

Integration of MSC.Nastran and AFGROW to design reinforcement for fatigue life extension, Singapore – <http://www.mssoftware.com/events/aero2002/partner/pdf/p10901.pdf>. 12. Харченко Є.В., Собковскі С., Носов Ю.Є. Вплив податливості муфти привідного механізму на динаміку підіймального пристрою // Український міжвідомчий науково-технічний збірник “Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні”. – 2009. – №43. – С. 80–87. 13. Harter J.A. AFGROW User Guide and Technical Manual, USA, 2008. – <http://www.afgrow.net/downloads/ddownload.aspx>.

УДК 624.0

Ф.Л. ШЕВЧЕНКО, С.Н. ЦАРЕНКО

Донецький національний технічний університет

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ УПРОЩЕННОГО ДИНАМИЧЕСКОГО РАСЧЕТА СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ПРИМЕРЕ ОДНОПРОЛЕТНОЙ ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННОЙ БАЛКИ С КОНСОЛЬЮ

© Шевченко Ф.Л., Царенко С.Н., 2011

Розглядається спрощений динамічний розрахунок однопрольотних балок з консолюю, оснований на заміщенні заданої системи з розподіленими параметрами невагомою балкою з одною масою за умовою рівності частоти основного тону коливань і частоти еквівалентної балки.

There are many methods of the approached dynamic calculation of systems with the distributed parametres the most part from which is based on replacement of the valid elastic system with the distributed parametres the simplified system with one degree of freedom on the basis of equality of their frequencies. The purpose of present article is distribution of it before the offered simplified method on single-slope beams with the console, if information about the exact calculation of spectrum of eigenfrequencies not led in referenced literature.

Введение. Динамический расчет упругих систем с распределенными параметрами при наличии, кроме распределенных масс, еще сосредоточенных масс, активных нагрузок, изменений геометрических параметров и других факторов, определяющих несколько участков балки, оказывается весьма громоздким, требующим предварительных математических преобразований и трудоемких вычислений. С целью упрощения таких задач для инженерной практики разработаны различные приближенные расчеты, основанные главным образом на замене заданной упругой системы расчетной схемой системы с одной степенью свободы, т.е. системой с одной приведенной массой [1]. Точность таких расчетов зависит от удачной аппроксимации уравнения изогнутой оси балки, которое определяется статическим расчетом упругой системы с достаточно удачными граничными условиями, что не всегда возможно выполнить. Даже в однопролетных балках с комбинированными граничными условиями найти удачное уравнение изогнутой оси бывает затруднительно. Однако в настоящее время такой путь замены системы с распределенными параметрами системой с одной степенью свободы оказывается не оправданным. Ведь спектр частот

собственных колебаний для однопролетных балок приводится в многочисленной учебной и справочной литературе, а при отсутствии таких источников решить задачу о спектре собственных частотах весьма просто на основании известного уравнения изогнутой оси балки в динамических расчетах [1–3].

Основанный на известных значениях спектра собственных колебаний упрощенный расчет представлен в публикациях [4–7]. В настоящей статье приводится распространение этого упрощенного способа на балки с консолями. Предложенный способ упрощенного динамического расчета систем с распределенными параметрами имеет академическое и прикладное значение: он может быть использован в курсе сопротивления материалов при изложении раздела динамики упругих стержневых систем, а также применен в инженерной практике в динамических расчетах различных конструкций, содержащих системы с распределенными параметрами.

Изложение основного материала, предложенного упрощенного расчета систем с распределенными параметрами. Известно [1], что динамическое напряженно-деформированное состояние балок с распределенными параметрами в точной постановке описывается дифференциальным уравнением четвертого порядка в частных производных

$$EJ \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = q(x,t), \quad (1)$$

решение которого можно представить в гиперболо-тригонометрических функциях

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \operatorname{ch} k_i x + B_i \operatorname{sh} k_i x + C_i \cos k_i x + D_i \sin k_i x) \sin(\omega_i t + \mu_i), \quad (2)$$

где: i – номер гармоники колебаний с частотой ω_i , μ_i – начальная фаза гармоник.

Из граничных условий и условий закрепления балки на опорах можно найти волновые числа k_i , а затем вычислить спектр частот собственных колебаний

$$\omega_i = \frac{\lambda_i^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} \quad (3)$$

при заданной жесткости балки EJ и погонной массе m .



На основании уравнения изогнутой оси балки

$$y(x) = A \operatorname{ch} kx + B \operatorname{sh} kx + C \cos kx + D \sin kx \quad (4)$$




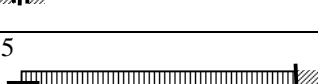
расчет однопролетной балки на собственные колебания при рассмотрении условий на опорах сводится к системе однородных уравнений, определитель которой приводит к трансцендентному уравнению, а его собственные числа $\lambda_i = k_i l$ приводятся в учебной и справочной литературе, см. табл. 1 [2–4].

Таблица 1

Частотные уравнения и коэффициенты приведения массы балок

Схема балки	Частотное уравнение	Первый корень λ	Коэффициенты приведения массы балки ξ
1	2	3	4
	$\sin \lambda = 0$	π	$\frac{3}{\pi^4} \frac{1}{\alpha^2 (1-\alpha)^2}$
	$\operatorname{ch} \lambda \cdot \cos \lambda + 1 = 0$	1,875	$\frac{3}{1,875^4} \frac{1}{(1-\alpha)^3}$

Продовження табл. 1

1	2	3	4
	$\text{ch}\lambda \cdot \cos\lambda - 1 = 0$	4,730	$\frac{3}{4,73^4} \frac{1}{\alpha^3(1-\alpha)^3}$
	$\text{tg}\lambda = \text{th}\lambda$	3,927	$\frac{12}{3,927^4} \frac{1}{\alpha^2(1-\alpha)^2(3-2\alpha-\alpha^3)}$
	$\cos\lambda = 0$	$\pi/2$	$\frac{48}{\pi^4} \frac{1}{(1-\alpha)(1+\alpha-2\alpha^2)}$
	$\text{tg}\lambda + \text{th}\lambda = 0$	2,365	$\frac{12}{2,365^4} \frac{1}{(1-\alpha)^2(1+2\alpha-3\alpha^2)}$

Располагая этими сведениями, нет необходимости пользоваться различными приближенными способами нахождения частоты первого тона колебаний [1], которые затруднительно использовать при смешанных опорных условиях, а неудачные аппроксимирующие уравнения изогнутой оси балок приводят к большим погрешностям.

В этом случае для любой однопролетной балки с распределенными параметрами эквивалентную балку можно легко получить приравниванием частоты основного тона колебаний системы с распределенными параметрами (3) и эквивалентной балки с одной степенью свободы

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} M_{\text{пр}}}}. \text{ Из этого равенства находится коэффициент приведения распределенной массы [2, 3]}$$

$$\xi = \frac{l^3}{\lambda^4 EJ \delta_{11}}. \tag{5}$$

Единичное перемещение δ_{11} (прогиб в сечении, куда приводится масса) в каждом конкретном случае при статическом нагружении единичной силой можно найти из уравнения изогнутой оси балки или по правилу Верещагина. В случае сосредоточенных масс такой способ приводит к известному способу переноса масс (способ Донкерли) когда

$$\xi = \sum M_i \frac{\delta_{ii}}{\delta_{11}}. \tag{6}$$

В представленной статье приводится распространение этого упрощенного способа на однопролетные балки с консолью. Для таких балок с распределенными параметрами готовых решений нет, а использование уравнения (1) становится затруднительным в связи с наличием двух участков балки. В этом случае при наличии нескольких участков балки более удобно вместо (1) пользоваться уравнением изогнутой оси балки в начальных параметрах, применяя динамические функции Крылова [1, 4]

$$y(x) = y_0 A_{kx} + \frac{y'_0}{k} B_{kx} + \frac{M_0}{k^2 EJ_z} C_{kx} + \frac{P_0}{k^3 EJ_z} D_{kx}. \tag{7}$$

Для компенсации отсутствия справочных данных о частотах колебаний балок с консолью, а также для оценки точности предложенного упрощенного способа динамического расчета балок с распределенными параметрами, рассмотрим точный расчет балки с распределенной массой и двумя

сосредоточенными массами (рис. 1) при загрузке гармонической возмущающей силой $P(t)P \sin \theta t$ в начале координат ($m = 400$ кг/м $M = 300$ кг, $EJ = 5 \cdot 10^6$ Нм², $\theta = 12$ 1/с).

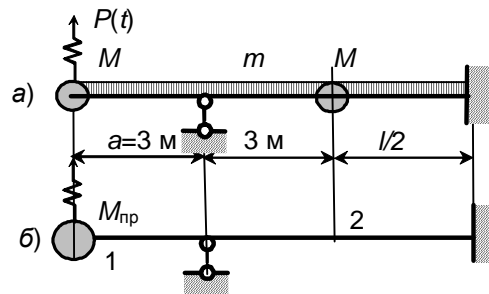


Рис. 1. Расчетная схема балки с распределенными параметрами при жестком закреплении

В этом конкретном случае уравнение (7) принимает вид

$$y(x) = y_0 A_{kx} + \frac{y'_0}{k} B_{kx} + \frac{P_1}{k^3 EJ_z} D_{kx} + \frac{P}{k^3 EJ_z} D_{kx} + \frac{R}{k^3 EJ_z} D_{k(x-a)} + \frac{P_2}{k^3 EJ_z} D_{k(x-2a)}.$$

Здесь: P – амплитудное значение возмущающей силы, а P_i – силы инерции сосредоточенных масс:

$$P_1 = -M_1 \ddot{y}_1(0) = M_1 \omega^2 y_0 = M_1 \frac{k^4 EJ}{m} \cdot y_0 = M_1 \frac{k^3 EJ \cdot kL}{m \cdot L} \cdot y_0 = \xi \lambda k^3 EJ \cdot y_0,$$

$$P_2 = -M_2 \ddot{y}_2(2a) = \xi \lambda k^3 EJ \cdot y_2(2a), \quad \xi = \frac{M}{mL}, \quad \lambda = kL.$$

С учетом этих сил уравнение изогнутой оси балки примет вид:

$$y(x) = y_0 (A_{kx} + \xi \lambda D_{kx}) + \frac{y'_0}{k} B_{kx} + \frac{P}{k^3 EJ} D_{kx} + \frac{R}{k^3 EJ} D_{k(x-a)} + \xi \lambda y_2 D_{k(x-2a)}.$$

Подставим сюда прогиб в точке приложения второй массы

$$y_2(2a) = y_0 (A_{2ka} + \xi \lambda D_{2ka}) + \frac{y'_0}{k} B_{2ka} + \frac{P}{k^3 EJ} D_{2ka} + \frac{R}{k^3 EJ} D_{ka}.$$

Так получаем уравнение изогнутой оси балки на третьем участке

$$y(x) = y_0 [A_{kx} + \xi \lambda D_{kx} + \xi \lambda (A_{2ka} + \xi \lambda D_{2ka}) D_{k(x-2a)}] + \frac{y'_0}{k} (B_{kx} + \xi \lambda B_{2a} D_{k(x-2a)}) + \frac{R}{k^3 EJ} [D_{k(x-a)} + \xi \lambda D_{ka} D_{k(x-2a)}] + \frac{P}{k^3 EJ} [D_{kx} + \xi \lambda D_{2ka} D_{k(x-2a)}].$$

Для сокращения количества неизвестных используем условие на подвижной опоре, при $x = a$ $y = 0$

$$y_0 (A_{ka} + \xi \lambda D_{ka}) + \frac{y'_0}{k} B_{ka} + \frac{P}{k^3 EJ} D_{ka} = 0.$$

Отсюда находим

$$y_0 = -\frac{y'_0}{k} \frac{B_{ka}}{A_{ka} + \xi \lambda D_{ka}} - \frac{P}{k^3 EJ} \frac{D_{ka}}{A_{ka} + \xi \lambda D_{ka}} = -\frac{y'_0}{k} \cdot \alpha - \frac{P}{k^3 EJ} \cdot \beta \quad (8)$$

и подставляем в предыдущее уравнение, в котором теперь будет лишь два неизвестных параметра,

$$y(x) = -\frac{y'_0}{k} \left\{ \alpha [A_{kx} + \xi \lambda D_{kx} + \xi \lambda (A_{2ka} + \xi \lambda D_{2ka}) D_{k(x-2a)}] - (B_{kx} + \xi \lambda B_{2a} D_{k(x-2a)}) \right\} + \frac{R}{k^3 EJ} [D_{k(x-a)} + \xi \lambda D_{ka} D_{k(x-2a)}] + \quad (9)$$

$$+ \frac{P}{k^3 EJ} \left\{ [D_{kx} + \xi \lambda D_{2ka} D_{k(x-2a)}] - \beta [A_{kx} + \xi \lambda D_{kx} + \xi \lambda (A_{2ka} + \xi \lambda D_{2ka}) D_{k(x-2a)}] \right\}$$

Отсюда дифференцированием находим уравнение углов поворота

$$y'(x) = -y'_0 \left\{ \alpha \cdot [D_{kx} + \xi \lambda C_{kx} + \xi \lambda (A_{2ka} + \xi \lambda D_{2ka}) C_{k(x-2a)}] - (A_{kx} + \xi \lambda B_{2a} C_{k(x-2a)}) \right\} + \\ + \frac{R}{k^2 EJ} [C_{k(x-a)} + \xi \lambda D_{ka} C_{k(x-2a)}] + \\ + \frac{P}{k^2 EJ} \left\{ [C_{kx} + \xi \lambda D_{2ka} C_{k(x-2a)}] - \beta [D_{kx} + \xi \lambda C_{kx} + \xi \lambda (A_{2ka} + \xi \lambda D_{2ka}) C_{k(x-2a)}] \right\} \quad (10)$$

и изгибающих моментов $M(x) = EJy''(x)$

$$M(x) = -EJy'_0 \left\{ \alpha \cdot [C_{kx} + \xi \lambda B_{kx} + \xi \lambda (A_{2ka} + \xi \lambda D_{2ka}) B_{k(x-2a)}] - (D_{kx} + \xi \lambda B_{2a} B_{k(x-2a)}) \right\} + \\ + \frac{R}{k} [B_{k(x-a)} + \xi \lambda D_{ka} B_{k(x-2a)}] + \\ + \frac{P}{k} \left\{ [B_{kx} + \xi \lambda D_{2ka} B_{k(x-2a)}] - \beta [C_{kx} + \xi \lambda B_{kx} + \xi \lambda (A_{2ka} + \xi \lambda D_{2ka}) B_{k(x-2a)}] \right\}. \quad (11)$$

Обозначив в этих уравнениях коэффициенты, приведенные в скобках при неизвестных начальных параметрах y'_0 , R и заданной нагрузке P , через $X_i(x)$ и $Y_i(k)$ соответственно, из условий защемления на правой опоре при $x=3a$ $y(3a)=0$ и $y'(3a)=0$, получим систему двух уравнений

$$\frac{y'_0}{k} \cdot X_1(k) - \frac{R}{k^3 EJ} X_2(k) = \frac{P}{k^3 EJ} X_3(k), \quad \frac{y'_0}{k} \cdot Y_1(k) - \frac{R}{k^3 EJ} Y_2(k) = \frac{P}{k^3 EJ} Y_3(k)$$

откуда находим начальные параметры:

$$\frac{y'_0}{k} = \frac{PL^3}{\lambda^3 EJ} \cdot \frac{X_3(k) \cdot Y_2(k) - X_2(k) \cdot Y_3(k)}{X_1(k) \cdot Y_2(k) - X_2(k) \cdot Y_1(k)}, \quad (12)$$

$$R = -P \cdot \frac{X_1(k) \cdot Y_3(k) - X_3(k) \cdot Y_1(k)}{X_1(k) \cdot Y_2(k) - X_2(k) \cdot Y_1(k)}, \quad (13)$$

При вынужденных колебаниях от гармонической силы с заданной циклической частотой возмущения θ волновые числа известны $k(\theta) = 4 \sqrt{\frac{m\theta^2}{EJ}}$, что позволяет найти функции Крылова, входящие в расчетные формулы (12)-(13), и вычислить начальные параметры.

Если знаменатель формул (12), (13) приравнять нулю при замене частоты возмущения θ на частоту собственных колебаний ω , то получим частотное уравнение

$$X_1(k) \cdot Y_2(k) - X_2(k) \cdot Y_1(k) = 0, \quad (14)$$

из которого можно найти волновые числа и, следовательно, вычислить спектр частот собственных колебаний балки с защемлением на правой опоре

$$\left\{ \alpha [A_{3ka} + \xi \lambda D_{3k} + \xi \lambda (A_{2ka} + \xi \lambda D_{2ka}) D_{ka}] - (B_{3ka} + \xi \lambda B_{2ka} D_{ka}) \right\} \cdot (C_{2ka} + \xi \lambda D_{ka} C_{ka}) - \\ - \left\{ \alpha [D_{3kx} + \xi \lambda C_{3kx} + \xi \lambda (A_{2ka} + \xi \lambda D_{2ka}) C_{ka}] - (A_{3kx} + \xi \lambda B_{2a} C_{ka}) \right\} \cdot (D_{2ka} + \xi \lambda D_{ka} D_{ka}) = 0. \quad (15)$$

Отсюда легко можно получить частный случай частотного уравнения (15) для балки с распределенной массой (без сосредоточенных масс) при защемлении на правой опоре, если положить $\xi = 0$, рис. 1, а

$$(\alpha A_{3ka} - B_{3ka}) \cdot C_{2ka} - (\alpha D_{3ka} - A_{3ka}) \cdot B_{2ka} = 0 \quad (16)$$

Для случая шарнирного опирания на правой опоре (рис. 2, а) из условий $y(L)=0$ и $M(L)=0$ вместо частотного уравнения (16) получим аналогичное трансцендентное уравнение (17)

$$(\alpha A_{3ka} - B_{3ka}) \cdot B_{2ka} - (\alpha C_{3ka} - D_{3ka}) \cdot D_{2ka} = 0 \tag{17}$$

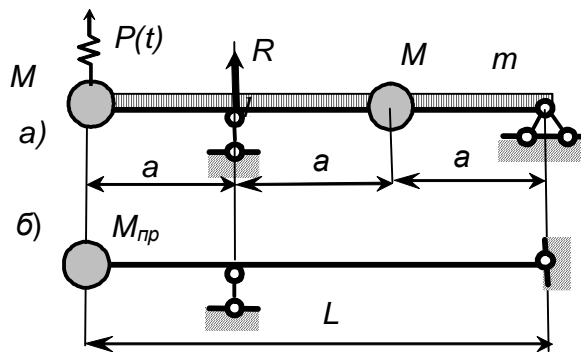


Рис. 2. Расчетная схема балки с распределенными параметрами при шарнирном закреплении

На основании этих уравнений решены задачи по нахождению собственных чисел, первые из которых определяют основную форму колебаний. Значения этих корней приведены на графиках рис. 3. Значения λ , отмеченные на графике, соответствуют: шарнирно закрепленной балке $\lambda(0) = \pi$ и консоли $\lambda(0) = 1,875$ (в варианте а) и шарнирной опоре и свободном крае слева и защемлении справа (в варианте б).

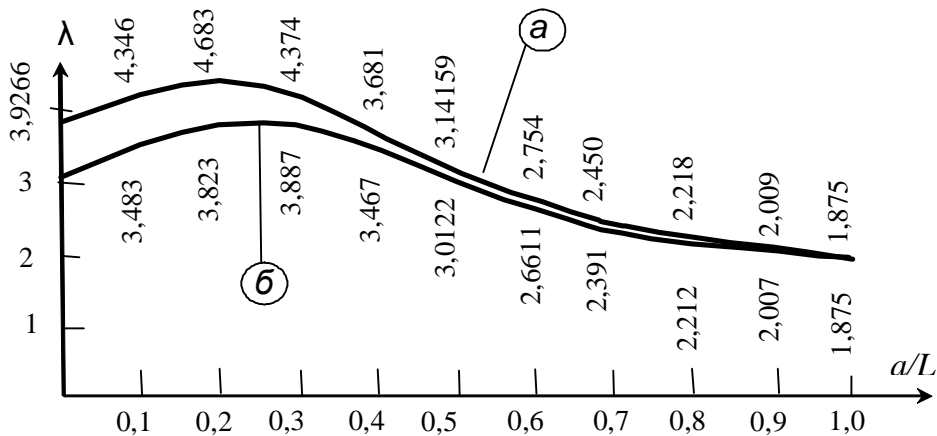


Рис. 3. Собственные числа трансцендентных уравнений (16), (17)

Вместо графиков можно пользоваться уравнениями регрессии: для балки схемы а)

$$\lambda(a/L) = \pi + 0,713 \cdot \sin \frac{2\pi x}{L} \text{ при } x = \frac{a}{L} \leq 0,5, \tag{18}$$

$$\lambda(a/L) = 4,716 \cdot e^{-0,98x/L} \text{ при } x = \frac{a}{L} \geq 0,5; \tag{19}$$

для балки схемы б)

$$\lambda(a/L) = 3,9266 + 0,32 \cdot x + 0,7 \cdot \sin \frac{\pi x}{0,35L} \text{ при } x = \frac{a}{L} \leq 0,35, \tag{20}$$

$$\lambda(a/L) = 5,55 \cdot e^{-1,12x/L} \text{ при } x = \frac{a}{L} \geq 0,35. \tag{21}$$

Зная первый корень частотного уравнения λ , по формуле (5) можно найти коэффициент приведения распределенной массы при замене балки с распределенными параметрами эквивалентной балкой с одной приведенной массой.

После преобразования однопролетной балки с консолью, как системы с распределенными параметрами, в геометрически аналогичную балку с одной приведенной массой, легко решаются задачи на воздействие гармонической силы $P(t) = P \sin \omega t$ или в случае удара неупругого груза, падающего с заданной высоты h . В первом случае вычисляется коэффициент нарастания колебаний $\nu = \frac{1}{1 - (\theta/\omega)^2}$, а во втором - динамический коэффициент равен $k_\theta = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f} \eta}$. На эти коэффициенты нужно умножать квазистатические расчетные факторы, чтобы получить динамический эффект возмущения.

В качестве конкретного примера рассмотрим жестко защемленную балку с подвижной опорой, рис. 1, а.

Заменяем заданную балку невесомой с одной сосредоточенной массой $M_{пр}$, приведенной к месту воздействия гармонической силы, рис. 1, б.

Единичные коэффициенты δ_{11} и δ_{22} вычислим по правилу Верещагина на основании эпюр (рис. 4):

$$EJ\delta_{11} = \frac{2L}{3 \cdot 3} \left[\frac{L}{3} \cdot \frac{L}{3 \cdot 2} + \frac{L}{2} \left(\frac{2L}{3} \cdot \frac{L}{3} - \frac{1L}{3} \cdot \frac{L}{6} \right) \right] = \frac{5}{162} \frac{PL^3}{EJ} = \frac{1}{32,4} \frac{PL^3}{EJ},$$

$$EJ\delta_{22} = \frac{l^3}{48} - \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{3}{32} = \frac{7 \cdot l^3}{762} = \frac{7 \cdot l^3}{762} = \frac{7}{762} \left(\frac{2}{3} L \right)^3 = \frac{L^3}{370,28}.$$

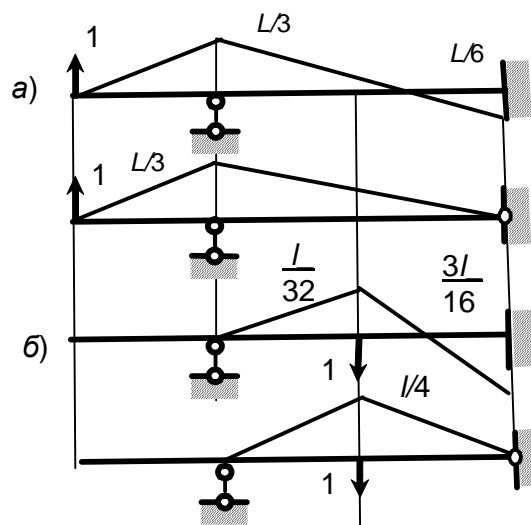


Рис. 4. Единичные эпюры вычисления перемещений по правилу Верещагина

При заданном отношении $\frac{a}{L} = \frac{1}{3}$ из таблицы 2 по линейной интерполяции находим значение первого корня частотного уравнения заданной балки с распределенными параметрами $\lambda\left(\frac{1}{3}\right) = 4,1297$ или, используя формулу (18), находим при $x = 1/3$

$$\lambda\left(\frac{1}{3}\right) = 3,9266 + 0,33 \cdot x + 0,7 \cdot \sin \frac{\pi x}{0,35L} = 4,140.$$

Следовательно, приближенное значение частоты основного тона колебаний заданной балки при отсутствии сосредоточенных масс будет

$$\omega = \frac{\lambda^2}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = \frac{4,14^2}{9^2} \sqrt{\frac{5 \cdot 10^6}{400}} = 23,610 \text{ 1/с.}$$

Коэффициент приведения распределенной массы (5)

$$\xi = \frac{L^3}{\lambda^4 EJ \delta_{11}} = \frac{32,4}{4,14^4} = 0,11029.$$

С учетом приведения сосредоточенных масс получаем суммарную приведенную массу

$$M_{np} = mL\xi + M \left(1 + \frac{\delta_{22}}{\delta_{11}} \right) = 400 \cdot 9 \cdot 0,11029 + 300 \left(1 + \frac{32,4}{370,28} \right) = 723,29 \text{ кг.}$$

Приближенное значение частоты первого тона колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} M_{np}}} = \sqrt{\frac{32,4 \cdot EJ}{L^3 \cdot M_{np}}} = \sqrt{\frac{32,4 \cdot 5 \cdot 10^6}{9^3 \cdot 723,29}} = 17,528 \text{ 1/с.}$$

Теперь можно вычислить коэффициент нарастания колебаний $v = \frac{1}{1 - (\theta/\omega)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{12}{17,528} \right)^2} = 1,8821$, на который умножаются расчетные силовые и

деформационные факторы квазистатического нагружения.

Так, динамический прогиб на конце консоли будет равен

$$y_d = y_{ст} \cdot v = \delta_{11} P v = \frac{PL^3}{32,4 EJ} v = \frac{1,8821}{32,4} \cdot \frac{PL^3}{EJ} = 0,05808 \frac{PL^3}{EJ}.$$

Для оценки погрешности предложенного упрощенного расчета рассмотрим точное решение для прогиба в начале координат, представленное формулой (8).

Для этого по заданной частоте возмущения $\theta = 12$ рад/с находим волновое число

$$k(\theta) = \sqrt[4]{\frac{m\theta^2}{EJ}} = \sqrt[4]{\frac{400 \cdot 12^2}{5 \cdot 10^6}} = 0,327614 \text{ и аргумент динамических функций Крылова } \lambda(\theta) = kx.$$

Вычисление начальных параметров (10), (11) с использованием сочетания функций Крылова, входящих в эти формулы, приводит к следующим значениям начальных параметров:

$$\frac{y'_0}{k} = -1,72992 \frac{PL^3}{\lambda^3 EJ}, \quad R = -3,22581 \frac{PL^3}{EJ}, \quad \alpha = 0,94163, \quad \beta = 0,15059. \quad (22)$$

На основании зависимости (8) находим прогиб в начале координат (на торце консоли)

$$y_0 = -\frac{y'_0}{k} \cdot \alpha - \frac{P}{k^3 EJ} \cdot \beta = \frac{PL^3}{\lambda^3 EJ} (1,72992 \cdot 0,94163 - 0,15059) = \frac{1,47835}{2,94853^3} \frac{PL^3}{EJ} = 0,05767 \frac{PL^3}{EJ},$$

что отличается от приближенного значения прогиба y_d на 0,7%.

Заметим, что точное значение частоты первого тона колебаний балки без сосредоточенных масс, вычисленное из частотного уравнения (12) определяется его корнем $\lambda(\omega) = 4,14$, т.е.

$$\omega = \frac{\lambda^2(\omega)}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = \frac{4,14^2}{9^2} \sqrt{\frac{5 \cdot 10^6}{400}} = 23,657 \text{ рад/с,}$$

что отличается от приближенного значения лишь на 0,2%.

В этом легко убедиться на основании уравнения (12), подставляя соответствующие функции Крылова.

Сравним значения расчетного динамического изгибающего момента на подвижной опоре, при $x = a = L/3 = 3$ м.

В точном решении на основании уравнения (11) получаем:

$$M(a) = -EJ \cdot k \cdot y_0' [\alpha(C_{ka} + \xi \lambda B_{ka}) - D_{ka}] + \frac{P}{k} [B_{ka} - \beta(C_{ka} + \xi \lambda B_{ka})].$$

Подставляя сюда значения угла поворота в начале координат y_0' и коэффициенты α и β (8), получаем расчетную формулу динамического изгибающего момента на подвижной опоре

$$M(a) = \frac{PL}{\lambda} \{1,72992 \cdot [0,94163 \cdot (0,48424 + 0,08333 \cdot 2,94853 \cdot 0,99049) - 0,1584]\} + \\ + \frac{PL}{\lambda} [0,990499 - 0,15059 \cdot (0,48424 + 0,08333 \cdot 2,94853 \cdot 0,99049)] = 1,7921 \frac{PL}{\lambda} = 1,8182Pa.$$

Приближенное значение изгибающего момента на подвижной опоре по схеме (рис. 1, б) вычисляется как квазистатический момент возмущающей силы и силы инерции приведенной массы, умноженные на коэффициент нарастания колебаний, $M(a) = (P + P_{и})a$. Сила инерции приведенной массы $P_{и} = M_{np} \theta^2 y_0 = M_{np} \theta^2 \delta_{11} P v$, а с учетом $M_{np} = \frac{1}{\delta_{11} \omega^2}$ и обозначении $\delta = \frac{\theta}{\omega}$,

получим $P_{и} = \frac{1}{\delta_{11} \omega^2} \theta^2 \delta_{11} P v = P \delta^2 v$. Вместе с амплитудным значением возмущающей силы полу-

чим изгибающий момент на опоре $M(a) = (P + P_{и})a = Pa(1 + \delta^2 v) = Pa \left(1 + \frac{\delta^2}{1 - \delta^2}\right) = P a v = 1,882Pa$,

что отличается от точного значения на 2,7 %.

При необходимости вычисления приближенного значения изгибающего момента посередине пролета балки в упрощенном расчете нужно принять однопролетную жестко защемленную балку с шарнирной подвижной опорой, рис. 4,б, и всю массу заданной балки (рис. 1, а) привести к сечению, где приложена вторая масса.

Выводы. На основании представленных примеров выше приведенных расчетов балок с распределенными параметрами при наличии консоли можно рекомендовать упрощенный динамический расчет балки с одной приведенной массой.

1. Киселев В.И. Строительная механика. Специальный курс. Колебания и устойчивость сооружений. – М.: Изд. лит. по стр. инж., 1964. – 332 с. 2. Прочность. Устойчивость. Колебания: Справочник в 3-х томах // Под общ. ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – 567 с. 3. Шевченко Ф.Л. Будівельна механіка. Спеціальний курс. Динаміка пружних стержневих систем. – Донецьк, РІА ДонНТУ, 2000. – 292 с. 4. Шевченко Ф.Л. // Наукові праці ДонНТУ. Серія: “Машинобудування і машинознавство”. Вип. 5(139). – Донецьк, 2008. – С. 166–179. 5. Шевченко Ф.Л., Царенко С.Н. Задачі з опору матеріалів. – Донецьк, ФОП Бабалік А.В., 2011. – 356 с. 6. Шевченко Ф.Л. Упрощенный динамический расчет стержневых систем с распределенными параметрами. Автоматизация производных процессов у машиностроении та приладобудуванні. Український міжвідомчий науково-технічний збірник. Львів, 2006. – С. 278–286. 7. Шевченко Ф.Л. Упрощенный динамический расчет балок с распределенными параметрами при наличии сосредоточенных масс // Вибрації в техніці та технологіях. – Днепропетровск, 2007. – №4(36). – С. 24–28.