціальних рівнянь, які описують динамічні процеси як у лінійних, так і нелінійних моделях рухомих систем [1–9]. Зокрема, у роботах [6–9] розглядалися поперечні та поздовжні коливання одно- та двовимірних гнучких елементів систем приводу, що характеризуються сталою швидкістю поздовжнього руху. З математичного погляду, динамічні процеси у зазначених системах описуються диференціальними рівняннями із частинними похідними та сталими коефіцієнтами, що містять мішану похідну за часовою та просторовою координатами. Із цим пов'язані основні