

процесів у машинобудуванні та приладобудуванні”. – 2008. – №. 42. – С. 96–100. 9. Хитряк О.І. Хвильова теорія у дослідженні процесів у двовимірних системах зі сталою складовою швидкості поздовжнього руху / О. І. Хитряк // Науковий вісник: Збірник науково-технічних праць. – Львів: УДЛТУ, 2010. – Вип. 20.14. – С.340–344. 10. Зельдович Я.Б., Мьшикис А.Д. Элементы математической физики. – М.: Наука, 1973. – 352 с.

УДК 621.9.048

**З.А. СТОЦЬКО, В.Г. ТОПІЛЬНИЦЬКИЙ, Я.М. КУСИЙ, О.Т. ВЕЛИКА**  
Національний університет “Львівська політехніка”

## **МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОПИСУ ДИНАМІКИ ТЕХНОЛОГІЧНИХ СЕРЕДОВИЩ НЕЛІНІЙНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ ОБРОБЛЕННЯ ТА ТРАНСПОРТУВАННЯ**

© Стоцько З.А., Топільницький В.Г., Кусий Я.М., Велика О.Т., 2011

*Використовуючи асимптотичні методи нелінійної механіки, розроблено параметризовану математичну модель руху технологічних середовищ нелінійних механічних систем оброблення та транспортування, що дає змогу дослідити вплив їх параметрів при довільній їх комбінації на продуктивність роботи систем з метою їх оптимізації.*

*In activity, using the asymptotic methods of nonlinear mechanics, is worked out parametric mathematical model of motion of technological environments of the nonlinear mechanical systems of treatment and transporting, that allows to investigate influence of their parameters at their arbitrary combination on the productivity of work of the system with the purpose of her optimization.*

**Аналіз останніх досліджень і публікацій та постановка проблеми у загальному вигляді.** Використання великої кількості технічних систем у галузі промисловості, транспорту, енергозабезпечення супроводжується виникненням різноманітних нелінійних коливних процесів, які можуть чинити як позитивний, так і негативний вплив. Зокрема в системах оброблення поверхонь виробів, наприклад, зміцнення поверхонь довгомірних циліндричних деталей обкатними пристроями чи поверхонь деталей різного ступеня складності потоком вільного незв’язаного інструменту – коливання відіграють основну роль з виникнення чинників впливу на оброблювані об’єкти. Оптимальне їх виникнення в цих механічних системах забезпечує якісні і кількісні показники їх функціонування, зокрема інтенсивність та продуктивність роботи [1]. З іншого боку, наприклад, при експлуатації низки транспортних систем – конвеєрних ліній та установок, різноманітних транспортерів, підвісних доріг, систем буксирування (лісове господарство), магістральних нафто- та газотрубопроводів, в лініях електропередач тощо, низки різноманітних обертових пристроїв різної маси (валів, турбін тощо) поперечні, поздовжні, крутильні коливання та їх комбінації можуть виникати як негативне явище, яке суттєво впливає на умови, стабільність та ефективність їх роботи, а у граничних випадках може спричинити їх вихід з ладу та серйозні ушкодження з відповідними економічними втратами [2]. Тому дослідження динамічних процесів у таких нелінійних дискретно-неперервних механічних системах є надзвичайно актуальною прикладною задачею.

Існуючі аналітичні методи досліджень динамічних процесів у таких системах розроблені в лінійній постановці, що переважно зумовлює доволі вузьке їх застосування для обмеженого кола задач [3]. Спрощення, які використовуються при постановці задач з дослідження динаміки нелінійних механічних систем зазначеними методами в лінійній постановці, зводять через втрату адекватності результатів нанівець доцільність застосування розробленого лінійного теоретичного апарату. Також втрачається оптимальність проектування відповідного обладнання в часовому, матеріальному та енергетичному аспектах. Розроблення уніфікованого, адекватного нелінійного математичного апарату з дослідження коливних процесів у нелінійних дискретно-неперервних механічних системах оброблення виробів та транспортування в поєднанні з розвинутими програмним математичним забезпеченням та обчислювальною технікою уможливають швидко постановку та розв'язання прикладних задач з проектування широкого спектра відповідного обладнання.

**Формулювання мети досліджень.** Предметом дослідження, враховуючи необхідність розв'язання наведених вище актуальних задач, є динамічні процеси та аналітична методика їх опису, що відбуваються в нелінійних дискретно-неперервних механічних системах оброблення виробів та транспортування (конвеєрних ліній, газових та нафтових трубопроводів, підвісних доріг, ліній електропередач та обертових пристроїв систем енергозабезпечення і постачання) через розроблення множини відповідних нелінійних математичних моделей опису їх руху з урахуванням чинників уніфікації та параметризації для забезпечення оптимальних режимів функціонування та експлуатації таких механічних систем. У статті зокрема розглянуто динаміку так званого „технологічного середовища”, яке є ключовою ланкою для забезпечення експлуатаційних функцій досліджуваних нелінійних механічних систем. Зокрема в системах об'ємного оброблення виробів під технологічним середовищем слід розуміти сукупність вільних незв'язаних тіл, які залежно від матеріалу виготовлення, своєї форми, розмірів, режимів оброблення забезпечують необхідні експлуатаційні якісні показники стану поверхонь оброблюваних виробів. З іншого боку, в нелінійних механічних системах транспортування технологічним середовищем будуть відповідні робочі органи транспортних систем, які перебувають у складному русі, однією зі складових якого є колювання: поперечні, поздовжні, крутильні (стрічки конвеєрів, лінії електропередач та трубопроводів, підвісні дороги, різноманітні перемотувальні та рулонувальні пристрої тощо).

Досліджувати динаміку технологічних середовищ запропоновано методом побудови нелінійних математичних моделей опису їх руху у вигляді множин нелінійних диференціальних рівнянь та їх аналітичних і числових розв'язків. Отримані моделі повинні враховувати максимальну кількість вагомих за впливом фізико-механічних параметрів досліджуваних нелінійних систем, що дасть змогу визначити оптимальні якісні та кількісні показники експлуатації, підвищити продуктивність та надійність функціонування систем. Наступним кроком для реалізації поставленої задачі передбачено на основі побудованих математичних моделей проведення теоретичних та експериментальних досліджень з виявлення впливу фізико-механічних параметрів досліджуваних технологічних середовищ на характеристики різноманітних нелінійних коливних процесів, які можуть виникати у них (поперечні, поздовжні, крутильні тощо), а саме – на амплітудні, амплітудно-частотні та амплітудно-фазові характеристики з метою розроблення рекомендацій щодо вибору конструкцій та режимів експлуатації нелінійних систем. Це уможливить максимальне усунення негативних коливань, що можуть виникати під час роботи машин та пристроїв, підсилить оптимально дію та вплив позитивних коливних процесів як рушійного чинника продуктивності та надійності їх функціонування.

**Виклад основного матеріалу.** У статті запропоновано гіпотезу руху технологічного середовища нелінійної механічної системи як руху деякого однорідного суцільного середовища [3], що представляється як нашарування плоских пружно-пластичних балок, товщина яких значно

менша за ширину, і які контактують з іншими складовими досліджуваної нелінійної системи пружно або як шарнірно закріплені балки. Припускаючи, що матеріал середовища задовольняє нелінійний закон Фойгта [4], отримуємо:

$$\sigma = E \cdot \zeta + k_0 \left( \frac{d\zeta}{dt} \right)^{\nu}, \quad (1)$$

де  $\sigma$  – нормальне напруження в шарі технологічного середовища нелінійної механічної системи;  $\zeta = \frac{\partial u}{\partial x}$  – відносна деформація шару середовища;  $u = u(x, t)$  – переміщення вздовж осі  $x$  довільного поперечного перерізу моделі середовища за деякий момент часу  $t$ ;  $E$  – модуль пружності середовища;  $k_0$  – стала, що характеризує в'язкі властивості середовища;  $\nu$  – показник нелінійності. Нелінійну силу демпфування в середовищі вважатимемо такою, що задовольняє закон Болотіна [5]  $(B_0 + Bu^2)u_t$ , де  $B_0$  і  $B$  – деякі сталі.

Запишемо диференціальне рівняння руху технологічного середовища нелінійної механічної системи у вигляді:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right)^k = f(t) + u_t (\xi + \delta u^2), \quad (2)$$

де  $\alpha^2 = \frac{E \cdot F}{\rho \cdot F}$ ,  $\beta = \frac{k_0 \cdot F}{\rho \cdot F}$ ,  $\xi = \frac{B_0}{\rho \cdot F}$ ,  $\delta = \frac{B}{\rho \cdot F}$ ,  $F$  – площа поперечного перерізу шару моделі середовища,  $\rho$  – еквівалентна густина моделі середовища,  $f(t)$  – інерційне навантаження, яке для спрощення розрахунків приймаємо гармонійного типу з амплітудою  $b$  і частотою  $\mu$ , тобто  $f(t) = b \sin \mu t$ .

Розглядаючи рівняння (2), вважатимемо, що  $\beta$ ,  $\xi$ ,  $\delta$  і  $b \ll \alpha^2$ , тобто інерційна сила, сила в'язкого тертя і сила демпфування є малими величинами. Вказані припущення дають змогу записати рівняння (2) у вигляді:

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} = \varepsilon F(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xxt}), \quad (3)$$

де  $F(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xxt}) = \left[ (u_{xxt})^k + \frac{1}{\varepsilon} (\xi + \delta u^2) u_t + \frac{b}{\varepsilon} \sin \mu t \right]$ ,  $\varepsilon = \frac{k_0}{\rho} \ll 1$ .

Рівняння (3) розглядатимемо для крайових умов вигляду:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad (4)$$

де  $l$  – довжина моделі середовища.

Дані крайові умови відповідають умовам контакту технологічного середовища з елементами механічної системи як шарнірно закріплені балки.

Використовуючи асимптотичні методи нелінійної механіки [6], розглянемо незбурене рівняння, яке відповідає (3), тобто рівняння:

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} = 0. \quad (5)$$

Відокремлюючи в (5) змінні згідно з  $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ , для знаходження  $X(x)$  і  $T(t)$  отримуємо звичайні лінійні диференціальні рівняння:

$$X''(x) + \frac{1}{\alpha^2} \lambda X(x) = 0, \quad (6)$$

$$\ddot{T}(t) + \lambda T = 0. \quad (7)$$

де  $\lambda$  – параметр, який буде визначено нижче за крайовими умовами.

Функція  $X(x)$  в (6), як випливає з (5), повинна задовольняти крайові умови:

$$X(x)|_{x=0} = X(x)|_{x=l} = 0. \tag{8}$$

З врахуванням останнього, параметр  $\lambda$  і розв'язки рівняння (5) записуються у вигляді [4]:

$$\lambda = \frac{k\pi}{l},$$

$$u = \sum_k X_k(x) \bar{T}_k \cos \omega_k t, \quad X_k = \bar{X}_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad \text{де } \bar{X}_k \text{ і } \bar{T}_k - \text{сталі.} \tag{9}$$

Як відомо [7], у реальних механічних системах з багатьма ступенями вільності, а також у системах з розподіленими параметрами наявність сил тертя (як зовнішніх, так і внутрішніх) призводить до швидкого загасання високочастотних коливань і встановлення коливань з якоюсь однією частотою. Через це у вказаних системах доцільно розглянути так звані одночастотні режими коливань [7]. Останнє значною мірою полегшує методику дослідження збуреного рівняння (3). Тому приймемо за одночастотні розв'язки незбуреного рівняння співвідношення:

$$u(x, t) = a \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \cdot \cos(\omega t + \theta), \quad \tilde{X}(x) = \sin \frac{k\pi}{l}x, \tag{10}$$

де  $\omega = \alpha \frac{\pi}{l}$ ,  $a$  і  $\theta$  – сталі. ( $a = \bar{X}_k \cdot \bar{T}_k$ ).

Згідно з [6, 7], співвідношення (10) також вважатимемо розв'язком збуреного рівняння, для якого  $a$  і  $\theta$  будуть вже функціями часу  $t$ , тобто розв'язок збуреного рівняння шукатимемо у вигляді:

$$u(x, t) = a(t) \tilde{X}(x) \cos(\omega t + \theta(t)), \tag{11}$$

де  $a(t)$  і  $\theta(t)$  визначаються із диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \mathcal{E} = \varepsilon \frac{\sin \psi}{\omega p} \int_0^l \left( (u_{xxt})^k + \frac{1}{\varepsilon} (\xi + \delta u^2) u_t + \frac{b}{\varepsilon} \sin \gamma \right) \sin \frac{\pi x}{l} dx, \\ \mathcal{E} = \varepsilon \frac{\cos \psi}{\omega a p} \int_0^l \left( (u_{xxt})^k + \frac{1}{\varepsilon} (\xi + \delta u^2) u_t + \frac{b}{\varepsilon} \sin \gamma \right) \sin \frac{\pi x}{l} dx, \end{cases} \tag{12}$$

$$p = \int_0^l \tilde{X}^2(x) dx = \int_0^l \sin^2 \frac{\pi}{l} x dx = \frac{l}{2},$$

$$\gamma = \mu t, \quad \psi = \omega t + \theta, \quad u = a \sin \frac{\pi}{l} x \cos \psi, \quad u_t = -\omega a \sin \frac{\pi}{l} x \sin \psi, \quad u_x = \frac{\pi}{l} a \cos \frac{\pi}{l} x \cos \psi.$$

Для системи диференціальних рівнянь (12) розглянемо два випадки: *нерезонансний*  $t\omega \neq \mu l$  і *резонансний*  $t\omega \approx \mu l$ .

**Нерезонансний випадок.** Як показано у [8], вплив малого періодичного збурення на амплітудно-частотні характеристики (АЧХ) нелінійних систем у нерезонансному випадку незначний. Тому для аналізу руху системи використаємо так звані усереднені диференціальні рівняння, які відповідають (12), тобто рівняння:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{\varepsilon}{4\pi^2 \omega p} \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( (u_{xxt})^k + \frac{1}{\varepsilon} (\xi + \delta u^2) u_t + \frac{b}{\varepsilon} \sin \gamma \right) \sin \frac{\pi}{l} x \sin \psi dx d\psi d\gamma, \\ \mathcal{E} &= \frac{\varepsilon}{4\pi^2 a \omega p} \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( (u_{xxt})^k + \frac{1}{\varepsilon} (\xi + \delta u^2) u_t + \frac{b}{\varepsilon} \sin \gamma \right) \sin \frac{\pi}{l} x \cos \psi dx d\psi d\gamma. \end{aligned} \tag{13}$$

У (13) припускаємо, що амплітуда  $a(t)$  і фаза  $\theta(t)$  коливань за період змінюється на незначну величину. Це дає змогу при інтегруванні останніх виразів вважати  $a$  і  $\theta$  сталими.

Отже, одночастотні коливання середовища у нерезонансному випадку описуються залежністю (11), в якій  $a(t)$  і  $\theta(t)$  визначаються з диференціальних рівнянь (13).

$$\dot{a} = \frac{\varepsilon\pi^2 a}{2l^2} - \frac{\xi a}{2} - \frac{3a^3\delta}{32} = A(a),$$

$$\dot{\theta} = 0.$$

Із отриманих співвідношень випливає, що у першому наближенні для амплітуди коливань шару технологічного середовища нелінійної механічної системи існують два стаціонарні значення,

які відповідно дорівнюють:  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = \sqrt{\frac{32}{3\delta} \left( \frac{\varepsilon\pi^2}{2l^2} - \frac{\xi}{2} \right)}$ . Перше стаціонарне значення відповідає

відносному спокою середовища, і вказаний стан є нестійким при  $A'(0) > 0$  і стійким у протилежному випадку; друге значення відповідає усталеному динамічному процесу, який описується залежністю:

$$u = a_2 \cos(\omega t) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right).$$

На рис. 1 зображено зміну в часі амплітуди коливань  $a$  за різних початкових умов ( $a_{02}, a_{04} < a_2$  і  $a_{01}, a_{03} > a_2$ ). Умова стійкості розв'язку  $\left. \frac{dA(a)}{da} \right|_{a=a_2} < 0$ .

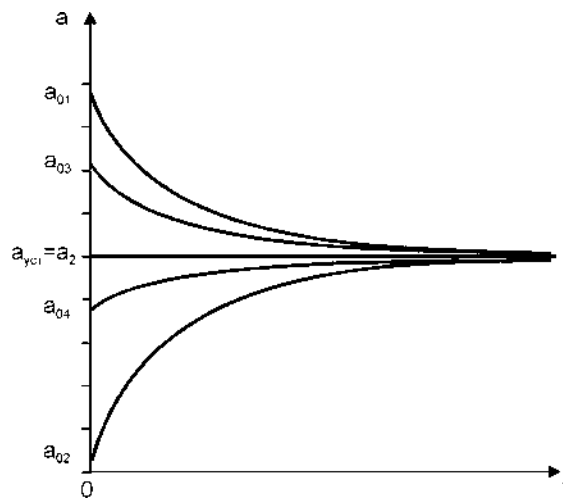


Рис. 1. Криві зміни амплітуди коливань шару середовища у нерезонансному випадку

З проведених розрахунків випливає, що незалежно від початкових умов у нерезонансному випадку амплітуда коливань технологічного середовища нелінійної механічної системи набуває свого стійкого стаціонарного значення, що відповідає усталеному динамічному процесу коливань.

**Резонансний випадок.** Як відомо [9], у резонансному випадку АЧХ нелінійних коливань системи істотно залежить від фази зовнішнього збурення. Тому введемо у (12) різницю фаз  $\varphi = \psi - \gamma$ , тоді для випадку головного резонансу  $\omega \approx \mu$  ( $m = n$ ) із (12) отримаємо:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= \varepsilon \frac{\sin(\varphi + \gamma)}{\omega p} \int_0^l \left( (u_{xxt})^k + \frac{1}{\varepsilon} (\xi + \delta u^2) \mu_t + \frac{b}{\varepsilon} \sin \gamma \right) \sin \frac{\pi}{l} x dx, \\ \mathfrak{I} &= \omega - \mu + \varepsilon \frac{\cos(\varphi + \gamma)}{\omega a p} \int_0^l \left( (u_{xxt})^k + \frac{1}{\varepsilon} (\xi + \delta u^2) \mu_t + \frac{b}{\varepsilon} \sin \gamma \right) \sin \frac{\pi}{l} x dx. \end{aligned} \quad (14)$$

Функція  $u(x, t)$  і її похідні визначаються як і у (12), тільки для розглядуваного випадку  $\psi = \gamma + \varphi$ .

Усреднюючи диференціальні рівняння (14) лише за швидкозмінною фазою  $\gamma$ , із (14) знаходимо:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= \varepsilon \frac{1}{2\pi\omega p} \int_0^l \int_0^{2\pi} \sin(\varphi + \gamma) \cdot \left( (u_{xxt})^k + \frac{1}{\varepsilon} (\xi + \delta u^2) \mu_t + \frac{b}{\varepsilon} \sin \gamma \right) \sin \frac{\pi x}{l} dx d\gamma = \\ &= \frac{\varepsilon \pi^2 a}{2l^2} - \frac{\xi a}{2} - \frac{3a^3 \delta}{32} + \frac{2b \cos \varphi}{\pi \omega}, \\ \mathfrak{I} &= \omega - \mu + \varepsilon \frac{1}{2\pi\omega a p} \int_0^l \int_0^{2\pi} \cos(\varphi + \gamma) \cdot \left( (u_{xxt})^k + \frac{1}{\varepsilon} (\xi + \delta u^2) \mu_t + \frac{b}{\varepsilon} \sin \gamma \right) \sin \frac{\pi x}{l} dx d\gamma = \\ &= \omega - \mu - \frac{2b \sin \varphi}{\pi \omega a}. \end{aligned} \quad (15)$$

Перше наближення асимптотичного розв'язку рівняння у резонансному випадку описується залежністю:

$$u(x, t) = a(t) \cdot \sin \frac{\pi x}{l} \cdot \cos(\varphi + \mu t),$$

в якій  $a(t)$  і  $\varphi(t)$  визначаються з системи нелінійних диференціальних рівнянь (15).

На основі отриманих математичних моделей опису динаміки технологічних середовищ нелінійних механічних систем оброблення та транспортування виробів побудовані резонансні криві (рис. 2) шляхом числового інтегрування системи нелінійних диференціальних рівнянь (15). Причому прийнято закон зміни частоти збудуючої сили вигляду:

$$\mu = \frac{2 \cdot \omega^* + t}{2},$$

де  $\omega^* \Rightarrow \omega$ , що відповідає швидкому проходженню через головний резонанс.

Як видно з графічних залежностей, величина амплітуди коливань шару середовища залежить від величини його густини, маси і амплітуди збудуючої сили (амплітуди коливань робочого органу нелінійних механічних систем оброблення та транспортування).

**З наведених залежностей випливає, що:**

а) амплітуда коливань шару середовища у резонансному випадку залежить від його густини і амплітуди збудуючої сили (амплітуди коливань робочого органу нелінійних механічних систем оброблення та транспортування);

б) резонансна крива зміни амплітуди коливань має вигляд згасаючого биття;

в) головний резонанс ( $\omega = \mu$ ), при швидкому проходженні через нього, впливає незначною мірою на розвиток амплітуди коливань – вона стабілізується залежно від параметрів оброблення та властивостей технологічного середовища. Її значення можна визначити методом числового інтегрування системи диференціальних рівнянь (15).

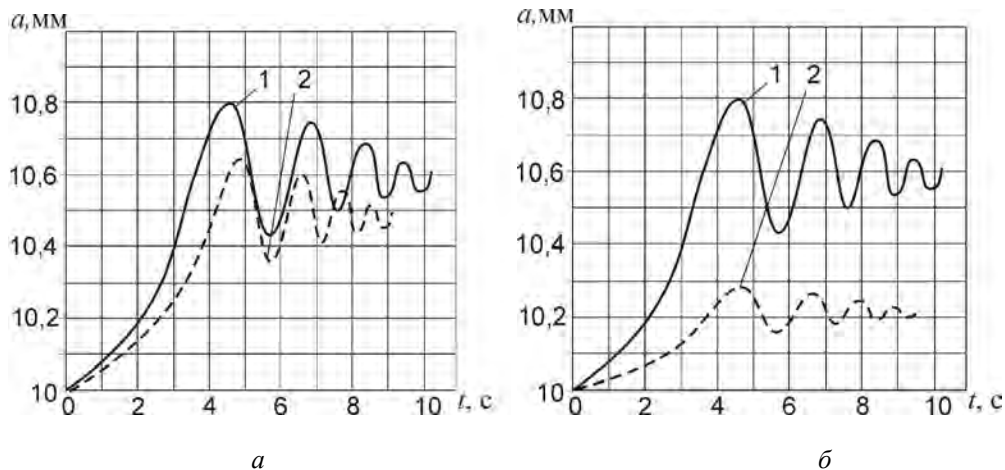


Рис. 2. Резонансні криві амплітуд коливань шару технологічного середовища в перехідному режимі при  $E = 1 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}$ ,  $k = 0.018$ ,  $B = 400$ ,  $B_0 = 0.01$ ,  $F = 0.1 \text{ м}^2$ ,  $l = 1 \text{ м}$ . Початкові умови:  $a_0 = 0.001 \text{ м}$ ,  $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ . Зокрема: а) залежності при різних видах робочого середовища контейнера вібромашини: 1 – при густині середовища  $6000 \text{ кг/м}^3$ , величині амплітуди збурюючої сили  $0.006 \text{ м}$ , 2 – при густині середовища  $7000 \text{ кг/м}^3$ , величині амплітуди збурюючої сили  $0.006 \text{ м}$ ; б) залежності при різних величинах збурюючої сили: 1 – при густині середовища  $6000 \text{ кг/м}^3$ , величині амплітуди збурюючої сили  $0.006 \text{ м}$ , 3 – при густині середовища  $6000 \text{ кг/м}^3$ , величині амплітуди збурюючої сили  $0.002 \text{ м}$ .

**Висновки.** Отже, у результаті проведених досліджень розроблено математичну модель для вивчення динаміки технологічних середовищ нелінійних механічних систем оброблення та транспортування виробів. Вона дає змогу застосувати для опису динаміки вказаних вище механічних систем відносно нескладний математичний апарат як для нерезонансного, так і резонансного випадків, дослідити вплив параметрів на амплітуду коливань технологічного середовища, відповідно оптимізувати технологічний процес оброблення виробів чи транспортування з метою отримання необхідних їх параметрів. Слід наголосити, що розроблена математична модель є достатньо уніфікованою, бо уможливорює опис динамічних процесів в різноманітних системах оброблення виробів та транспортування. Так, наприклад, її можна успішно застосувати для опису руху оброблювального середовища при об'ємному обробленні виробів, руху стрічок транспортерів, різноманітних витягів, перемотувального обладнання тощо.

1. Z.A. Stotsko, B.I.Sokil, V.G. Topilnyckyj. Complex mathematical model and optimisation of vibration volumetric treatment for surfaces of machine parts. *Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering*. Published monthly as the organ of the World Academy of Materials and Manufacturing Engineering. Volume 24. Issue 1. September 2007. S.283-290. 2. B. Diveyev, Z. Stocko, V. Topilnyckyj. Diskrete-continuum methods application for rotating machine-absorber interaction analysis. *Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering*. VOL. 20, ISS. 1-2, January-February 2007, pp. 387-390. 3. Субач А.П. Динамика процессов и машин объемной обработки. – Рига: Зинатне, 1991. – 240 с. 4. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. – М.: Физматгиз, 1960. – 193 с. 5. Болотин В.В. "Динамическая устойчивость упругих систем". М.: Гостехиздат. 1956. – 600 с. 6. Митропольский Ю.А., Мосеенков Б.И. "Асимптотические решения уравнений в частных производных". – К.: Вища школа, 1976. – 592 с. 7. Боголюбов Н.Н. Одночастотные свободные колебания в нелинейных системах со многими степенями свободы // Сб. трудов ин-та строительной механики АН УССР. – 1979. – № 10. – С. 9-21. 8. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 491 с. 9. Боголюбов Н.И., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд-е 4-е. – М.: Физматгиз, 1974. – 501 с.