

^{1,2}І.М. ЯВОРСЬКИЙ, І.Б. КРАВЕЦЬ, І.Й. МАЦЬКО, Р.М. ЮЗЕФОВИЧ¹Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, м. Львів,²Інститут телекомунікації Технологічно-природничого університету,
м. Бидгощ, Польща

ІМОВІРНІСНА СТРУКТУРА СИГНАЛІВ ВІБРАЦІЇ ТІЛА З ТРІЩИНОЮ

© Яворський І.М., Кравець І.Б., Мацько І.Й., Юзефович Р.М., 2011

Проаналізовано вимушені коливання від тонкої деталі з тріщиною. Показано, що за появи тріщини, такі коливання описуються моделлю у вигляді періодично корельованих випадкових процесів. Розглянуто можливості побудови діагностичних критеріїв на змінах імовірнісних характеристик вібраційних сигналів.

The forced vibrations of thin cracked detail are analyzed. Shown, that these oscillations are described within periodically correlated random processes model in the case of crack presence. The opportunities of diagnostic criteria build on the base of vibration signals probabilistic characteristics changing are considered.

Розглянемо дещо спрощену модель об'єкта діагностики у вигляді тіла масою m , яке має один ступінь вільності і характеризується лінійною залежністю між деформацією x і силою тиску F . За наявності тріщини жорсткість тіла k має різні значення за деформацій на розтяг і на стиск. Тому її поява призводить до нелінійності системи. Під час коливного руху тріщина почергово відкривається і закривається. У ті моменти часу, коли тріщина закрита, матеріал веде себе як однорідний, і його жорсткість k_c є такою самою, як у матеріалу без тріщини k . Проте у такі моменти часу, коли тріщина відкрита, матеріал є неоднорідним і його жорсткість k_s зменшується на деяку величину $\Delta k = k_c - k_s$, наслідком чого є зміна власної частоти коливань. Згідно з роботами [1–2], вібраційний сигнал такого тіла з тріщиною описуватимемо системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + 2h_c \frac{dx}{dt} + w_c^2 x &= f(t), \quad x < 0, \\ \frac{d^2x}{dt^2} + 2h_s \frac{dx}{dt} + w_s^2 x &= f(t), \quad x \geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

де $x(t)$ – зміщення; h_c, h_s – коефіцієнти демпфування; w_c, w_s – власні частоти коливань системи за закритою і відкритою тріщиною.

Власну частоту тіла з відкритою тріщиною можна визначити за формулою [2]:

$$w_s = w_0 \left(2\sqrt{1 - \frac{\Delta k}{k}} \right) \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\Delta k}{k}} \right)^{-1},$$

де $w_0 = \sqrt{k/m}$. Відносна зміна жорсткості $\frac{\Delta k}{k}$ пов'язана з відносним розміром тріщини приблизним

співвідношенням [2]: $\frac{\Delta k}{k} \approx \frac{\Delta l}{l}$.

Розв'язати згадану систему рівнянь аналітично складно, тому для дослідження її розв'язків слід використовувати чисельні методи. У цьому випадку був використаний ітераційний метод Ейлера [5]. Структура симульованих реалізацій сигналів досліджувалась залежно від відносної довжини тріщини [3–5]. Змушувальна сила $f(t)$ була задана у вигляді $f(t) = a \cos \omega t + e(t)$, де $e(t)$ – стаціонарний білий шум з одиничною дисперсією. Наведемо коротко результати аналізу отриманих реалізацій для таких значень параметрів: $a = 1$, $\omega_0 = 0.0455 \text{ рад/с}$ і $\omega = 0.0628 \text{ рад/с}$.

У випадку, коли відносна довжина тріщини дорівнює $\frac{\Delta l}{l} = 0.1$, вібраційний сигнал $x(t)$ має вигляд, показаний на рис. 1, а. Оцінка кореляційної функції стаціонарного наближення (рис. 1, б) має незникаючий хвіст, що свідчить про наявність у вібраційному сигналі періодичної складової. Її потужність, як легко підрахувати, становить близько 45 % від всієї потужності сигналу. За допомогою когерентного методу з вібросигналу була виділена періодична й стохастична складові сигналу. Оцінка математичного сподівання, що описує першу, показана на рис. 2, а. Наведена крива є близькою до косинусної, що й підтверджують оцінки коефіцієнтів Фур'є (рис. 2, б). оцінка кореляційної функції стаціонарного наближення (рис. 3, б) стохастичної складової сигналу (рис. 3, а) має вигляд зникаючих коливань.



Рис. 1. Вібраційний сигнал (а) і оцінка кореляційної функції його стаціонарного наближення (б) ($\Delta l / l = 0.1$)



Рис. 2. Оцінка математичного сподівання (а) та його коефіцієнтів Фур'є (б) ($\Delta l / l = 0.1$)



Рис. 3. Стохастична складова сигналу (а) та оцінка кореляційної функції її стаціонарного наближення (б) ($\Delta l / l = 0.1$)

Наявність слабких незанимаючих осциляцій пов'язана з похибкою обчислень. Оцінки дисперсії стохастичної складової та її коефіцієнтів Фур'є показана на рис. 4.

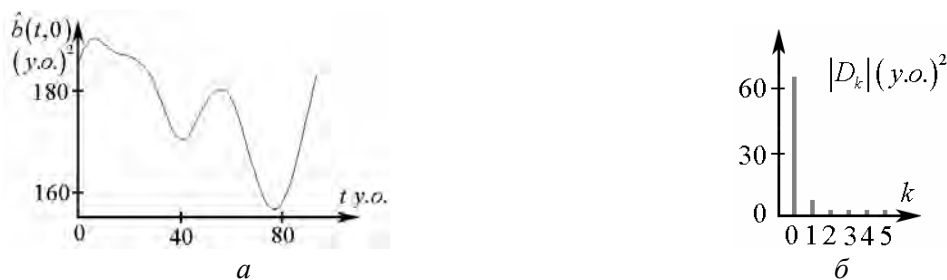


Рис. 4. Оцінка дисперсії стохастичної складової сигналу (а) та її коефіцієнтів Фур'є (б) ($\Delta l / l = 0.1$)

На графіку оцінки дисперсії (рис. 5) виразно бачимо її зміни з часом, хоч вони на разі не є глибокими ($b_{\min}(t,0)/b_{\max}(t,0)=0.76$). Про це свідчать також незначні величини оцінок кореляційних компонентів.

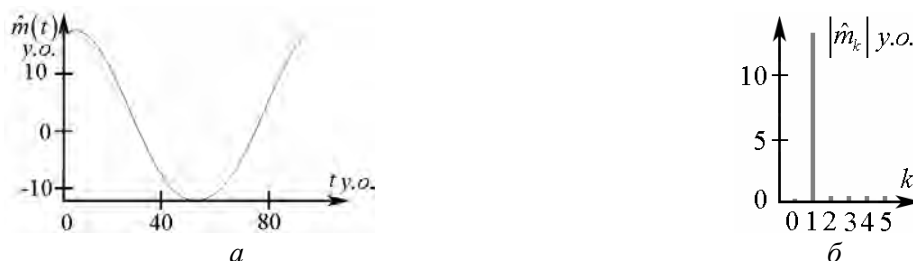


Рис. 5. Оцінка математичного сподівання (а) та його коефіцієнтів Фур'є (б) ($\Delta l / l = 0.3$)

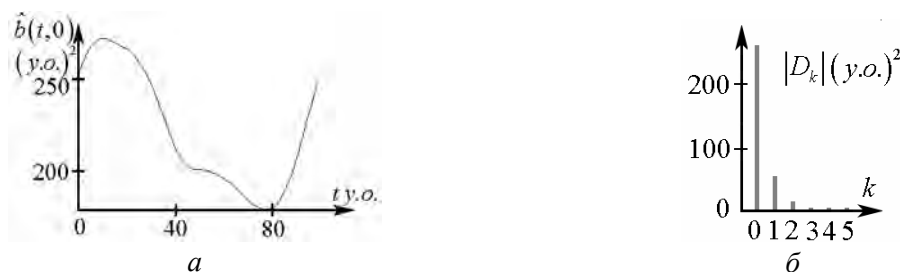


Рис. 6. Оцінка дисперсії стохастичної складової сигналу (а) та її коефіцієнтів Фур'є (б) ($\Delta l / l = 0.3$)

Розглянемо тепер випадок, коли $\frac{\Delta l}{l} = 0.3$ (рис. 6). З аналізу оцінки кореляційної функції випливає, що ріст тріщини призводить до зростання потужності випадкової складової сигналу. Говорити про зміни імовірнісної структури вібраційного сигналу по вигляду оцінок детермінованої складової (рис. 5) та оцінки кореляційної функції стаціонарного наближення стохастичної складової важко, бо візуально фактично нічого не змінилося. Істотніших змін зазнала форма оцінки дисперсії стохастичної складової, обчисленої в ПКВП-наближенні (рис. 6, а). Співвідношення $b_{\min}(t,0)/b_{\max}(t,0)$ тепер становить 0.64. Змінилася й форма періодичних коливань дисперсії. Істотно підросла амплітуда першої гармоніки, а також проявляються вже коливання подвійної частоти (рис. 6, б).

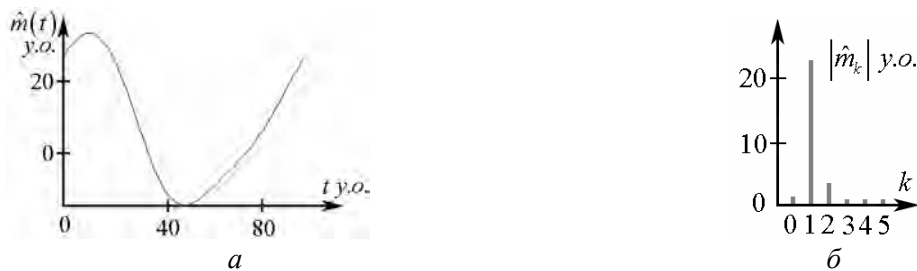


Рис. 7. Оцінка математичного сподівання (а) та його коефіцієнтів Фур'є (б) ($\Delta l / l = 0.7$)

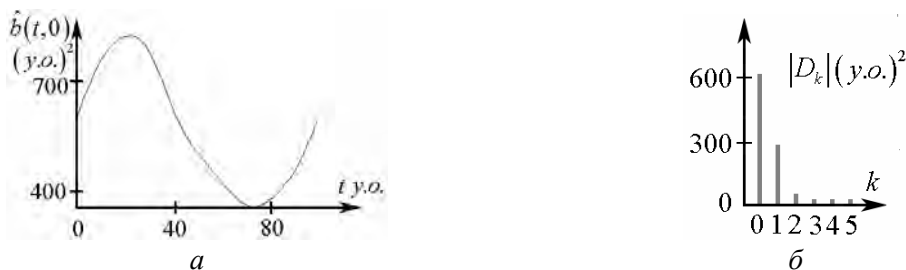


Рис. 8. Оцінка дисперсії (а) та її коефіцієнтів Фур'є (б) ($\Delta l / l = 0.7$)

За $\frac{\Delta l}{l} = 0.7$ розмах детермінованих коливань сигналу зростає майже вдвічі (рис. 7). Подібно змінюється і амплітуда першої гармоніки, значною стає амплітуда другої, що свідчить про зростання ступеня нелінійності системи. Відношення мінімального та максимального значень оцінки дисперсії (рис. 8, а) тепер становить $b_{\min}(t,0) / b_{\max}(t,0) = 0.24$. З діаграми (рис. 8, б) бачимо, що значно зросли порівняно з попередніми значення нульового та першого кореляційних компонентів.

Відтак наведені результати свідчать, що вібраційний сигнал системи, яка описується рівнянням (1), описується ПКВП.

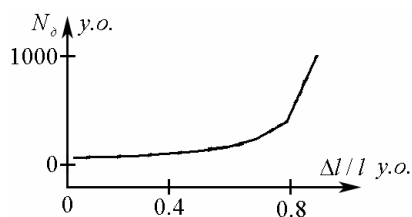


Рис. 9. Залежність потужності регулярних коливань від відносної довжини тріщини

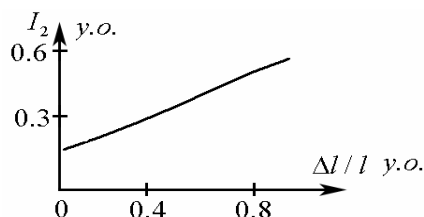


Рис. 10. Залежність ознаки I_2 від відносної довжини тріщини

Поява тріщини призводить до нелінійності системи, яка збільшується з її ростом, при цьому зростає ступінь періодичної нестационарності сигналу. На рис. 9 показана залежність від відносної довжини тріщини потужності детермінованих коливань сигналу. Як бачимо, потужність цих коливань монотонно зростає, при цьому зі збільшенням тріщини збільшується і швидкість цього зростання.

Показана на рис. 10 залежність відношення суми модулів кореляційних компонентів до нульового, тобто ознаки дефектності I_2 [6], дає змогу говорити про зміни характеристик періодичної нестационарності другого порядку. Порівнюючи графіки на рис. 9 і 10 доходимо висновку, що характеристики нестационарності другого порядку є чутливішими до змін довжини

тріщини і з цієї причини ознаки дефектності, сформовані на їхній основі, мають переваги порівняно з тими, що формуються на основі характеристик детермінованої складової сигналу, а також оцінок спектральної густини потужності стаціонарного наближення сигналу, пікові значення якої переважно сформовані цією складовою.

Зауважимо, що ступінь періодичної нестационарності другого порядку вібросигналу зростає з наближенням частоти змушувальної сили до власної частоти бездефектної системи.

Розглянемо тепер, як змінюється з ростом довжини тріщини характер залежності від зсуву кореляційних компонентів сигналу [3]. На рис. 11 для різних відносних довжин тріщин показано графіки оцінок нульового кореляційного компонента $\hat{B}_0(u)$. Значення його в нулі $\hat{B}_0(0)$, що визначають усереднену в часі потужність стохастичної складової вібросигналу, зростають зі збільшенням відносної довжини тріщини $\frac{\Delta l}{l}$. Однак форма корелограм змінюється мало: на них чітко виділяється один і той самий коливний процес. Період зникаючих коливань збігається з періодом змушувальної сили. Проте, оскільки початкові значення $\hat{B}_0(0)$ для різних $\frac{\Delta l}{l}$ дуже відрізняються, то й швидкість зникання кореляцій у цих випадках теж буде різною.

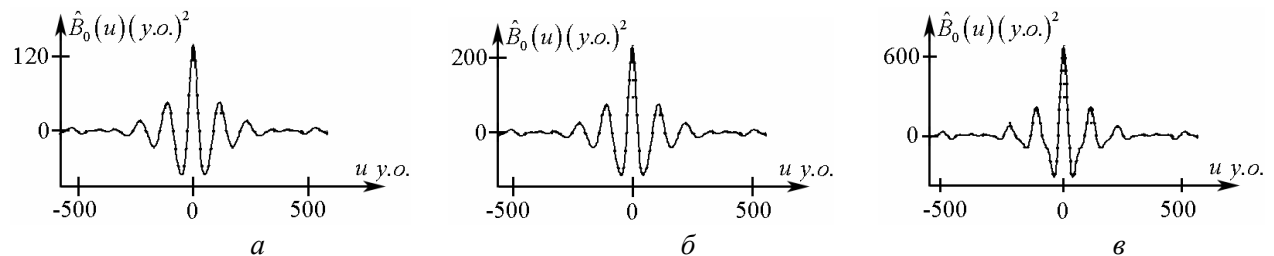


Рис. 11. Оцінка нульового компонента кореляційної функції вібраційного залишку: а – для відносної довжини тріщини $\Delta l / l = 0.1$; б – для відносної довжини тріщини $\Delta l / l = 0.3$; в – для відносної довжини тріщини $\Delta l / l = 0.7$

З ростом тріщини у кореляційній структурі стохастичної складової починають проявлятися вищі компоненти. Як бачимо з рис. 12, за відносної довжини тріщини $\frac{\Delta l}{l} = 0.1$ значення першого кореляційного компонента доволі малі, проте за відносної довжини тріщини $\frac{\Delta l}{l} = 0.3$ чітко вирисовується його структура і з подальшим ростом довжини тріщини величина цього компонента зростає. З ростом $\frac{\Delta l}{l}$ змінюється також характер його залежності від зсуву, зокрема збільшується швидкість його зникання за зсувом.

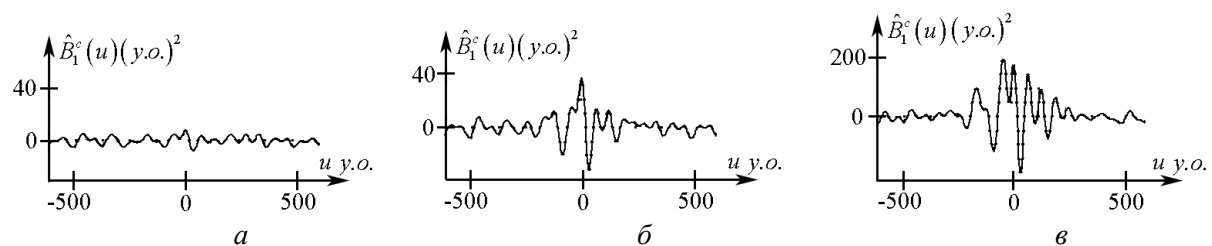


Рис. 12. Оцінка першого косинусного компонента кореляційної функції вібраційного залишку: а – для відносної довжини тріщини $\Delta l / l = 0.1$; б – для відносної довжини тріщини $\Delta l / l = 0.3$; в – для відносної довжини тріщини $\Delta l / l = 0.7$

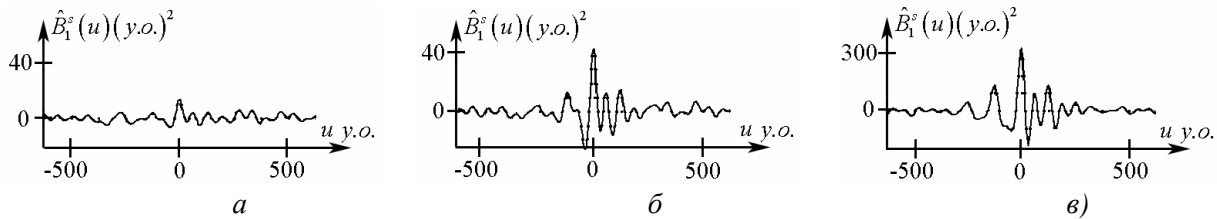


Рис. 13. Оцінка першого синусного компонента кореляційної функції вібраційного залишку: а – для відносної довжини тріщини $\Delta l / l = 0.1$; б – для відносної довжини тріщини $\Delta l / l = 0.3$; в – для відносної довжини тріщини $\Delta l / l = 0.7$

Аналізуючи результати обчислень оцінок нульового і першого кореляційного компонентів, доходимо висновку [4], що апроксимаційні вирази для кореляційних компонентів можуть бути отримані, враховуючи співвідношення:

$$B_0(u) = R_{-1,1}(u)e^{-iw_0u} + R_{1,1}(u)e^{iw_0u},$$

$$B_1(u) = R_{1,0}(u)e^{-iw_0u} + R_{-2,-1}(u)e^{-iw_0u} + R_{-3,-2}(u)e^{-i2w_0u} + R_{1,2}(u)e^{i2w_0u}.$$

Це означає, що вібрації тіла з тріщиною можна описати так:

$$x(t) = \sum_{k=-2}^2 x_k(t)e^{-ikw_0t}. \tag{2}$$

Авто- та взаємкореляційні функції стаціонарних компонентів подані у (2), як впливає з рис. 11 – 13, мають вигляд зникаючих осциляцій і цей ПКВП вузькосмуговим процесом. Тому стаціонарні компоненти $x_k(t)$ можуть бути безпосередньо виділені за допомогою методів смугової фільтрації [8]. Оцінки авто- та взаємкореляційних виділених компонентів показано на рис. 14 – 15.

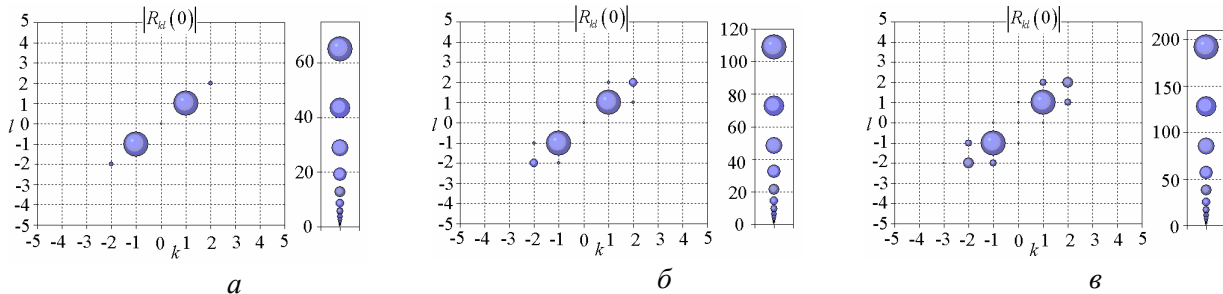


Рис. 14. Оцінка взаємкореляційних функцій стаціонарних компонент випадкової складової вібраційного сигналу за зсуву $u=0$ для відносній довжині тріщини: а – $Dl/l = 0,1$; б – $0,5$; в – $Dl/l = 0,7$

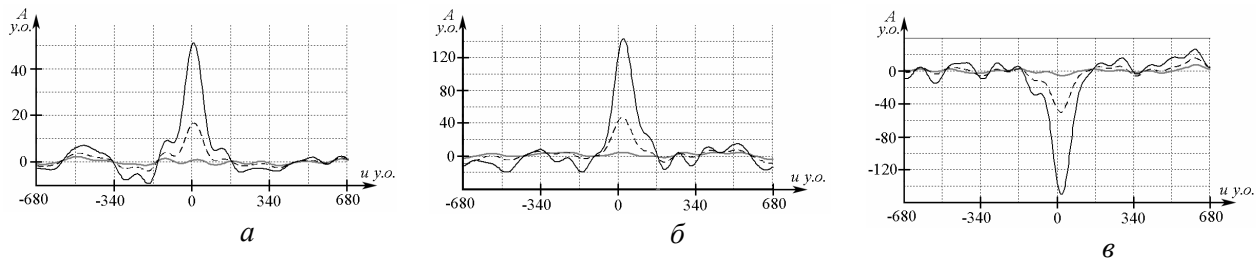


Рис. 15. Оцінки взаємкореляційних функцій нульового та косинусної складової першого компонентів випадкової складової вібраційного сигналу (а), косинусної складової першого та синусної складової другого компонентів (б), синусної складової першого та косинусної складової другого компонентів (в), сіра лінія відповідає відносній довжині тріщини. $Dl/l = 0,1$, штрихова – $Dl/l = 0,5$ та чорна – $Dl/l = 0,7$

Як бачимо, за малої довжини тріщини взаємкореляційні зв'язки фактично відсутні, проте за її збільшення поступово зростають. Власне це й призводить до збільшення рівня нестационарності сигналу. Слід зауважити, що структура авто- та взаємкореляційних функцій не змінюється, а це означає, що модель вібраційного сигналу не залежить від довжини тріщини. З ростом останньої змінюються лише параметри моделі, зокрема і сама величина кореляційних зв'язків. Тому, як діагностичний критерій для виявлення тріщини, слід використовувати ознаки, побудовані на основі величин, що характеризують взаємкореляційні зв'язки між стаціонарними компонентами. Такі ознаки доцільно також будувати на основі взаємспектральних густин стаціонарних компонентів, які можуть бути обчислені за допомогою методу Блекмана-Гьюкі на основі оцінок взаємкореляційних функцій. Графіки оцінок модулів найзначущіших взаємспектральних густин показано на рис. 16 і 17. З ростом останньої змінюються лише параметри моделі, зокрема сама величина кореляційних зв'язків. Тому, як діагностичний критерій для виявлення тріщини, слід використовувати ознаки, побудовані на основі величин, що характеризують взаємкореляційні зв'язки між стаціонарними компонентами.

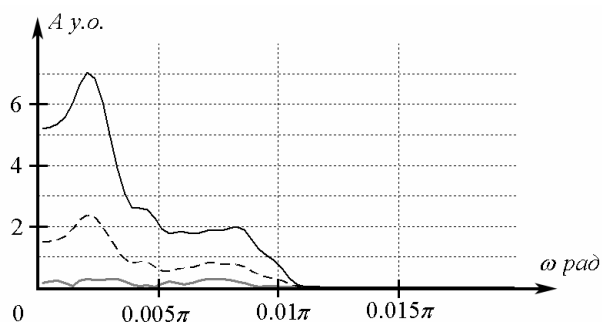


Рис. 16. Оцінки функцій взаємних спектральних густин нульового та косинусної складової першого компонентів випадкової складової вібраційного сигналу, сіра лінія відповідає відносній довжині тріщини $\Delta l / l = 0.1$, штрихова – $\Delta l / l = 0.5$ та чорна – $\Delta l / l = 0.7$

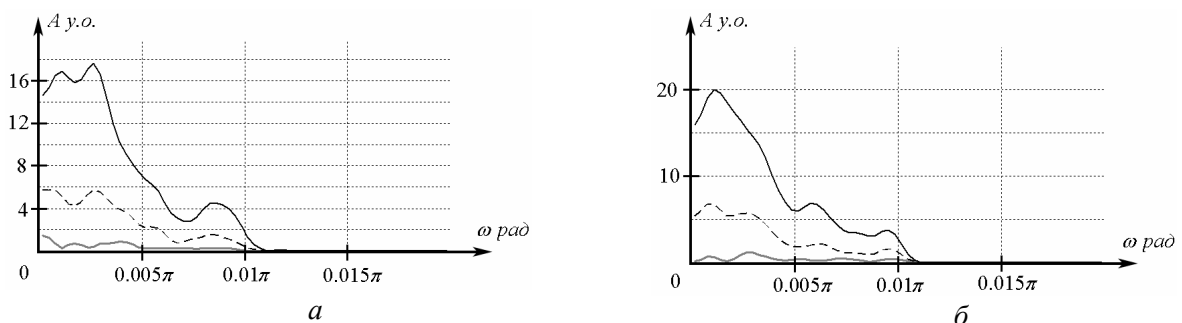


Рис. 17. Оцінки функцій взаємних спектральних густин косинусної складової першого та синусної складової другого компонентів (а) та синусної складової першого та косинусної складової другого компонентів (б) випадкової складової вібраційного сигналу, сіра лінія відповідає відносній довжині тріщини $\Delta l / l = 0.1$, штрихова – $\Delta l / l = 0.5$ та чорна – $\Delta l / l = 0.7$

Як впливає з наведених графіків, незважаючи на дію на тіло з тріщиною білого шуму, ненульові значення цих оцінок зосереджені у вузькій смузі частот, до якої належить і частота детермінованої складової змушувальної сили. Ширина смуги мало змінюється з ростом довжини тріщини. Незначно також змінюється і сама форма оцінок спектральних густин. Збільшення

довжини тріщини істотно змінює самі величини модулів оцінок взаємоспектральних густин. Тому діагностичні критерії для виявлення розвитку тріщини доцільно вибирати, враховуючи саме ці виявлені властивості. У найпростішому випадку за діагностичні ознаки можуть бути вибрані площі під графіком модулів взаємоспектральних густин стаціонарних компонентів.

1. Гельман Л.М., Горпинич С.В. *Неразрушающий контроль трещин на основе декремента затухания свободных колебаний изделий // Техническая диагностика и неразрушающий контроль.* – 1998. – № 4. – С. 20–25. 2. Gelman L. and Gorpinich S. *Nonlinear Vibroacoustical Free Oscillation Method for Crack Detection and Evaluation // Mechanical System and Signal Processing.* – 2000. – 14 (3). – P. 343–351. 3. Мацько І.Й., Кравець І.Б., Яворський І.М., Засць В.М. *Модель вібраційного відгуку від тіла з тріщиною // Відбір і обробка інформації.* – Львів, 2009. – № 30 (106). – С. 12–22. 4. Мацько І.Й., Кравець І.Б., Юзефович Р.М., Яворський І.М. *Вплив розміру тріщини на кореляційну структуру вібраційного сигналу // Відбір і обробка інформації.* – Львів, 2009. – № 31 (107). – С. 18–25. 5. Мацько І.Й., Кравець І.Б., Яворський І.М. *Спектральні властивості вібраційного сигналу деталі з тріщиною // Відбір і обробка інформації.* – Львів, 2010. – № 32 (108). – С. 26–34. 6. Мацько І.Й., Кравець І.Б., Яворський І.М. *Дослідження структури вібраційних сигналів механічних систем під час розвитку дефекту // Фізико-хімічна механіка матеріалів.* – 2010. – № 1. – С. 29–36.