

І.Б. БУТИТЕР, *Б.М. ДІВЕЄВ, І.С. КОГУТ, **А.Г. СМОЛЬСЬКИЙ

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача, Львів;
*Національний університет “Львівська політехніка”; **Інститут автобусобудування, Львів

ВИЗНАЧЕННЯ МЕХАНІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ШАРУВАТИХ ЕЛЕМЕНТІВ

© Бутитер І.Б., Дівеєв Б.М., Козут І.С., Смольський А.Г., 2011

Розглянуто згин асиметричного шаруватого пакета. На основі теорії вищого порядку для шаруватих анізотропних пластин та експериментально визначених прогинів за триточкового згину шаруватих балок запропоновано методу ідентифікації їх модулів пружності. Теоретична модель враховує зсувні і нормальні деформації та напруження. Модулі визначено на основі мінімізації відхилень експериментальних прогинів від розрахункових.

The bend of the asymmetric layered package is considered. On the basis of theory of higher order for the layered anisotropic plates and experimentally determined deflections under three-point bending of the layered beams the method of identification of their elastic modulus is proposed. A theoretical model takes account of the shear and normal strains and stresses. The modules are determination on the basis of minimization of deviations of the experimental bending deflections from calculated.

Вступ. Шаруваті композитні тонкостінні елементи широко застосовуються в сучасних конструкціях. Для визначення пружних, вібраційних, звукозахисних та міцнісних властивостей конструкцій необхідні модулі пружності шарів тонкостінного елемента, які наперед невідомі, тому актуальним є розроблення методів їх ідентифікації. В цьому плані важливо побудувати уточнену теоретичну модель та вибрати таку схему випробувань, яка дасть змогу однозначно визначити окремий модуль або групу модулів.

Аналіз останніх досліджень. Відомий [1] метод статичного експерименту, який дає змогу визначити окремо модуль Юнга за розтягу під певним кутом ортотропної балки. За загальнішим підходом [2] запропоновано специфічний вибір поля деформацій, який анулює внески всіх складових тензора деформацій, окрім одного при певному модулі. Це дає можливість теоретично визначити окремо кожний з модулів. Залишається питання практичної реалізації цих полів деформації у схемах реального експерименту. Іноді для дослідження модулів пружності застосовують зразки спеціальної форми та спеціальне навантаження [3] з тим, щоб виокремлювати складові енергії деформації пластини, пов'язані з окремими модулями пружності. Проте, ця методика не знайшла достатнього експериментального підтвердження.

Для адекватного відтворення механічних властивостей шаруватих тонкостінних елементів слід застосувати уточнені розрахункові схеми [4–6]. У [6] запропоновано “уніфіковані” розрахункові схеми, в яких порядок рівнянь не обмежений (розглядається довільне число апроксимацій за товщиною пластини). Ці рівняння отримані за змішаним варіаційним принципом Рейснера. Проте, залишається відкритим питання про збіжність таких апроксимацій.

У [7] для визначення модулів Юнга і зсуву балки використовується схема триточкового згину. Застосовуються і динамічні методи ідентифікації модулів [8, 9], які ґрунтуються на порівнянні частот, визначених експериментально і теоретично. В [10, 11] запропоновано адаптивний алгоритм на основі узагальнених кінематичних апроксимацій і класичного методу Гальоркіна

для еліптичної системи рівнянь лінійної теорії пружності, в якому гарантується існування і єдиність розв'язку задачі розрахунку напружено-деформованого стану в шаруватих елементах за циліндричного згину.

У цій роботі на основі статичних випробувань та уточнених розрахункових схем запропоновано методику ідентифікації пружних характеристик асиметричних шаруватих пакетів. Характеристики пружності визначені на основі мінімізації відхилень експериментальних прогинів шаруватої балки від розрахункових.

Основні співвідношення. Представимо пакет як суму двох шаруватих пластин з симетричними та антисиметричними механічними властивостями відносно серединної площини (рис. 1).

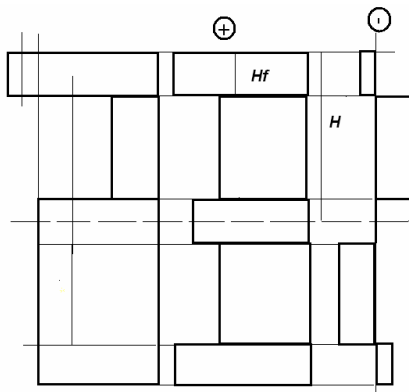


Рис. 1. Зведення асиметричного тришарового пакета до симетричного та асиметричного

Тут H_f – товщина лицевого шару, H – товщина проміжного демпфуючого прошарку.

Аналогічним чином розіб'ємо напружено-деформований стан на симетричний (s) та асиметричний (a) для всього пакета. Розглянемо таку саму, як і у симетричному випадку [10,11] незалежну апроксимацію для шарів пакета

$$U_s^e - \begin{cases} u_s^e = \sum_{i,k} u_{iks}^e z^{(2i-1)} \sin k\pi x / L, \\ w_s^e = \sum_{i,k} w_{iks}^e z^{(2i-2)} \cos k\pi x / L, \end{cases} \quad U_a^e - \begin{cases} u_a^e = \sum_{i,k} u_{ika}^e z^{(2i-2)} \cos k\pi x / L, \\ w_a^e = \sum_{i,k} w_{ika}^e z^{(2i-1)} \sin k\pi x / L, \end{cases} \quad (1)$$

і основну апроксимацію для всього пакета

$$U_s^N - \begin{cases} u_s^N = \sum_{i,k} u_{iks}^N z^{(i)} \sin k\pi x / L, \\ w_s^N = \sum_{i,k} w_{iks}^N z^{(i)} \cos k\pi x / L, \end{cases} \quad U_a^N - \begin{cases} u_a^N = \sum_{i,k} u_{ika}^N z^{(i)} \text{sign}(z) \cos k\pi x / L, \\ w_a^N = \sum_{i,k} w_{ika}^N z^{(i)} \text{sign}(z) \sin k\pi x / L, \end{cases} \quad (2)$$

$$N = 1, 2, \dots$$

Покажемо методику розрахунку на прикладі згину симетричної тришарової балки.

Триточковий згин тришарової балки (сандвіча). Введемо наступні кінематичні апроксимації ($U = U_e \cup U_d$) для симетричної тришарової балки (сандвіча) завтовшки $2H_p$ і внутрішнім шаром – $2H$ (рис. 2).

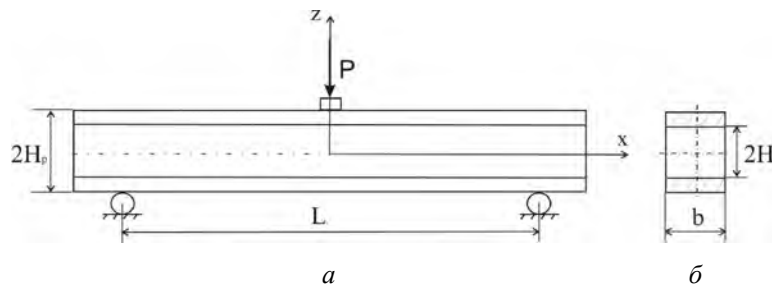


Рис. 2. Схема навантаження (а) і перетин балки (б)

$$U_e - \begin{cases} u = \sum_{i,k} u_{ik}^e z^{2i-1} \varphi_k(x), \\ w = \sum_{i,k} w_{ik}^e z^{2i-2} \gamma_k(x), \end{cases} \quad 0 < z < H, \quad 0 < x < L, \quad U_d - \begin{cases} u = \sum_{i,k} u_{ik}^d (z-H)^i \varphi_k(x), \\ w = \sum_{i,k} w_{ik}^d (z-H)^i \gamma_k(x), \end{cases} \quad H < z < H_p, \quad 0 < x < L. \quad (3)$$

де u, w – відповідно тангенціальні та нормальні переміщення шарів; $u_{ik}^e, w_{ik}^e, u_{ik}^d, w_{ik}^d$ – невідомі величини; $\varphi_k(x) = \sin \frac{(2k-1)\pi x}{L/2}, \gamma_k(x) = \cos \frac{(2k-1)\pi x}{L/2}$ – координатні функції, які залежать від граничних умов на краях балки.

Узагальнений закон Гука у випадку циліндричного згину шарів балки буде

$$\sigma_{xx} = C_{xx} \varepsilon_{xx} + C_{xz} \varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{zz} = C_{zx} \varepsilon_{xx} + C_{zz} \varepsilon_{zz}, \quad \tau_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz}, \quad (4)$$

де у випадку плоского згину коефіцієнти жорсткості можна подати через технічні константи E_1, E_2, G, ν так

$$C_{xx} = \frac{E_1}{1-\nu^2 E_2/E_1}, \quad C_{zz} = \frac{E_2}{1-\nu^2 E_2/E_1}, \quad C_{xz} = \frac{\nu E_1}{1-\nu^2 E_2/E_1}, \quad G_{xz} = G.$$

Підставивши (3) і (4) у варіаційне рівняння Лагранжа

$$\int_V (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{zz} \delta \varepsilon_{zz} + \tau_{xz} \delta \varepsilon_{xz}) dV = \int_{S_p} P \delta U dS, \quad (5)$$

і застосувавши метод Бубнова–Гальоркіна, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення амплітуд переміщень [10,11]

$$[A] \bar{U} = \begin{bmatrix} A_1 & A_d \\ A_d^T & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_e \\ \bar{U}_d \end{bmatrix} = \bar{p}, \quad (6)$$

де ε_{ij} – розтягувальні деформації; γ_{ij} – деформації зсуву; σ_{ij} – нормальні напруження; τ_{ij} – дотичні напруження; V – об’єм балки; S_p – поверхня з відомими зусиллями; $[A]$ – блочна матриця жорсткості, визначена подвійним інтегруванням за товщиною і довжиною балки [11]; \bar{U}, \bar{p} – вектори амплітуд переміщень і зовнішніх зусиль; T – індекс транспонування.

Експериментальні дослідження. Досліджували на згин (рис. 3) балки із пінопласту марок 3715 і 6718 та тришарові балки з тримкими шарами із вуглепластику і заповнювачем із пінопласту марки 3715. Шари завтовшки $0,5 \cdot 10^{-3}$ м із тканини полотняного плетіння, волокна орієнтовані вздовж і впоперек шару. Тришарова балка завдовжки 0,611 м прямокутного перетину, завширшки 0,028 і заввишки 0,0264 м. Навантаження ступінчасте мірними вантажами. Максимальний прогин (табл. 1, 2) вимірювали індикатором годинникового типу з ціною поділки 0,01 мм. Радіуси циліндричних опор і ширина навантажувального індентора 5 мм.

Таблиця 1

Прогини балок з пінопласту ($b \cdot 2H = 6,4 \cdot 25,4 \text{ мм}^2$; $F=2bH$)
залежно від навантаження P і довжини прольоту L

$P, \text{ Н}$	4,41	14,22	24,03	38,84	43,65
$L, \text{ м}$	$\delta \cdot 10^3, \text{ м}$				
0,06	0,020*	0,060	0,090	0,135	0,170
	0,015	0,045	0,075	0,100	0,135
0,08	0,035	0,140	0,230	0,315	0,390
	0,025	0,090	0,145	0,205	0,365
0,10	0,065	0,220	0,360	0,515	0,660
	0,045	0,165	0,275	0,385	0,505
0,12	0,105	0,350	0,600	0,855	1,100
	0,080	0,280	0,465	0,645	0,825
0,14	0,165	0,580	0,970	1,345	1,755
	0,125	0,420	0,725	1,025	1,335

У верхньому рядку (*) наведено прогини балки з пінопласту 3715,
в нижньому – з пінопласту 6718.

Таблиця 2

Прогини сандвіча залежно від навантаження P і довжини прольоту L

$P, \text{ Н}$	19,62	39,24	58,86	78,48	98,10	$L, \text{ м}$
$\delta \cdot 10^3, \text{ м}$	0,15	0,300	0,440	0,590	0,730	0,38
	0,09	0,185	0,275	0,360	0,445	0,30
	0,05	0,100	0,140	0,180	0,220	0,20

Алгоритм ідентифікації. Ідентифікація модулів пружності реалізується методом картування функції похибки

$$\Delta = \sum_i^{N_P} \frac{|w_i^{\text{exp}} - w_i|}{w_i^{\text{exp}}}, \quad (7)$$

яка являє собою усереднену за всіма навантаженнями суму відносних різниць прогинів w_i^{exp} і w_i – експериментальних і розрахункових за (1)–(6) відповідно.

На рис. 3 наведено карти параметрів E, G – ізолінії функції похибки (7) при варіації модулів E_1, G однорідних балок та модулів E_f обкладинок і зсуву G_c ядра сандвіча.

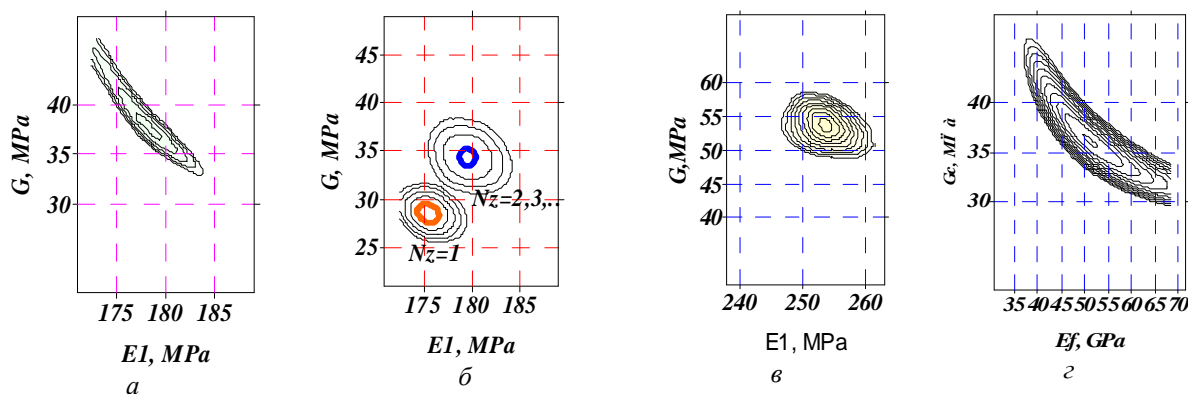


Рис. 3. Карти параметрів: E_1, G (матеріал 3715) балка Тимошенка (а) і уточнена модель при різних порядках апроксимацій (б), E_1, G (матеріал 6718) (в) і E_f, G_c (сандвіч) (з)

Тут величини E_1, G змінюються у деяких наперед заданих інтервалах D_E, D_G з кроками, які залежать від кількості точок розбиття N_E, N_G

$$E_1 = E_{10} + (p_E - 0.5)D_E, \quad G = G_0 + (p_G - 0.5)D_G \quad (8)$$

$$p_E = \frac{i_E - 1}{N_E}, \quad p_G = \frac{i_G - 1}{N_G}, \quad i_E = 1, \dots, N_E + 1, \quad i_G = 1, \dots, N_G + 1$$

Ідентифікованим параметрам відповідає точка в центрі області, яка обмежена лінією з найменшим значенням функції похибки (7).

Для отримання карти (рис. 3а) прогини розраховували за формулою

$$\delta = w(0) = P \left(\frac{L}{4GF} + \frac{L^3}{48EI} \right).$$

Модель балки Тимошенка (рис. 3а) дає дещо занижені значення модуля зсуву G , які близькі до значень, отриманих за уточненою моделлю при $N_z = 1$. Для точної апроксимації на основі (3) достатньо двох членів розкладу по нормалі $N_z = 2$ (рис. 3б). Опуклі карти параметрів свідчать про однозначність та робастність розв'язку задачі ідентифікації.

Як видно (табл. 3), ідентифіковані модулі Юнга для матеріалів 3715 і 6718 збігаються до 1,5 % з даними компанії General Plastics (США), а модуль зсуву G відрізняється на 10 %. Водночас збіг з модулем зсуву, визначеним зі згину тришарової балки, становить 2 %.

Таблиця 3

Порівняння пружних характеристик матеріалів

Пінопласт	№ *	E_1, E_f , GPa	G, G_c , МПа
3715	1	0,1792	34...35,4
	2	0,1765	34,5
6718	1	0,2517	57,5...58,0
	2	0,2550	52,0
Сандвіч	1	52,6	34,4
	2	51,8	36,15

* – 1 – дані компанії General Plastics; 2 – результати ідентифікації.

Константи E_2, η менше впливають на прогини однорідної балки. Якщо визначити функцію похибки за цими параметрами в модельній задачі, де в (7) замість експериментальних даних використовуються прогини, обчислені при середніх значеннях модулів E_{10}, G_0 (6), то отримуємо замість випуклих областей (рис. 4) смуги (рис. 4).

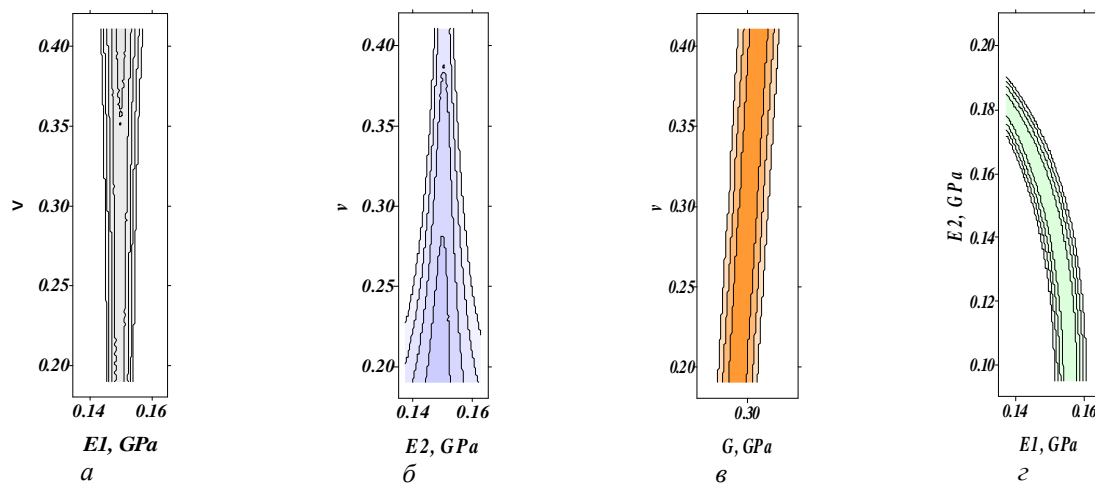


Рис. 4. Карти параметрів: (а) – E_1, η ; (б) – E_2, η ; (в) – G, η ; (г) – E_1, E_2

Це свідчить, що за цією схемою ідентифікації константи $E_{2,n}$ недоступні. Вони можуть бути визначені при використанні дуже коротких зразків з довжиною, співмірною з товщиною. Проте у цьому випадку неможливо точно визначити прогини внаслідок значного впливу локальних прогинів на опорах та під індентором.

Комбінований метод ідентифікації. Константи $E_{2,n}$ можуть бути визначені на основі одночасного використання даних по згину однорідної балки та сандвіча з внутрішнім шаром з того самого матеріалу. В цьому випадку функція похибки матиме вигляд

$$\Delta = \Delta_c + \Delta_s = \sum_i^{N_f} \left(\frac{|w_i^{\text{exp},c} - w_i^c|}{w_i^{\text{exp}}} \right) + \sum_i^{N_f} \left(\frac{|w_i^{\text{exp},s} - w_i^s|}{w_i^{\text{exp},s}} \right). \quad (9)$$

На рис. 5 наведено карти параметрів внутрішнього шару сандвіча з матеріалу 3715, отримані на основі (7).

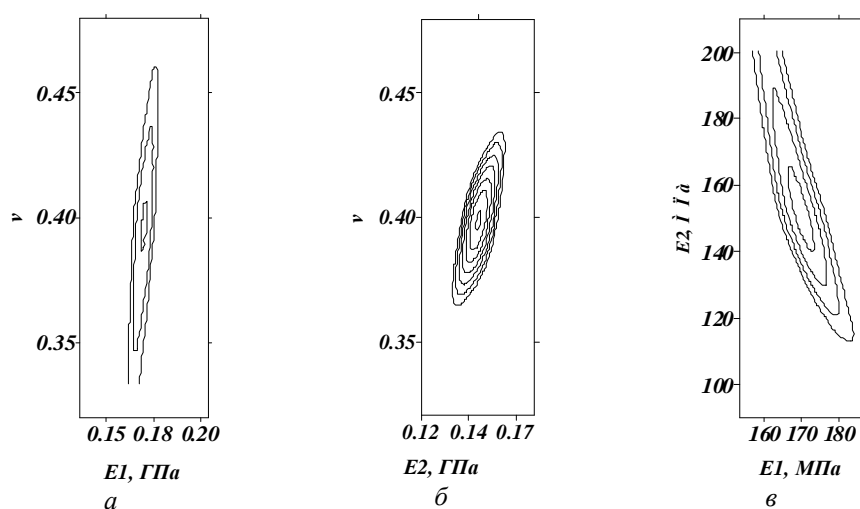


Рис. 5. Карти параметрів: а – $E_{1,n}$; б – $E_{2,n}$; в – E_1, E_2

Як видно (рис. 5) карти параметрів є обмежені випуклі області, що є необхідною умовою для однозначного розв'язання задачі ідентифікації.

Висновки. На основі схеми триточкового згину балки та уточнених розрахункових схем розроблено комбіновану методику визначення характеристик пружності однорідної балки, лицьового і внутрішнього шару сандвіча на основі мінімізації відхилень експериментальних прогинів балки від розрахункових. Опуклі карти рівнів відхилень (рис.3, 5) свідчать про однозначність та робастність розв'язку задачі ідентифікації. Для адекватного визначення модулів на основі уточнених моделей достатньо апроксимацій 2-го порядку за товщиною прошарків балки.

1. Morozov E. V., Vasiliev V. V. Determination of the shear modulus of orthotropic materials from off-axis tension tests // *Composite Structures*. – 2003. – 62. – P. 379–382. 2. Greediac, M., Toussaint, E., Pierron, F. Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method. 1 – Principle and definition // *Int. J. Solids and Structures*. – 2002. – 39, № 10. – P. 2691–2706. 3. Greediac M., Toussaint E., Pierron F. Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method. 2 – Application to in-plane properties // *Int. J. of Solids and Structures*. – 2002. – 39, № 10. – P. 2707–2730. 4. Шереметьев М. П., Пелех Б. Л. К построению уточненной теории пластин // *Инж. журн.* – 1964. – 4, Вып. 3. – С. 504–510. 5. Heng Hu, Salim

Belouettar, Michel Potier-Ferry, El Mostafa Daya Review and assessment of various theories for modeling sandwich composites // Composite Structures. – 2008. – 84. – P. 282–292. 6. Demasi L. 13 Hierarchy plate theories for thick and thin composite plates // Composite Structures. – 2008. – 84. –P. 256–270. 7. Tarnopol'skii Yu. M., Kincis T. Ya. Static test methods for composites. New York: Van Nostrand Reinhold; 1985. 8. Araujo A. L., Mota Soares C. M., Moreira de Freitas M. J., Pedersen P., Herskovits J. Combined numerical-experimental model for the identification of mechanical properties of laminated structures // Composite Structures. – 2000. – Vol. 50. – P. 363–372. 9. Rikards R., Chate A., Gailis A. Identification of elastic properties of laminates based on experimental design // Solids and Structures. – 2001. – Vol. 38. – P. 5097–5115. 10. Diveyev B., Butyter I., Shcherbyna N. High order theories for elastic modules identification of composite plates. Part I. Theoretical approach // Mechanics of Composite Materials. – 2008. – 44, № 1. – P. 25–36. 11. Diveyev B., Butyter I., Shcherbyna N. Influence of clamp conditions and material anisotropy on frequency spectra of laminated beams // Mechanics of Composite Materials. – 2011. – 47, № 2.

УДК 621.9.048.6

О.Т. ВЕЛИКА, М.В. БОЙКО, В.Г. ТОПІЛЬНИЦЬКИЙ, Р.В. ЛАМПІКА
Національний університет “Львівська політехніка”

ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ КОНСТРУКТИВНИХ ПАРАМЕТРІВ ДЕТАЛІ “КРОНШТЕЙН”

© Велика О.Т., Бойко М.В., Топільницький В.Г., Лампіка Р.В., 2011

Розроблено алгоритм розрахунку напружено-деформованого стану металевої пластинки деталі “Кронштейн”, визначено її оптимальну товщину, яка задовольняє необхідні умови виготовлення та експлуатації.

The algorithm of calculation of the tensely deformed state of metallic plate of detail is developed “Bracket”, certain it optimum thickness which satisfies the necessary terms of making and exploitation.

Вступ. Пластиноподібні кронштейни набули широкого поширення як елементи кріплення, використовувані в сучасних інженерних конструкціях приладобудування, машинобудування, в промисловому та цивільному будівництві тощо. В процесі своєї експлуатації вони несуть суттєве навантаження, часто знакозмінне, тому їх конструкція повинна забезпечувати гарантовані умови експлуатації і в більшості випадків не бути металомісткою. Відповідно, для їх виконання необхідно проводити ґрунтовний розрахунок напружено-деформованого стану цього виду деталей ще на стадії проектування, зокрема з використанням комп’ютерної техніки.

Аналіз останніх досліджень. Відомі уточнені схеми визначення напружено-деформованого стану пластин в умовах плоского защемлення [1,2]. Зокрема в [1], на основі інженерних підходів, оцінено вплив защемлення на частотні характеристики консолі, а в [2] динамічні характеристики отримано методом скінченних елементів.