

**С.В. СТРУТИНСЬКИЙ**

Національний технічний університет України  
“Київський політехнічний інститут”

## **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ КОЛИВАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ У ПРОСТОРОВІЙ СИСТЕМІ ПРИВОДІВ**

© Струтинський С.В., 2011

*Розглянута просторова система приводів побудована за схемою механізму гексапода, довжина штанг якого змінюється за допомогою пневмоциліндрів. Показано, що під дією зовнішніх збурень виникають стохастичні поперечні коливання корпусів пневмоциліндрів. Розроблено математичну модель і виконано математичне моделювання стохастичних коливальних процесів у просторовій системі приводів. Встановлено розмахи коливань корпусів пневмоциліндрів та відповідні переміщення штоків, які обумовлюють динамічні зміни довжини штанг.*

*The spatial system of occasions is considered hexapod length of barbells of which is built on the chart of mechanisms changes by pnevmo of cylinders. It is rotined that under the action of external indignations there are stochastic transversal vibrations of corps of pnevmo of cylinders. A mathematical model is developed and the mathematical design of stochastic of swaying processes is executed in the spatial system of occasions. The scopes of vibrations pnevmo of cylinders and proper moving of shtokiv which stipulate the dynamic changes of length of barbells are set.*

**Актуальність досліджень.** На основі просторової системи приводів реалізовано прогресивне технологічне обладнання для маніпулювання об'єктами. Підвищення продуктивності обладнання потребує розроблення високодинамічної просторової системи приводів. У таких приводах виникають інтенсивні нелінійні динамічні коливальні процеси. Тому визначення характеристик нелінійних стохастичних коливальних процесів, які виникають у системі приводів, є актуальним.

**Постановка проблеми в загальному вигляді.** Просторова система приводів має значне число рухомих з'єднань. Елементи системи приводів утворюють динамічні підсистеми з просторовим рухом, який характеризується великою кількістю ступенів вільності. При цьому мають місце невизначені взаємні положення окремих вузлів і деталей приводів у межах люфтів і зазорів у рухомих з'єднаннях. Відповідно у просторовій системі приводів виникають складні стохастичні вібраційні процеси, які є недостатньо вивченими через наявність істотних нелінійностей [1]. Вивчення закономірностей коливальних процесів у просторовій системі приводів являє собою важливу науково-технічну проблему.

**Зв'язок проблеми із важливими науковими і практичними завданнями.** Дослідження нелінійних стохастичних коливальних процесів є основою створення прогресивних просторових систем приводів, що є важливою науковою і практичною задачею машинобудування [2].

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** У літературних джерелах наявна значна кількість досліджень динамічних характеристик просторових механізмів [3]. Визначені перехідні і частотні характеристики [4]. Значну увагу приділено дослідженням показників динамічної точності механізмів. Незначна кількість публікацій присвячена дослідженню нелінійних характеристик

окремих вузлів просторових механізмів. Результатів досліджень нелінійних стохастичних коливальних процесів у просторовій системі приводів у літературних джерелах не виявлено.

**Розв'язання не вирішеної раніше частини проблеми.** На динамічні показники просторової системи приводів значно впливають нелінійні стохастичні коливальні процеси. Дослідження даних процесів дає можливість розв'язати не вирішену раніше проблему поліпшення динамічних властивостей просторової системи приводів.

**Мета і задачі досліджень.** Метою досліджень є встановлення параметрів нелінійних стохастичних коливальних процесів у просторовій системі приводів. Задачами досліджень є розроблення загальної динамічної моделі нелінійних коливальних процесів у просторовій системі приводів та розроблення математичної моделі нелінійних високочастотних коливань і виконання математичного моделювання із встановленням особливостей нелінійних високочастотних коливальних процесів.

**Виклад матеріалу досліджень.** Просторова система приводів, призначена для маніпулювання об'єктами, містить пневматичні приводні циліндри 1, які шарнірно з'єднані із виконавчим органом 2 (рис. 1).

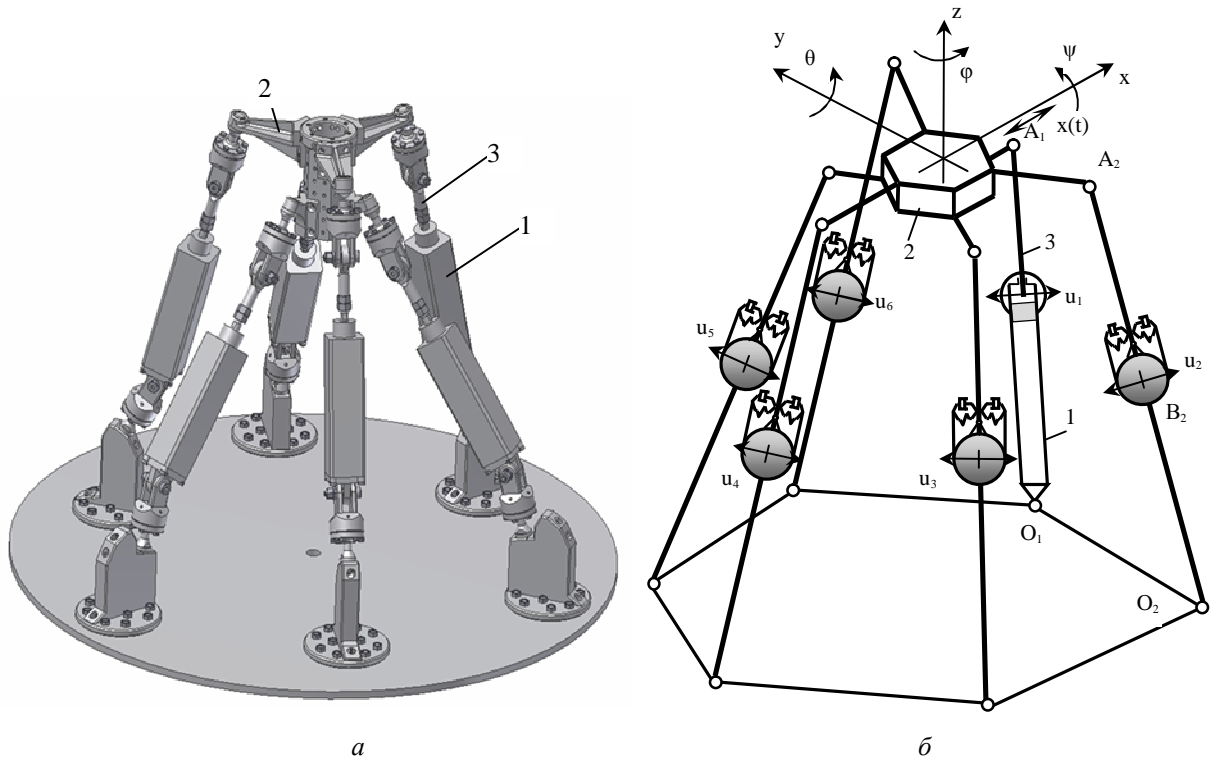


Рис. 1. Конструктивна (а) та принципова (б) схеми просторової системи приводів

Між корпусом циліндра 1 і штоком 3 наявні зазори. Це приводить до виникнення поперечно кутових зміщень штока  $u_1$  відносно корпусу.

Зміщення відбуваються під дією статичних і динамічних силових факторів. Дія статичних навантажень не є суттєвою, а динамічні силові фактори обумовлюють динамічні збурення в просторовій системі приводів. Під дією динамічних збурень корпус кожного циліндра переміщується в напрямку  $u$ , що відповідає центру приведення мас корпусу циліндра і штока. Одночасні динамічні переміщення корпусів всіх приводів спричиняють результуючі динамічні переміщення виконавчого органа.

Окремий привод має складну конструкцію і з'єднаний з механізмом шарнірними опорами (рис. 2а). Циліндр має сферичні опорні вузли корпусу і штока. Сферичний шарнір 1 штока 2 розміщено на хвостовику 3. Хвостовик закріплено на кронштейні 4 виконавчого органу.

Сферичний опорний вузол 5 корпусу циліндра розміщено на хвостовику 6. Хвостовик закріплено на стійці 7, що встановлена на нерухомій основі. Між фланцем і корпусом циліндра встановлено пружно-фрикційний демпфер 8.

При динамічних збуреннях пневмоциліндра у вигляді поперечного переміщення корпусу шарнірної опори  $x(t)$  (рис. 2б) виникають коливання корпусу циліндра відносно центрального положення. При цьому спряження корпусу циліндра і штока (точка В) відхиляється від центрального положення на величину  $u$ . За відсутності поздовжніх переміщень поршня і штока коливання корпусу приводять до зміни відстані між шарнірними опорами пневмоциліндра на величину  $v$ . Зв'язок даних переміщень є суттєво нелінійним і визначається формулою

$$v = AB + OB - \sqrt{AB^2 - u^2} - \sqrt{OB^2 - u^2}, \quad (1)$$

де  $AB$ ,  $OB$  – відстані від шарнірних опор до точки контакту В.

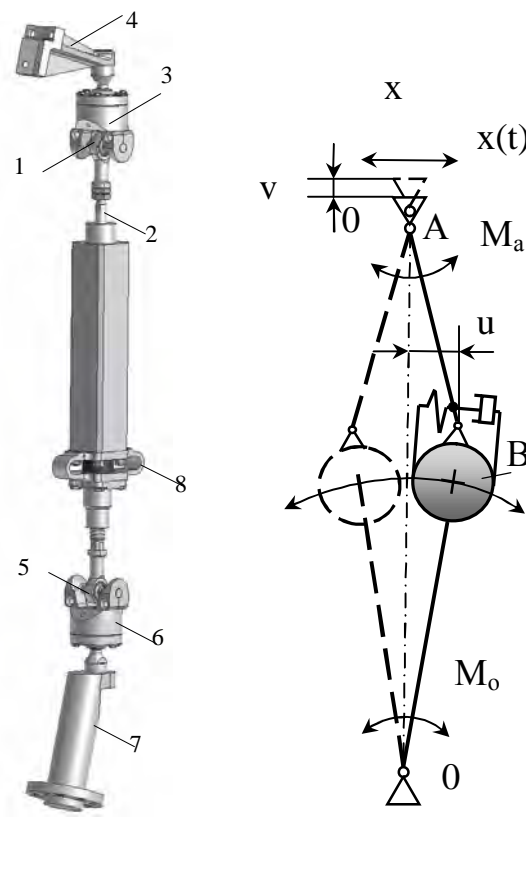


Рис. 2. Конструктивна схема окремого привода (а) та зміни положення опор пневмоциліндра при поперечних коливаннях його корпусу (б)

Динамічна модель коливальної системи циліндра є суттєво нелінійною. Вона подана у вигляді одномасової динамічної системи із нелінійними пружно-дисипативними зв'язками (рис. 3).

Відповідно до динамічної моделі складено нелінійне диференціальне рівняння, що визначає поперечні коливання корпусу пневмоциліндра. Воно має вигляд

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = P(\delta) - F_1 \left( \frac{du}{dt} \right) + F_2 \left( \frac{d\delta}{dt} \right), \quad (2)$$

де  $m$  – еквівалентна маса циліндра;  $P(\delta)$  – нелінійна характеристика жорсткості подана у вигляді залежності сили від різниці переміщень  $\delta = x - u$ ;  $F_1, F_2$  – нелінійні характеристики тертя в функції швидкості.

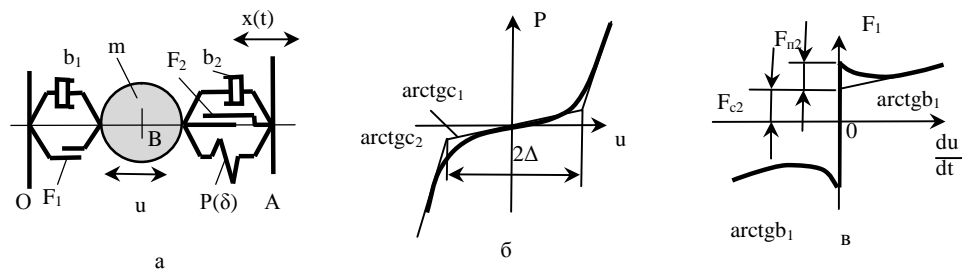


Рис. 3. Одномасова нелінійна динамічна модель поперечних коливань корпусу циліндра (а), характеристика жорсткості системи (б) та залежність сил тертя від швидкості (в)

Нелінійна характеристика жорсткості в з'єднанні шток-корпус пневмоциліндра враховує наявність зазорів у з'єднанні. Характеристика описана суттєво нелінійною залежністю [5] (рис. 3б). В межах зазору  $2\Delta$  жорсткість з'єднань є мінімальною, а після виборки зазорів жорсткість різко зростає. Для опису нелінійної характеристики жорсткості використано неперервну аналітичну залежність виду

$$P(\delta) = c\delta + q\delta^3, \quad (3)$$

де  $c$  і  $q$  – постійні, що характеризують вид характеристики.

Нелінійні характеристики тертя в з'єднаннях враховують наявність сухого тертя в шарнірах, відмінність сили тертя спокою від сили тертя руху та збільшення сили тертя пропорційно до швидкості [5]. Графічно залежність сили тертя від швидкості, обумовлених дією нижнього шарніра, зображено на рис. 3в. Для опису нелінійної залежності використано вираз

$$F_1 = \left( F_{c1} + \frac{F_{i1}}{1 + \alpha_1 \cdot \frac{du}{dt}} \right) \operatorname{sgn} \frac{du}{dt} + b_1 \frac{du}{dt}, \quad (4)$$

де  $F_{c1}$  – сила сухого тертя нижнього шарніра;  $F_{i1}$  – різниця сил тертя спокою і тертя руху;  $\alpha_1$  – коефіцієнт, що враховує падіння сили залежно від швидкості;  $b_1$  – коефіцієнт лінійного опору нижнього шарніра.

Аналогічно при інших значеннях коефіцієнтів описано нелінійну характеристику тертя верхнього шарніра та з'єднання шток-корпус пневмоциліндра

$$F_2 = \left( F_{c2} + \frac{F_{i2}}{1 + \alpha_2 \cdot \frac{d\delta}{dt}} \right) \operatorname{sgn} \frac{d\delta}{dt} + b_2 \frac{d\delta}{dt}, \quad (5)$$

де  $F_{c2}$  – сила сухого тертя верхнього шарніра та з'єднання “шток-корпус”;  $F_{i2}$  – різниця сил тертя спокою і тертя руху;  $\alpha_2$  – коефіцієнт, що враховує падіння сили залежно від швидкості;  $b_2$  – коефіцієнт лінійного опору верхнього шарніра та з'єднання “шток-корпус”.

Нелінійне диференціальне рівняння (2) із врахуванням залежностей (3)-(5) розв'язано числовим методом (Рунге–Кутта) при різних кінематичних збуреннях  $x(t)$ .

Типовим кінематичним збуренням є синусоїдальні переміщення шарнірного вузла закріплення штока пневмоциліндра

$$x(t) = x_a \sin(2\pi ft), \quad (6)$$

де  $x_a$  – амплітуда;  $f$  – циклічна частота переміщень шарніра.

Розраховані для збурення (6) переміщення корпусу пневмоциліндра являють собою складний полігармонічний процес (рис. 4).

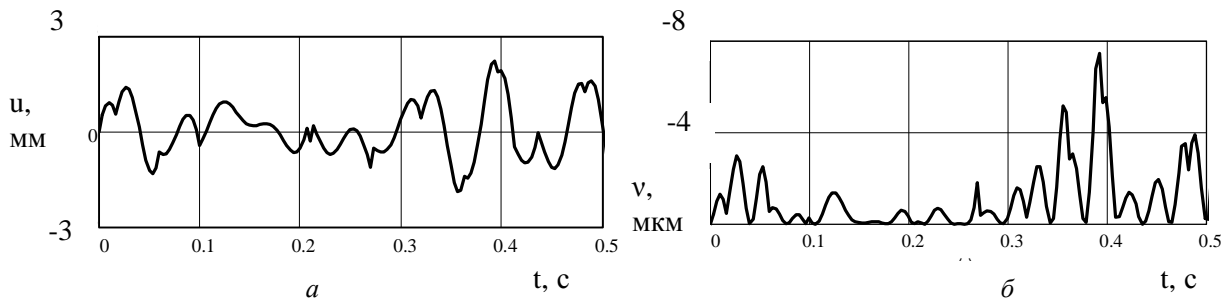


Рис. 4. Розрахункові поперечні переміщення корпусу пневмоциліндра (а), обумовлені кінематичними збуреннями синусоїдального виду (б) та відповідні еквівалентні поздовжні переміщення шарніра (б)

Нелінійні коливання корпусу пневмоциліндра мають розмах, який сягає 5 мм. Основні коливання характеризуються розмахом порядку 1 мм і менше. Коливання мають суттєві складові з частотами 10...30 Гц.

Поперечні переміщення корпусів пневмоциліндрів приводять до еквівалентних переміщень штока, а відповідно і шарнірної опори штока. Дані переміщення набагато менші ніж поперечні переміщення корпусів і визначаються нелінійною залежністю (1). Розрахункові переміщення штока (втягування) не перевищують 8 мкм (див. рис. 4б). Середні значення переміщення шарніра становлять 1...3 мкм. Це відповідає розмаху коливань корпусу пневмоциліндра менше 2...3 мм. Переміщення шарніра менше 2 мкм мало впливає на рух виконавчого органу.

Характерним кінематичним збуренням у просторовій системі приводів є високочастотні вібрації виконавчого органу. Для аналітичного опису стохастичних кінематичних збурень використано канонічний розклад випадкового процесу за системою взаємно ортогональних гармонічних функцій, який подано у вигляді:

$$x(t) = \sum_{k=0}^N a_k^* \cos(k\omega_0 t) + b_k^* \sin(k\omega_0 t), \tag{7}$$

де  $a_k^*$ ,  $b_k^*$  – випадкові числа з нормальним законом розподілу при нульовому математичному сподіванні і однаковою дисперсією;  $N = 100$  число складових канонічного розкладу;  $\omega_0$  – базове значення частоти процесу.

Розрахунковий випадковий процес (7), поданий у вигляді своєї реалізації (рис. 5а), має середній розмах близько 40 мкм, що відповідає типовим розмахам вібрацій виконавчого органу системи приводів.

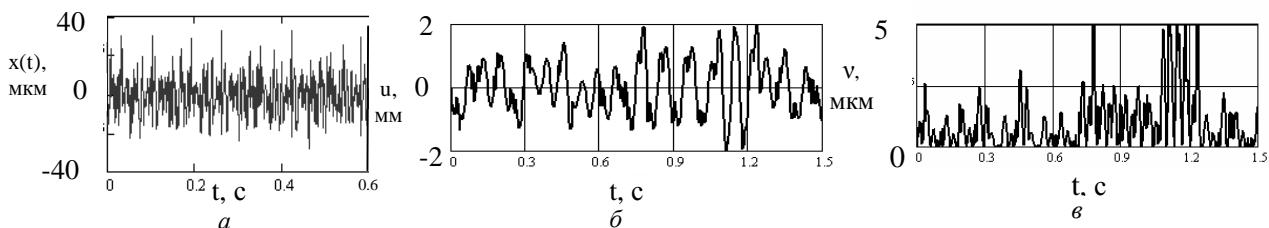


Рис. 5. Параметри вібраційного поля просторової системи приводів при випадкових кінематичних збуреннях: а – реалізація збурення у вигляді вібропереміщень виконавчого органу системи приводів; б – відповідні поперечні коливання корпусу пневмоциліндра; в – еквівалентні переміщення штока пневмоциліндра, обумовлені вібраціями корпусу

Випадкові кінематичні збурення виконавчого органу приводять до виникнення складних вібропереміщень корпусу пневмоциліндра (рис. 5б). Розмах поперечних переміщень корпусу сягає 4 мм. Частотний склад поперечних вібропереміщень містить гармонічні складові в діапазоні 10...30Гц, що відповідає власним частотам коливань пневмоциліндрів.

Поперечні коливання корпусу пневмоциліндра приводять до еквівалентних переміщень штока, які у цьому випадку сягають 5 мкм. Основні переміщення штока знаходяться в межах 2 мкм і не є суттєвими з погляду впливу на вібрації виконавчого органу системи приводів. Випадкові переміщення штоків мають вигляд пакетів імпульсів значної інтенсивності.

На основі проведених досліджень запропоновано заходи із зменшення негативного впливу поперечних коливань корпусів пневмоциліндрів на вібрації виконавчого органу системи приводів. Зокрема, запропоновано використати пружно-фрикційні демпфери в кінематичному ланцюзі окремого привода (див. рис. 2а). Демпфер забезпечує зниження інтенсивностей поздовжніх коливань корпусів пневмоциліндрів та відповідне зменшення впливу коливань пневмоциліндрів на вібрації виконавчого органу.

### Висновки

1. У просторовій системі приводів, яка має люфти і зазори в з'єднанні штоків і корпусів пневмоциліндрів, під дією динамічних збурень виникають нелінійні коливальні рухи, які супроводжуються поперечними вібраціями корпусів пневмоциліндрів з частотами 10...30Гц і розмахом до 5 мм.

2. При незначних динамічних збуреннях в системі приводів коливання корпусів пневмоциліндрів практично не впливають на загальне вібраційне поле виконавчого органу системи приводів. Вплив вібрацій корпусів пневмоциліндрів проявляється при розмахах коливань корпусів циліндрів понад 2...3 мм. Коливання корпусів пневмоциліндрів спричиняють імпульсні (ударні) навантаження на виконавчий орган системи приводів.

3. Випадкові вібрації виконавчого органу системи приводів спричиняють інтенсивні поперечні коливання корпусів пневмоциліндрів, що приводить до імпульсних переміщень шарнірних закріплень штоків до 5 мкм.

4. Для зниження негативного впливу нелінійних поперечних коливань корпусів пневмоциліндрів необхідно застосувати спеціальні демпфери, встановлені в кінематичних ланцюгах штанг змінної довжини.

5. Як напрямок подальших досліджень рекомендується визначити взаємний вплив коливань пневмоциліндрів, що може привести до виникнення параметричних резонансів у кільцевих парціальних динамічних підсистемах, утворених ланками просторової системи приводів.

1. Глазунов В.А., Колискор А.Ш., Крайнев А.Ф. *Пространственные механизмы параллельной структуры*. – М.: Наука, 1991. – 95 с. 2. Воробьев Е.И., Диментберг Ф.М. *Пространственные шарнирные механизмы*. – М.: Наука, 1991. – 264 с. 3. Струтинський С.В., Яхно О.М. *Визначення статичних і динамічних характеристик гідростатичного сферичного опорного вузла // Промислова гідраліка і пневматика*. – 2007. – №2 (16). – С. 85–90. – Бібліогр.: С. 90. ISSN 1994-4691. Фахове видання. 4. Струтинський С.В. *Визначення основних конструктивних параметрів сферичних опорних вузлів просторового механізму методом Монте-Карло // Всеукраїнський щомісячний науково-технічний журнал "Машинознавство"*, 2007. – С.37–43. – Бібліогр.: 43 с. ISSN 1729-4959. Фахове видання. 5. Павловський М.А. *Теоретична механіка: Підручник*. – К.: Техніка, 2002. – 512 с. – ISBN 966-575-184-0.