

В.С. ЛОВЕЙКІН, Ю.В. ЧОВНЮК, Л.А. ДЯЧЕНКО

Національний університет біоресурсів і природокористування України

ІДЕНТИФІКАЦІЯ МЕХАНІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ГРУНТІВ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКОГО ПРИЗНАЧЕННЯ ШЛЯХОМ ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАНЬ ЇХ ЗРАЗКІВ

© Ловейкін В.С., Човнюк Ю.В., Дяченко Л.А., 2011

Наведено методику визначення (ідентифікації) механічних властивостей ґрунтів сільськогосподарського призначення шляхом дослідження коливань їх зразків.

The method of definition of mechanical properties of agricultural soils with the help of measurements of their samples' oscillations is described.

Постановка проблеми. У багатьох процесах сільськогосподарського виробництва, що пов'язані зі взаємодією робочих органів машин (зокрема, ґрунтообробних) з матеріалами та середовищами (ґрунтами), виникає необхідність визначення механічних властивостей останніх. Ці механічні властивості значно впливають на умови руйнування зазначених матеріалів та середовищ. Зокрема, під час оброблення (розпушування, віброущільнення) ґрунтів сільськогосподарського призначення (ГСП) важливе значення мають їх механічні властивості та амплітудно-частотні характеристики вільних коливань.

Аналіз останніх публікацій за темою дослідження. Визначенню механічних властивостей матеріалів шляхом дослідження коливань їх зразків присвячено роботи [1–4]. При цьому автори вказаних робіт визначають зв'язки геометричних параметрів зразків матеріалів/середовищ (момент інерції, площа перерізу, довжина) з пружними та в'язкими властивостями (E – модуль пружності, μ – коефіцієнт в'язкості) та масою вимірювального датчика (зосереджена маса m). Як правило, вказані дослідження проводяться у межах моделей оброблювальних матеріалів/середовищ як систем із зосередженими параметрами, а тому не враховуються їх континуальні властивості (зокрема, можливість розповсюдження хвилеутворень, ударних хвиль тощо), притаманні масивним зразкам (цих матеріалів/середовищ) з розміщеними на їх поверхні вимірювальними датчиками. На думку авторів цієї статті, актуальними й необхідними є подальші уточнення і вдосконалення існуючих інженерних методів ідентифікації механічних властивостей ГСП у межах моделей систем дискретно-континуального типу. Такий підхід дає змогу розв'язувати ширше коло практичних задач ідентифікації механічних властивостей ГСП на основі обробки результатів вимірювань послідовних амплітуд коливань зразків (матеріалів) у межах моделей стрижнів зі складними реологічними характеристиками.

Мета роботи полягає у встановленні основних пружних (в'язко-пружних) властивостей матеріалів (ГСП) на основі обробки результатів вимірювань послідовних амплітуд їх коливань у межах моделей в'язко-пружних стрижнів з дискретно-континуальними параметрами та величини приєднаної маси (ГСП), що враховує ефекти можливих хвилеутворень (поздовжнього типу) у зразках ГСП.

Слід зазначити, що у цій роботі використано підхід автора [5] та його основні результати.

Виклад основного змісту дослідження. Фізико-механічна модель розповсюдження вібрації у лінійному в'язко-пружному стрижні.

Розглянемо напівнескінчений стрижень (модель зразка ГСП) $X > 0$. рівняння поздовжніх коливань стрижня має вид:

$$Q' - m \cdot \ddot{u} = 0, \quad (1)$$

де Q – розтягуюче зусилля у перерізі з координатою X ; u – переміщення цього перерізу вздовж осі Ox ; m – маса одиниці довжини стрижня ($m = \rho \cdot S$, ρ – щільність ГСП; S – площа поперечного перерізу стрижня, яка збігається з площею контакту ($S = S_k$) поверхневого датчика маси M , встановленого на поверхні стрижня $X = 0$); точками позначене диференціювання за часом t , а штрихами – за просторовою координатою X .

(У даній роботі введені позначення, які прийняті у [5]).

Поздовжня деформація стрижня має вираз:

$$e = u'. \quad (2)$$

Визначальне рівняння для матеріалу стрижня (ГСП) подамо у вигляді:

$$Q = c \left[1 + R \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \cdot e, \quad (3)$$

де c – статична жорсткість стрижня ($c = E \cdot S$), $R \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$ – оператор в'язко-пружності.

Величина $c \cdot e$ у (3) представляє пружну силу, а член $c \cdot R \cdot e$ відтворює наявну дисипативну силу. Вважатимемо, що дисипативна сила є малою порівняно з пружною для будь-яких рухів, тому справедливою є така нерівність:

$$|R \cdot e| \ll |e|. \quad (4)$$

Комбінуючи рівняння (1) – (3), легко отримаємо єдине рівняння для u :

$$c \cdot \left[1 + R \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] u'' - m \ddot{u} = 0 \quad (5)$$

Нехай у перерізі $X = 0$ прикладена гармонічна сила, тоді при $X = 0$ гранична умова має вигляд:

$$Q = B_0 \cdot e^{i\omega t}, \quad i^2 = -1 \quad (6)$$

де B_0 – амплітуда сили Q , ω – її колова/кутова частота.

На нескінченності $x \rightarrow \infty$ слід вимагати виконання умови випромінювання Зоммерфельда (тобто зменшення/падіння амплітуди вібрації). Усталені коливання стрижня (ГСП) шукаємо за виразом:

$$u = U(w, x) \cdot e^{i\omega t}. \quad (7)$$

Підстановка (7) у (5) дає рівняння для U :

$$U'' + I^2 \cdot U = 0, \quad I^2 = \frac{m\omega^2}{c \cdot [1 + R \cdot (i\omega)]} = \frac{r\omega^2}{E \cdot [1 + R \cdot (i\omega)]}. \quad (8)$$

Розв'язок рівняння (8), який задовольняє умову загасання на нескінченності, має вигляд:

$$U = D \cdot e^{-i\lambda x} \quad (9)$$

де λ – той корінь другого рівняння (8), котрий має від'ємну уявну частину.

Нижче буде використовуватися подання λ , котре легко визначити з другої рівності (8):

$$I = \frac{w}{a} \cdot (g - ih), \quad a = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{E}{r}} \quad (10)$$

тут a – швидкість розповсюдження малих збурень вдоводж недемпфированого стрижня (при $R = 0$).

(Величина $a = \sqrt{\frac{E}{r}}$ відповідає швидкості розповсюдження поздовжніх хвиль у стрижні [6]).

Параметри γ та η визначаються з рівняння:

$$(g - ih)^2 = [1 + R \cdot (iw)]^{-1}, h > 0, \tag{11}$$

і мають вигляд:

$$g = \left\{ \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1 + w^2 R^2}} + \frac{1}{2 \cdot (1 + w^2 R^2)} \right\}^{\frac{1}{2}}; h = \left\{ \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1 + w^2 R^2}} + \frac{1}{2 \cdot (1 + w^2 R^2)} \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{12}$$

Підставляючи (9) у (7) і задовольняючи граничну умову (6), отримуємо:

$$u = -\frac{B_0}{i \cdot l \cdot c \cdot [1 + R(iw)]} \cdot e^{i(wt-lx)} \tag{13}$$

Для прискорення \ddot{u} маємо:

$$\ddot{u} = -\frac{i l B_0}{m} \cdot e^{i(wt-lx)}, \tag{14}$$

а для сили Q :

$$Q = B_0 \cdot e^{i(wt-lx)} \tag{15}$$

Вносячи у останній вираз подання λ з (10), отримуємо:

$$\left\{ \begin{aligned} u &= -\frac{B_0 \cdot e^{-\frac{whx}{a}} \cdot e^{i w \left(t - \frac{gx}{a} \right)}}{i l c \cdot [1 + R \cdot (i w)]}; \ddot{u} = -\frac{i l B_0}{m} \cdot e^{-\frac{whx}{a}} \cdot e^{i w \left(t - \frac{gx}{a} \right)}; \\ Q &= B_0 \cdot e^{-\frac{whx}{a}} \cdot e^{i w \left(t - \frac{gx}{a} \right)}; \end{aligned} \right. \tag{16}$$

З (16) видно, що рух стрижня представляє загасаючу біжучу хвилю. Амплітуда u , \ddot{u} , Q загасає у $e \approx 2,73$ рази на відстані L_3 :

$$L_3 = \frac{a}{w \cdot h} \tag{17}$$

Слід звернути увагу на ту обставину, що наведений хвильовий розв'язок не можна отримати наближеними методами [5], оскільки для напівнескінченного стрижня відсутнє поняття форми вільних пружних коливань.

Використовуючи вираз (14) або другий вираз у (16), можна легко знайти величину приєднаної маси коливань ГСП m^* , обчисленої на поверхні зразка ГСП $X=0$:

$$m^* = \frac{m}{|I|} = \frac{r \cdot S \cdot a}{w} \cdot \sqrt{1 + R^2 w^2}. \tag{18}$$

У таблиці наведено значення m^* та L_3 для ГСП залежно від їх фізико-механічних параметрів та частоти ω при $S = 1 \text{ м}^2$, $\rho = 2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\gamma = 0,05$, $R\omega \approx 0,05$.

Значення m^* , кг та L_3 , м для ГСП залежно від їх фізико-механічних параметрів та ω , 1/с

ω , 1/с	a , м/с							
	10	25	35	50	70	80	90	100
125,7	159,1*/1,59**	397,8/3,98	556,9/5,57	795,5/7,95	1113,7/11,10	1272,8/12,70	1431,9/14,30	1591/15,90
251,3	79,6/0,80	198,9/1,99	278,5/2,79	397,8/3,98	556,9/5,55	636,4/6,35	716,0/7,15	795,5/7,95
377,1	53,0/0,53	132,6/1,33	185,5/186	265,2/2,65	371,2/3,70	424,3/4,23	477,3/4,77	530,3/5,30

Примітка. (*) у чисельнику вказано m^* , кг; (**) у знаменнику – L_3 , м.

Для насичених вологою ГСП $\eta = 0,2 \dots 0,4$, $a = 10 \text{ м/с}$, $L_3 = (0,13 \dots 0,07) \text{ м}$, $m^* = 53 \text{ кг}$ при $\omega = 377,1 \text{ 1/с}$, $S = 1 \text{ м}^2$, $\rho = 2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Розглянемо тепер стрижень з ГСП (модельний зразок) довжини L , у котрого переріз $X=0$ вільний, а у перерізі $X=L$ прикладене навантаження (6). Як і вище, розв'язок задачі розшукуємо у вигляді (7), причому для визначення U отримуємо рівняння (8). Граничні умови для U знайдемо підстановкою виразів (6) та (7) у граничні умови задачі. У результаті маємо:

$$\begin{cases} x = 0; dU / dx = 0, \\ x = L; c \cdot [1 + R(iw)] dU / dx = B_0 \cdot \end{cases} \quad (19)$$

Розв'язок рівняння (8), який задовольняє записані граничні умови (19), має вигляд:

$$U = -\frac{IB_0}{mw^2} \cdot \frac{\cos Lx}{\sin LL}. \quad (20)$$

З його допомогою знаходимо наступний вираз для прискорення:

$$\ddot{x} = \tilde{f}(w, x) \cdot B_0 \cdot e^{iwt}, \quad (21)$$

де частотна характеристика \tilde{f} має вигляд:

$$\tilde{f}(w, x) = \frac{I \cdot \cos Lx}{m \cdot \sin LL} \quad (22)$$

Розподіл квадратів амплітуд переміщення U за довжиною стрижня подано виразом:

$$A^2 = B_0^2 \cdot |\tilde{f}(w, x)|^2 / w^4. \quad (23)$$

[Слід зазначити, що у роботі [5] допущена помилка, оскільки відсутній множник ω^{-4} у формі для A^2 (23)].

Використовуючи (22) і подання λ за (10), легко отримати:

$$|\tilde{f}(w, x)|^2 = \frac{|I|^2}{m^2} \cdot \left\{ \frac{ch(2 \cdot \frac{whx}{a}) + \cos(2 \cdot \frac{wgx}{a})}{ch(2 \cdot \frac{whL}{a}) - \cos(2 \cdot \frac{wgL}{a})} \right\} \quad (24)$$

Аналіз виразу (21) дає змогу визначити m^{**} (приєднану масу стрижня як системи з розподіленими параметрами у розглядуваному тут випадку) для перерізу $X=0$:

$$m^{**} = \frac{m}{|I|} \cdot \sqrt{\frac{ch(2 \cdot \frac{whL}{a}) - \cos(2 \cdot \frac{wgL}{a})}{2}} \quad (25)$$

Враховуючи (20), можна визначити жорсткість стрижня з ГСП C^{**} , приведену до перерізу $X=0$:

$$C^{**} = \frac{|I|}{m \cdot w^2} \cdot \sqrt{\frac{2}{ch(2 \cdot \frac{whL}{a}) - \cos(2 \cdot \frac{wgL}{a})}} \quad (26)$$

Враховуючи вираз (18), формули (25) та (26) можна подати так:

$$\begin{cases} m^{**} = \frac{r \cdot S \cdot a}{w} \cdot \sqrt{1 + R^2 \cdot w^2} \cdot \sqrt{\frac{ch(2 \cdot \frac{whL}{a}) - \cos(2 \cdot \frac{wgL}{a})}{2}}; \\ C^{**} = r \cdot S \cdot a \cdot w \cdot \sqrt{1 + R^2 \cdot w^2} \cdot \sqrt{\frac{ch(2 \cdot \frac{whL}{a}) - \cos(2 \cdot \frac{wgL}{a})}{2}} \end{cases} \quad (27)$$

З (27) видно, що скінченні розміри стрижня з ГСП призводять до появи у виразах m^{**} , C^{**} так званого хвильового коефіцієнта:

$$\epsilon_{xв.} = \sqrt{\frac{ch(2 \cdot \frac{whL}{a}) - \cos(2 \cdot \frac{wgL}{a})}{2}} \quad (28)$$

При $L \rightarrow \infty$ для аналогічних виразів m^* , C^* маємо:

$$C^* = r \cdot S \cdot a \cdot w \cdot \sqrt{1 + R^2 \cdot w^2}; m^* = \frac{r \cdot S \cdot a}{w} \cdot \sqrt{1 + R^2 \cdot w^2} \quad (29)$$

Для визначення/ідентифікації механічних властивостей ГСП на поверхні його $X=0$ розміщуємо датчик із зосередженою масою M . Розглядаючи у подальшому систему “датчик – стрижень з ГСП” як таку, що має дискретні параметри (усі розподілені параметри стрижня зводимо до поверхні $X=0$), можна останню розглядати для випадку суто вертикальних переміщень у напрямку осі Ox . Тепер можна дослідити коливання зазначеної системи з одним ступенем вільності руху $n=1$. При цьому узагальненою координатою буде вертикальне переміщення X . У цьому випадку рівняння руху набуває вигляду (для вільних коливань системи):

$$(m^{**} + M) \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} + c^{**} \cdot x = 0, \quad (30)$$

де $k = m \cdot \frac{S}{L}$ – приведений у точку $X=0$ коефіцієнт в’язкості стрижня з ГСП, а μ – коефіцієнт в’язкості ГСП, [Па·с]. При цьому у виразах для m^{**} , C^{**} (27) слід зробити заміну $\omega \rightarrow \Omega$, де Ω – частота вільних власних коливань системи, що розглядаються (із зосередженими параметрами). При $L \rightarrow \infty$ слід розв’язувати рівняння:

$$(m^* + M) \cdot \ddot{x} + \bar{k} \cdot \dot{x} + c^* \cdot x = 0, \quad (31)$$

де $\bar{k} = m \cdot \sqrt{S}$, а формулах (29) зроблено заміну $\omega \rightarrow \Omega$. (У межах моделі (3) $\mu=ER$, тому $\bar{k} = ER \cdot \sqrt{S}$).

Обидва рівняння (30) та (31) можна подати у вигляді:

$$a \cdot \ddot{x} + \nu \cdot \dot{x} + c \cdot x = 0, \quad (32)$$

$$\text{де } a = \begin{cases} m^{**} + M \\ m^* + M \end{cases}; \nu = \begin{cases} k \\ \bar{k} \end{cases}; c = \begin{cases} c^{**} \\ c^* \end{cases}.$$

Рівняння (32) має кілька розв’язків.

Випадок А. Коли $\nu < 2\sqrt{ac}$ (не дуже великі значення коефіцієнта лінійного тертя, загальний розв’язок диференціального рівняння (32) має вигляд:

$$x = e^{-ht} \cdot (c_1 \cdot \sin k_* \cdot t + c_2 \cdot \cos k_* \cdot t), \quad (33)$$

де

$$h = \frac{\nu}{2a}; k_* = \sqrt{\tilde{k}^2 - h^2}; \tilde{k} = \sqrt{\frac{c}{a}}, \quad (34)$$

а постійні C_1 й C_2 визначаються з початкових умов:

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad (35)$$

у формі:

$$C_1 = \frac{\dot{x}_0 + h \cdot x_0}{k_*}; C_2 = x_0 \quad (36)$$

Інша форма розв’язку має вигляд:

$$x = A \cdot e^{-ht} \cdot \sin(k_* \cdot t + a), \quad (37)$$

де

$$A = \sqrt{\frac{(x_0 + hx_0)^2}{\tilde{k}^2 - h^2} + x_0^2}; \operatorname{tg} a = \frac{x_0 \cdot \sqrt{\tilde{k}^2 - h^2}}{x_0 + hx_0}. \quad (38)$$

Як видно з (33) чи (37), рух являє собою загасаючі коливання з постійною частотою k_* , але постійно спадаючими амплітудами (взагалі кажучи, цей термін стосується тільки незагасаючого процесу гармонічних коливань), тому що процес загалом характеризується монотонним зменшенням амплітуд [7] (рис. 1).

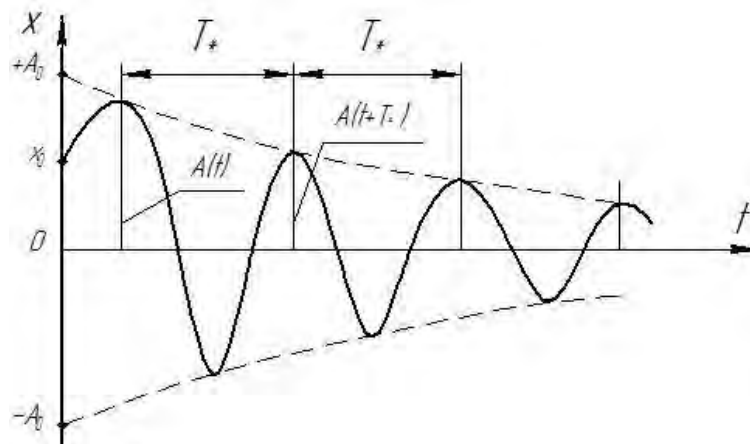


Рис. 1

Оригинальні кривої процесу визначаються функціями:

$$A = \pm A_0 e^{-ht}, \quad (39)$$

де A_0 – початкова ордината оригінальної.

Кутова частота вільних загасаючих коливань визначається виразом:

$$k_* = \sqrt{\tilde{k}^2 - h^2} = \sqrt{\frac{4ac - \nu^2}{2a}}, \quad (40)$$

Відповідно тривалість одного циклу становить

$$T_* = \frac{2\pi}{k_*} = \frac{4\pi a}{\sqrt{4ac - \nu^2}} \quad (41)$$

Найчастіше вплив тертя на власну частоту дуже малий, яким можна знехтувати, тому можна прийняти $k_* \approx \tilde{k}, T_* \approx T = \frac{2\pi}{\tilde{k}}$.

Послідовність максимальних відхилень відповідає закону геометричної прогресії, оскільки згідно з (39) відношення двох послідовних максимальних відхилень $A(t):A(t+T_*)$, розділених інтервалом часу T_* , є постійною величиною, що дорівнює e^{hT_*} .

Натуральний логарифм цього відношення зветься логарифмічним декрементом; він дорівнює

$$\Lambda = h \cdot T_* = \frac{2\pi}{k_*} = \frac{4\pi a}{\sqrt{4ac - \nu^2}} \approx \frac{\pi \nu}{\sqrt{ac}}. \quad (42)$$

Логарифмічний декремент слугує зручною кількісною характеристикою темпу загасання вільних коливань.

Випадок Б. При доволі великих значеннях коефіцієнта в'язкого тертя, коли $\nu > 2\sqrt{ac}$, загальний розв'язок диференціального рівняння (32) замість (33) набуде вигляду:

$$x(t) = c_1 \cdot e^{S_1 t} + c_2 \cdot e^{S_2 t}, \quad (43)$$

де

$$S_{1,2} = \frac{-\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 4ac}}{2a}. \quad (44)$$

Постійні інтегрування визначаються за допомогою початкових умов (35) виразами:

$$C_1 = \frac{-S_1 \cdot x_0 + \dot{x}_0}{S_1 - S_2}; C_2 = \frac{-S_2 \cdot x_0 + \dot{x}_0}{S_2 - S_1} \quad (45)$$

Рух, який описується виразом (43), – неколивний (рис. 2); за будь-яких початкових умов величини X та \dot{X} асимптотично прямують до нуля.

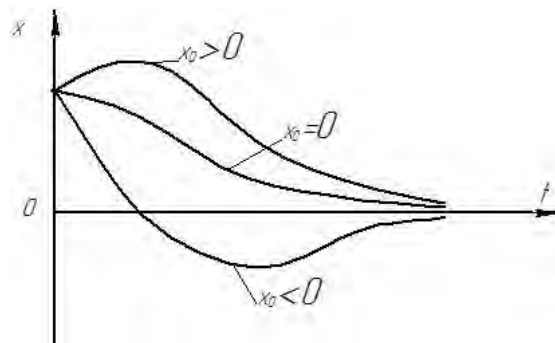


Рис. 2

Випадок В.

У випадку, коли $\epsilon = 2\sqrt{ac}$ (критичне загасання), розв'язок диференціального рівняння (32) має вигляд:

$$x = e^{-\tilde{k}t} \cdot [x_0 + (\tilde{k} \cdot x_0 + \dot{x}_0) \cdot t] \quad (46)$$

й за характером не відрізняється від поданого на рис. 2.

Висновки

1. Наведено метод ідентифікації механічних властивостей ґрунтів сільськогосподарського призначення (у межах в'язко-пружної моделі останніх) шляхом дослідження коливань їх зразків.
2. Механічні властивості вказаних ґрунтів визначено для зразків (ґрунтів) скінченної та нескінченної довжини. При цьому визначено закони руху таких зразків (як дискретних/ континуальних) для різних значень в'язкого тертя.
3. Отримані результати можна у подальшому використати для уточнення та вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку механічних коливань ґрунтів сільськогосподарського призначення.

1. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики. Т. II / Н.В. Бутенин, Я.Л. Луц, Д.Р. Меркин. – М.: Наука, 1985. – 496 с. 2. Биргер И.А. Прочность, устойчивость, колебания. Т.3 / И.А. Биргер, Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1986. – 568 с. 3. Тимошенко С.П. Курс теории упругости / С.П. Тимошенко. – К.: Наукова думка, 1972. – 508 с. 4. Ковбаса В.П. Визначення механічних властивостей матеріалів шляхом дослідження коливань зразка / В.П. Ковбаса, Я.В. Коваль // Вібрації в техніці та технологіях. – 2009. – №4 (56). – С. 92 – 96. 5. Пальмоа В.А. Колебания упруго – пластических тел / В.А. Пальмов. – М.: Наука, 1976. – 328 с. 6. Ландау Л.Д. Теория упругости. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1965. – 204 с. 7. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний / Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1980. – 272 с.