

5. Філімоніхіна І.І. Узагальнений емпіричний критерій стійкості основного руху і його застосування до ротора на двох осесиметричних пружних опорах / І.І. Філімоніхіна, Г.Б. Філімоніхін // *Машинознавство*. – 2007. – №3. – С. 22–27. 6. Філімоніхіна І.І. Застосування функції Гамільтона до визначення умов зрівноваження автобалансирами ротора, здійснюючого просторовий рух / І.І. Філімоніхіна // *Збірник наукових праць КНТУ*. – 2007. – Вип. №18. – С. 34–41. 7. Горбенко А.Н. Основы общего подхода к анализу устойчивости роторных машин с пассивным автобалансиром / А.Н. Горбенко; Керченский гос. морской технол. ун-т. – Керчь, 2008. – 52 с. – Рус. – Деп. в ГНТБ Украины 07.07.2008, №108 – Ук2008. 8. Філімоніхін Г.Б. Методика складання диференціальних рівнянь руху роторних систем з автобалансирами і її застосування до системи ротор – масивний корпус – автобалансир / Г.Б. Філімоніхін, В.В. Гончаров // *Збірник наукових праць КНТУ*. – 2009. – Вип. 22. – С. 357–363.

УДК 62-752+62-755: 621.634

**Г.Б. ФІЛІМОНІХІН, В.В. ГОНЧАРОВ**

Кіровоградський національний технічний університет

## **ДИСКРЕТНА МОДЕЛЬ ГНУЧКОГО ДВООПОРНОГО РОТОРА З ПАСИВНИМИ АВТОБАЛАНСИРАМИ**

© Філімоніхін Г.Б., Гончаров В.В., 2011

*Побудовано  $n$ -масову модель незрівноваженого гнучкого ротора на двох в'язко-пружних опорах з автобалансирами. Отримано диференціальні рівняння руху системи та замкнуту систему диференціальних рівнянь для дослідження стійкості основних рухів системи.*

*The  $n$ -mass model of unstable flexible rotor on two viscid-elastic supports with auto-balancers is built. Are received the differential equations of motion of the system and closed system of the differential equations for research of stability of the main motions of the system.*

**Вступ.** Під час роботи роторів газотурбінних двигунів літаків, турбоагрегатів для нафтової і газової промисловості тощо, на великих швидкостях обертання виникають вібрації через наявні початкові або привнесені дисбаланси. Одним із способів боротьби з цими вібраціями може бути зрівноважування роторів у процесі роботи пасивними автобалансирами (АБ). В останніх коригувальні вантажі (КВ) у вигляді маятників, куль чи роликів за певних умов самі приходять у положення, у якому зрівноважують ротор і далі обертаються з ним як одне ціле, поки не почне змінюватися дисбаланс чи не з'являється збурення іншого походження.

**Постановка проблеми.** Під час проектування гнучких вібронадійних роторів з АБ потрібна попередня оцінка їх динаміки. Для цього необхідна достатньо адекватна математична модель, яка, з одного боку, описує процес автобалансування цих роторів, а з іншого, – піддається ефективному аналітичному аналізу. Сьогодні достатньо повно розроблена теорія статичного і динамічного зрівноваження АБ жорстких роторів на податливих опорах. Теорія зрівноваження гнучких роторів майже відсутня. Це стримує застосування на практиці АБ для зрівноважування на ходу гнучких роторів.

**Огляд літературних джерел.** Для зрівноважування на ходу статичного дисбалансу дисків в CD/DVD приводах і ручних шліфувальних машинах, барабанах екстракторів, центрифуг, сепара-

торів відцентрових машин, крильчатках осьових вентиляторів тощо знайшли застосування пасивні АБ, зокрема кульові [1–3]. Сьогодні якнайповніше побудована теорія статичного і динамічного зрівноваження АБ жорстких роторів на податливих опорах [1–8]. При цьому досліджені особливості статичного зрівноваження одним АБ жорстких роторів, що здійснюють плоский рух [1, 2], рухаються навколо нерухомої точки [1, 2, 6–8], здійснюють просторовий рух [1, 2], та особливості динамічного зрівноваження двома АБ жорстких роторів, що здійснюють просторовий рух [1, 3, 4]. У [5] описано загальну методику складання диференціальних рівнянь руху роторних систем з АБ, а в [6–8] наведено послідовність дослідження стійкості основних рухів роторних систем (процесу автобалансування), яку сьогодні можна вважати стандартною для такого класу задач.

Особливості зрівноваження АБ гнучких роторів на жорстких опорах досліджувалися у [2, 9]. При цьому визначалися критичні швидкості обертання системи за переходу, через які настає чи втрачається автобалансування, а перехідні процеси не досліджувалися. У [10–14] вивчалася динаміка гнучких роторів на жорстких і податливих опорах різної конструкції. При цьому гнучкі ротори за спеціально розробленим методом моделювалися дискретними  $n$ -масовими механічними системами, що доволі точно і повно відображали динамічні властивості реальних гнучких роторів і піддавалися при цьому аналітичному аналізу.

**Постановка задачі.** У цій роботі будується дискретна  $n$ -масова модель гнучкого незрівноваженого ротора на двох податливих опорах з АБ, виводяться диференціальні рівняння руху системи і з них одержують замкнуту систему диференціальних рівнянь для дослідження стійкості основних рухів системи. Для побудови дискретної моделі ротора використовуються деякі підходи, закладені у [10–14], а при виведенні диференціальних рівнянь руху системи – деякі результати робіт [5, 6].

**Опис теоретико-механічної моделі ротора і АБ.** Гнучкий ротор на двох податливих опорах з  $n$  АБ, призначеними для зрівноваження ротора у  $n$  площинах корекції, моделюється так (рис. 1). Вал ротора вважається у недеформованому стані абсолютно пружною невагомою прямою лінією. На нього насаджено  $n$  абсолютно плоских жорстких дисків  $D_j$  масою  $M_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ , причому центри дисків – точки  $K_j$ ,  $j = \overline{1, n}$  знаходяться на пружній лінії і за недеформованого вала площини дисків перпендикулярні до цієї лінії. Вал в точках  $K_p, K_q$ , ( $q > p$ ) утримується двома в'язко-пружними неізотропними опорами з лінійними характеристиками. Головні напрямки лівої і правої опор – паралельні.

Припускається, що вал ротора обертається навколо нерухомої осі із сталою кутовою швидкістю  $\omega$ ; відсутнє кручення вала; диски рухаються плоскопаралельно у відповідних поперечних площинах недеформованого вала, тобто кутові переміщення дисків настільки незначні, що ними можна нехтувати.

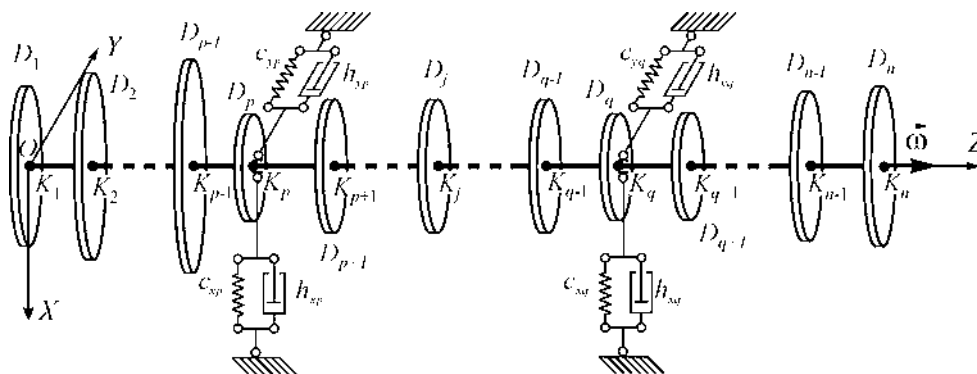


Рис. 1.  $n$ -масова модель гнучкого ротора на двох в'язко-пружних опорах

Рух системи визначається щодо правої системи нерухомих прямокутних осей  $X, Y, Z$ : вісь  $Z$  спрямована по осі обертання убік вектора кутової швидкості  $\omega$ , осі  $X$  і  $Y$  спрямовані паралельно до головних напрямків в'язко-пружних опор, початок координат – точка  $O$  розміщена в точці перетину крайнього лівого диска –  $D_1$  з віссю обертання. Коефіцієнти в'язкості та жорсткості в'язко-пружних опор відповідно дорівнюють  $h_{xj}, h_{yj}$  та  $c_{xj}, c_{yj}, / j = \overline{p, q} /$ .

Рух ротора повністю визначається обертанням навколо осі  $Z$  і відхиленням центрів дисків від осі обертання (рис. 2). Позначимо через  $O_j, / j = \overline{1, n} /$  положення центрів дисків на осі  $Z$  за недеформованого вала ротора. У процесі руху ротора вал відхиляється від осі обертання, а точки  $K_j$  – від точок  $O_j, / j = \overline{1, n} /$ . Положення точок  $O_j$  задають радіус-вектори  $r_{0j} = (0, 0, z_j)^T$ , а  $K_j = (x_j, y_j, z_j)^T, / j = \overline{1, n} /$ .

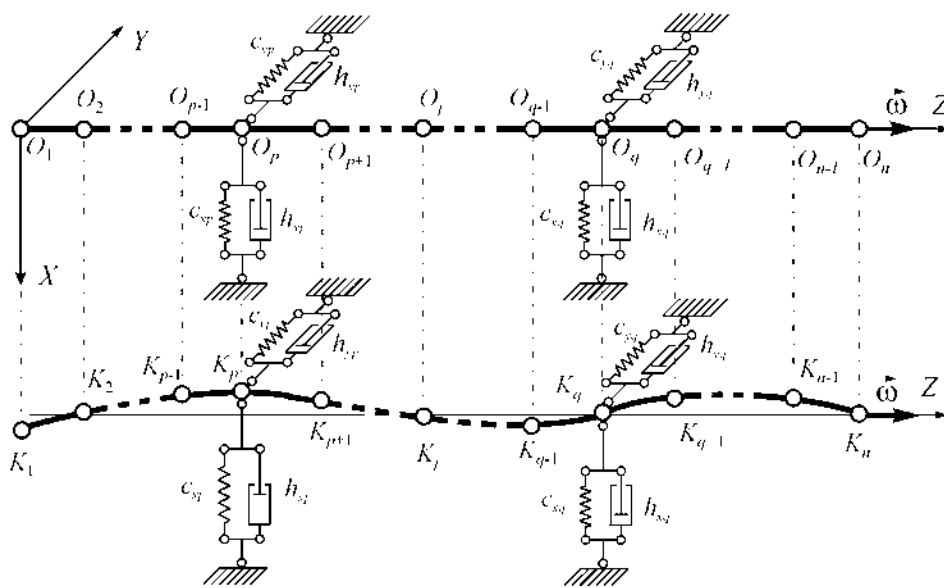


Рис. 2. Дискретна ( $n$ -масова) модель гнучкого ротора

У площині кожного диска в точці  $G_{j,0}$  на відстані  $r_{j,0}$  (рис. 3) від його подовжньої осі знаходиться точкова маса  $m_{j,0}$ , яка утворює статичний дисбаланс  $s_{j,0}, / j = \overline{1, n} /$ . У початковий момент вектор  $s_{j,0}$  утворює з віссю  $X$  кут  $\varphi_{0j} / j = \overline{1, n} /$ . Кут повороту  $j$ -го диска  $\omega t$ . Тоді кут повороту точкової маси дисбалансу  $\varphi_{j,0} = \omega t + \varphi_{0j}, / j = \overline{1, n} /$ .

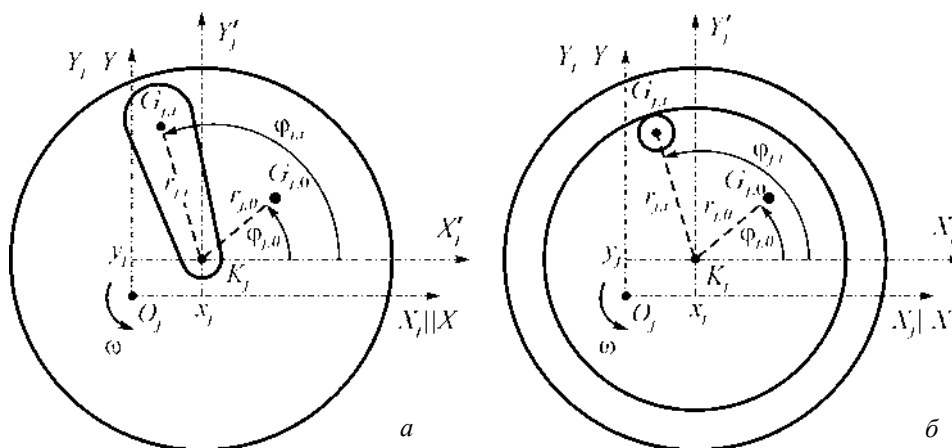


Рис. 3. Кінематика плоскопаралельного руху  $j$ -го диска з АБ

Кожний диск  $D_j$  /  $j = \overline{1, n}$ / містить маятниковий або кульовий чи роликівий АБ (рис. 3). У маятниковому АБ (рис. 3, а) на вал насаджені  $n_j$  маятників масою  $m_{j,i}$  фізичної довжини  $r_{j,i}$ , /  $i = \overline{1, n_j}$ /. У кульовому чи роликівому АБ (рис. 3, б) міститься  $n_j$  куль чи циліндричних роликів масою  $m_{j,i}$ , які котяться без ковзання кільцевими доріжками, при цьому відстань від центра диска до центра кулі чи ролика дорівнює  $r_{j,i}$ , /  $i = \overline{1, n_j}$ /. Як це прийнято у теорії пасивних АБ [1–8], вважаємо, що КВ (маятники, кулі чи циліндричні ролики) рухаються у площинах дисків, не заважають рухатися один одному, і нехтуємо дією сил ваги.

Положення КВ визначаються кутами  $\varphi_{j,i}$ , /  $i = \overline{1, n_j}$ /. За повороту  $i$ -го маятника навколо вала на нього діє момент сил в'язкого опору  $h_{j,i} r_{j,i}^2 (\dot{\varphi}_{j,i} - \omega)$ , де  $h_{j,i}$  – коефіцієнти моменту сил в'язкого опору (приведені до плеча  $r_{j,i}$ ),  $\dot{\varphi}_{j,i}$  – швидкість обертання маятника навколо вала стосовно  $j$ -го диска і крапка над величинами означає похідну за часом. За руху  $i$ -ї кулі чи ролика по доріжці на неї діє сила в'язкого опору  $h_{j,i} r_{j,i} (\dot{\varphi}_{j,i} - \omega)$ , де  $h_{j,i}$  – коефіцієнти сили в'язкого опору, і  $r_{j,i} (\dot{\varphi}_{j,i} - \omega)$  – швидкість руху центра кулі чи ролика стосовно  $j$ -го диска.

**Диференціальні рівняння руху системи.** Використовуючи результати робіт [5, 6], запишемо диференціальні рівняння руху для КВ:

$$k_{j,i} m_{j,i} r_{j,i}^2 \ddot{\varphi}_{j,i} + h_{j,i} r_{j,i}^2 (\dot{\varphi}_{j,i} - \omega) - m_{j,i} r_{j,i} (\ddot{\varphi}_{j,i} \sin \varphi_{j,i} - \dot{\varphi}_{j,i}^2 \cos \varphi_{j,i}) = 0, \quad / j = \overline{1, n}, / i = \overline{1, n_j}, / \quad (1)$$

де  $k_{j,i}$  – кінетичні коефіцієнти, визначені в [6].

За теоремою про рух центра мас матеріальної системи маємо такі диференціальні рівняння рухів для дисків з АБ у векторній формі:

$$M_{\Sigma_j} \Delta \mathbf{r}_{G_j} = \Delta \mathbf{R}_j^{(3OB)}, \quad / j = \overline{1, n}, / \quad (2)$$

де  $M_{\Sigma_j} = M_j + \sum_{i=1}^{n_j} m_{j,i}$ , /  $j = \overline{1, n}$ / – маса  $j$ -го диска з АБ;  $\Delta \mathbf{r}_{G_j}$ , /  $j = \overline{1, n}$ / – поперечна складова прискорення центра мас  $j$ -го диска з АБ;  $\Delta \mathbf{R}_j^{(3OB)}$ , /  $j = \overline{1, n}$ / – поперечна складова рівнодійної зовнішніх сил, що діють на  $j$ -й диск.

Визначимо ліві частини рівнянь (2). Оскільки  $\Delta \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j_0} = (x_j, y_j, 0)^T$ , /  $j = \overline{1, n}$ / – вектори поперечних переміщень центрів дисків, то в проекціях на осі  $X, Y, Z$  маємо

$$M_{\Sigma_j} \Delta \mathbf{r}_{G_j} = M_{\Sigma_j} \Delta \mathbf{r}_j + \mathbf{s}_j, \quad / j = \overline{1, n}, / \quad (3)$$

де  $\mathbf{s}_j = (s_{xj}, s_{yj}, 0)^T$ ;  $s_{xj} = \sum_{i=0}^{n_j} m_{j,i} r_{j,i} \cos \varphi_{j,i}$ ,  $s_{yj} = \sum_{i=0}^{n_j} m_{j,i} r_{j,i} \sin \varphi_{j,i}$  – проекції сумарного дисбалансу  $j$ -го диска з АБ на осі  $X, Y$  ( $X_j, Y_j$ ). Тоді

$$M_{\Sigma_j} \Delta \mathbf{r}_{G_j} = M_{\Sigma_j} \Delta \mathbf{r}_j + \mathbf{s}_j, \quad / j = \overline{1, n}. / \quad (4)$$

Знайдемо праві частини рівнянь (2). Нехай на центри дисків – точки  $K_j$ , /  $j = \overline{1, n}$ / деформований вал ротора діє із певними поперечними пружними силами  $\mathbf{F}_j^{(B)}$ , /  $j = \overline{1, n}$ /. Ці сили можна знайти, використовуючи теорему про взаємність переміщень та відповідні коефіцієнти податливості [15]. Тоді в неопорних точках

$$\Delta \mathbf{R}_j^{(3OB)} = \mathbf{F}_j^{(B)}, \quad / j = \overline{1, n}; \quad j \neq p, q /, \quad (5)$$

в опорних точках

$$\Delta \mathbf{R}_j^{(зоб)} = \mathbf{F}_j^{(B)} + \mathbf{F}_j^{(np)} + \mathbf{F}_j^{(on)}, \quad / j = p, q /, \quad (6)$$

де  $\mathbf{F}_j^{(np)}$ ,  $\mathbf{F}_j^{(on)}$  – відповідно пружна і в'язка складова реакції опори в точці  $K_j$ ,  $/ j = p, q /$ , причому

$$\mathbf{F}_j^{(np)} = -(c_{xj}x_j, c_{yj}y_j, 0)^T, \quad \mathbf{F}_j^{(on)} = -(h_{xj}\mathbf{x}_j, h_{yj}\mathbf{x}_j, 0)^T, \quad / j = p, q /. \quad (7)$$

Підставивши (5)–(7) в (2), отримаємо

$$M_{\Sigma_j} \Delta \mathbf{R}_j = \mathbf{F}_j^{(B)}, \quad / j = \overline{1, n}; \quad j \neq p, q /; \quad (8)$$

$$M_{\Sigma_j} \Delta \mathbf{R}_j = \mathbf{F}_j^{(B)} + \mathbf{F}_j^{(np)} + \mathbf{F}_j^{(on)}, \quad / j = p, q /. \quad (9)$$

Знайдемо сили  $\mathbf{F}_j^{(B)}$  в неопорних точках. Запишемо переміщення  $\Delta \mathbf{r}_j$  точок вала  $K_j$ ,  $/ j = \overline{1, n}, j \neq p, q /$  у відповідних поперечних перерізах у вигляді:

$$\Delta \mathbf{r}_j = \Delta \mathbf{r}'_j + \Delta \mathbf{r}''_j,$$

де  $\Delta \mathbf{r}'_j = (x'_j, y'_j, 0)^T$  – переміщення точки  $K_j$ ,  $/ j = \overline{1, n}, j \neq p, q /$  при зміщенні балки  $K_p K_q$  як твердого тіла за заданих  $x_j, y_j$ ,  $/ j = p, q /$ ;  $\Delta \mathbf{r}''_j = (x''_j, y''_j, 0)^T$  – переміщення (відносно переміщення) точки  $K_j$ ,  $/ j = \overline{1, n}, j \neq p, q /$  за згину балки під дією заданих сил  $\mathbf{F}_j = (F_{xj}, F_{yj}, 0)^T$ ,  $/ j = \overline{1, n}, j \neq p, q /$  за умови жорсткого закріплення опор  $K_p$  і  $K_q$ .

Оскільки задача лінійна, то під час визначення переміщень  $\Delta \mathbf{r}_j$   $/ j = \overline{1, n} /$  використаємо принцип суперпозиції дії сил і розкладемо рух (переміщення) вала на дві складові – в площинах  $XZ$  і  $YZ$ . Опишемо переміщення в площині  $XZ$ .

Переміщення  $x_j$ ,  $/ j = \overline{1, n}, j \neq p, q /$  мають вигляд:

$$x_j = x'_j + x''_j, \quad / j = \overline{1, n}, j \neq p, q /. \quad (10)$$

Перший доданок  $x'_j$ ,  $/ j = \overline{1, n}, j \neq p, q /$  отримаємо з геометричних співвідношень (див. рис. 4):

$$x'_j = x_p + \tilde{z}_j(x_q - x_p), \quad / j = \overline{1, n} /, \quad (11)$$

$$\text{де } \tilde{z}_j = (z_j - z_p) / (z_q - z_p), \quad / j = \overline{1, n} /. \quad (12)$$

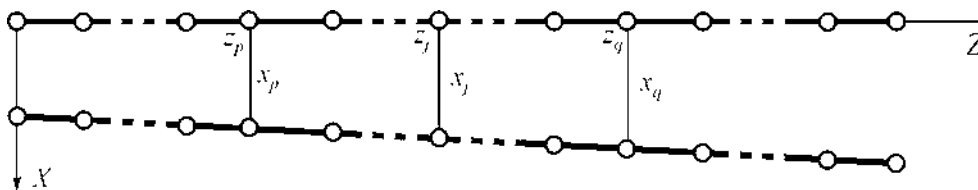


Рис. 4. Переміщення точок вала при зміщенні балки  $K_p K_q$  як твердого тіла

Для знаходження  $x''_j$ ,  $/ j = \overline{1, n}, j \neq p, q /$  використаємо відомі формули опору матеріалів [15]:

$$x''_j = \sum_{k=1}^n \delta_{j,k} F_{xk}^{(B)}, \quad / j = \overline{1, n}, j \neq p, q /, \quad (13)$$

де  $\delta_{j,k}$  – коефіцієнти податливості, які визначаються як статичні переміщення  $j$ -ї точки від одиничної безрозмірної сили  $\bar{F}_{xk} = 1$ , прикладеної в  $k$ -й точці (див. рис. 5), причому:

$$\delta_{j,k} = \delta_{k,j}; \quad \delta_{p,k} = \delta_{q,k} = \delta_{j,p} = \delta_{j,q} = 0, \quad / j, k = \overline{1, n} /. \quad (14)$$

Підставивши (11), (13) в (10), отримаємо вирази для переміщень мас в неопорних точках:

$$x_j = x_p + \tilde{z}_j(x_q - x_p) + \sum_{k=1}^n \delta_{j,k} F_{xk}^{(B)}, / j = \overline{1, n}, j \neq p, q /$$

або у векторній формі

$$\sum_{k=1}^n \delta_{j,k} \mathbf{F}_k^{(B)} = \Delta \mathbf{r}_p + \tilde{z}_j(\Delta \mathbf{r}_q - \Delta \mathbf{r}_p) - \Delta \mathbf{r}_j, / j = \overline{1, n}, j \neq p, q / . \quad (15)$$

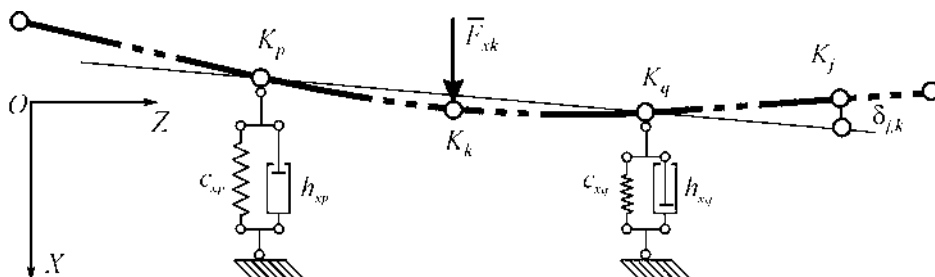


Рис. 5 Схема визначення коефіцієнтів  $\delta_{j,k}$ .

Знайдемо сили  $\mathbf{F}_j^{(B)}$  в опорних точках. Пружні сили вала  $\mathbf{F}_j^{(B)}$ ,  $/ j = p, q /$  – опорні реакції. Переміщення  $x_j''$  точок їх прикладання дорівнюють нулю. Ці сили визначаються з відповідних рівнянь статички і виражаються через  $\mathbf{F}_j^{(B)}$ ,  $/ j = \overline{1, n}, j \neq p, q /$ .

Запишемо вирази для переміщень нерухомого ротора під дією постійних сил  $\mathbf{F}_k^{(B)}(F_{xk}^{(B)}, F_{yk}^{(B)}, 0)$ ,  $/ k = \overline{1, n}, k \neq p, q /$ , прикладених до відповідних мас  $M_k$ ,  $/ k = \overline{1, n}, k \neq p, q /$ . З умови статичної рівноваги визначаємо опорні реакції за дії на вал сили  $F_{xk}^{(B)}$ ,  $/ k = \overline{1, n}, k \neq p, q /$ , прикладеної у перерізі  $k$  (рис. 6):

$$F_{xj,k}^{(B)} = -\tilde{z}_{j,k} F_{xk}^{(B)}, / j = p, q; k = \overline{1, n}, k \neq p, q / , \quad (16)$$

$$\text{де } \tilde{z}_{p,k} = 1 - \tilde{z}_k, \tilde{z}_{q,k} = \tilde{z}_k, / k = \overline{1, n}, k \neq p, q / . \quad (17)$$

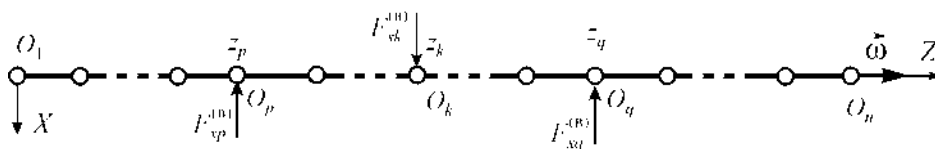


Рис. 6. Визначення реакцій опор від дії сили  $\mathbf{F}_k^{(B)}$  у перерізі  $/ k = \overline{1, n}; k \neq p, q /$

Додавши рівняння (16), отримаємо опорні реакції вала, що виникають за одночасної дії сил  $F_{xk}^{(B)}$ ,  $/ k = \overline{1, n}, k \neq p, q /$ :

$$F_{xj}^{(B)} = -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p, q}}^n \tilde{z}_{j,k} F_{xk}^{(B)}, / j = p, q / . \quad (18)$$

У векторній формі рівняння (18), враховуючи (12), (17), можна записати у вигляді

$$\sum_{k=1}^n \tilde{z}_{j,k} \mathbf{F}_k^{(B)} = 0, / j = p, q / . \quad (19)$$

Помножимо рівняння (8), замінивши попередньо індекс  $j$  на  $k$   $/ k = \overline{1, n}; k \neq p, q /$ , на коефіцієнт  $\delta_{j,k}$   $/ j = \overline{1, n}; j \neq p, q /$ , і додамо отримані рівняння по  $k$ . Враховуючи (14), матимемо

$$\sum_{k=1}^n \delta_{j,k} M_{\Sigma_k} \Delta \mathbf{r}_k = \sum_{k=1}^n \delta_{j,k} \mathbf{F}_k^{(B)}, / j = \overline{1, n}; j \neq p, q / . \quad (20)$$

Підставивши (15) в (20), отримаємо рівняння, які описують рух точок  $K_j$ ,  $/ j = \overline{1, n}, j \neq p, q /$ :

$$\sum_{k=1}^n \delta_{k,j} M_{\Sigma_k} \Delta \mathbf{G}_k + \Delta \mathbf{r}_j - \Delta \mathbf{r}_p - \tilde{z}_j (\Delta \mathbf{r}_q - \Delta \mathbf{r}_p) = 0, / j = \overline{1, n}; j \neq p, q / . \quad (21)$$

Аналогічно до попереднього помножимо рівняння (8) на коефіцієнт  $\tilde{z}_{j,k} / j = p, q /$  і додамо отримані рівняння по  $k$ . Отримаємо

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p, q}}^n \tilde{z}_{j,k} M_{\Sigma_k} \Delta \mathbf{G}_k = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p, q}}^n \tilde{z}_{j,k} \mathbf{F}_k^{(B)}, / j = p, q / . \quad (22)$$

Додавши рівняння (22) до відповідних рівнянь (9) і враховуючи (12), (17), (19), отримаємо

$$\sum_{k=1}^n \tilde{z}_{j,k} M_{\Sigma_k} \Delta \mathbf{G}_k - \mathbf{F}_j^{(np)} - \mathbf{F}_j^{(on)} = 0, / j = p, q / . \quad (23)$$

Підставляючи (4) у рівняння (21), (23), отримаємо диференціальні рівняння у векторній формі:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \tilde{z}_{j,k} M_{\Sigma_k} \Delta \mathbf{G}_k - \mathbf{F}_j^{(np)} - \mathbf{F}_j^{(on)} + \sum_{k=1}^n \tilde{z}_{j,k} \mathbf{G}_k &= 0, / j = p, q / , \\ \sum_{k=1}^n \delta_{j,k} M_{\Sigma_k} \Delta \mathbf{G}_k - \Delta \mathbf{r}_j + (1 - \tilde{z}_j) \Delta \mathbf{r}_p + \tilde{z}_j \Delta \mathbf{r}_q + \sum_{k=1}^n \delta_{j,k} \mathbf{G}_k &= 0, / j = \overline{1, n}, j \neq p, q / . \end{aligned}$$

Ці самі рівняння у координатній формі матимуть такий вигляд:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \tilde{z}_{j,k} M_{\Sigma_k} \mathbf{G}_k + \mathbf{G}_j h_{xj} + x_j c_{xj} + \sum_{k=1}^n \tilde{z}_{j,k} \mathbf{G}_k &= 0, \\ \sum_{k=1}^n \tilde{z}_{j,k} M_{\Sigma_k} \mathbf{G}_k + \mathbf{G}_j h_{yj} + y_j c_{yj} + \sum_{k=1}^n \tilde{z}_{j,k} \mathbf{G}_k &= 0, / j = p, q / , \\ \sum_{k=1}^n \delta_{j,k} M_{\Sigma_k} \mathbf{G}_k - x_j + (1 - \tilde{z}_j) x_p + \tilde{z}_j x_q + \sum_{k=1}^n \delta_{j,k} \mathbf{G}_k &= 0, \\ \sum_{k=1}^n \delta_{j,k} M_{\Sigma_k} \mathbf{G}_k - y_j + (1 - \tilde{z}_j) y_p + \tilde{z}_j y_q + \sum_{k=1}^n \delta_{j,k} \mathbf{G}_k &= 0, / j = \overline{1, n}, j \neq p, q / . \end{aligned} \quad (24)$$

Зауважимо, що якщо у деякому перетині  $j=l$  немає АБ, то у рівняннях (24)  $M_{\Sigma_j} = M_l$ ,  $s_{xl} = m_l, 0 r_{l,0} \cos \varphi_{l,0}$ ,  $s_{yl} = m_l, 0 r_{l,0} \sin \varphi_{l,0}$  і в (1)  $j \neq l$ . Таких перетинів може бути від 1 до  $n$ , зокрема АБ можуть бути розташовані тільки в опорах.

**Замкнена система диференціальних рівнянь для дослідження стійкості основних рухів.**

На основних рухах ротор зрівноважений і обертається навколо власної поздовжньої осі і тому узагальнені координати ротора і дисбалансу дорівнюють 0:

$$x_j = 0, y_j = 0, s_{xj} = 0, s_{yj} = 0, / j = \overline{1, n} / .$$

Стійкість основних рухів можна досліджувати за цими узагальненими координатами. Але система рівнянь (24) незамкнена. До неї ще треба додати мінімальну кількість –  $2n$  рівнянь, що є комбінаціями відповідних диференціальних рівнянь руху КВ (1).

Замкнемо систему рівнянь (24). Нехай у кожному АБ однакові КВ (маятники однакові, а кулі чи ролики однакові і рухаються спільною біговою доріжкою) і на них діють однакові сили опору ( $m_{j,i} = m_j$ ,  $r_{j,i} = r_j$ ,  $h_{j,i} = h_j$ ,  $/ i = \overline{1, n_j}, j = \overline{1, n} /$ ). Використовуючи результати роботи [5] з точністю до малих величин другого порядку включно, з рівнянь (1) одержимо:

$$\begin{aligned} k_j (\mathbf{G}_x + 2\omega \mathbf{G}_{yj} - \omega^2 s_{xj}) + h_j / m_j \cdot (\mathbf{G}_x + \omega s_{yj}) &= -m_j n_j / 2 \cdot \{ \mathbf{G}_j [1 - b_j \cos(2\omega t + \vartheta_j)] - \mathbf{G}_j b_j \sin(2\omega t + \vartheta_j) \}, \\ k_j (\mathbf{G}_y - 2\omega \mathbf{G}_{xj} - \omega^2 s_{yj}) + h_j / m_j \cdot (\mathbf{G}_y - \omega s_{xj}) &= m_j n_j / 2 \cdot \{ \mathbf{G}_j b_j \sin(2\omega t + \vartheta_j) - \mathbf{G}_j [1 + b_j \cos(2\omega t + \vartheta_j)] \}, \\ / j &= \overline{1, n} / , \end{aligned} \quad (25)$$

де  $\cos \vartheta_j = b_{j,1} / b_j$ ,  $\sin \vartheta_j = b_{j,2} / b_j$ ,  $b_j = \sqrt{b_{j,1}^2 + b_{j,2}^2}$ ,  $b_{j,1} = 1 / n_j \cdot \sum_{i=1}^n \cos 2\psi_{j,i}$ ,

$b_{j,2} = 1/n_j \cdot \sum_{i=1}^n \sin 2\tilde{\Psi}_{j,i}$ ,  $/ j = \overline{1, n} /$ ;  $\tilde{\Psi}_{j,i}$ ,  $/ i = \overline{1, n_j}, j = \overline{1, n} /$  – сталі значення кутів, що визначають певний основний усталений рух (із сім’ї основних рухів, якщо такі рухи утворюють сім’ю).

Рівняння (25) замикають систему (24).

**Висновки.** Побудовано  $n$ -масову модель незрівноваженого гнучкого ротора на двох в’язко-пружних опорах з АБ. Отримано диференціальні рівняння руху системи та замкнуту систему диференціальних рівнянь для дослідження стійкості основних рухів системи. Зазначені модель і системи диференціальних рівнянь дають змогу вивчати процес зрівноважування АБ гнучких роторів, зокрема визначати критичні швидкості обертання гнучкого ротора, під час переходу через які настає чи втрачається автобалансування, досліджувати швидкість перебігу перехідних процесів, що передують автобалансуванню, оцінювати швидкість настання автобалансування.

1. Нестеренко В.П. Автоматическая балансировка роторов приборов и машин со многими степенями свободы / В.П. Нестеренко. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985. – 84 с. 2. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і виброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами / Г.Б. Філімоніхін. – Кіровоград: КНТУ, 2004. – 352 с. 3. Філімоніхіна І.І. Узагальнений емпіричний критерій стійкості основного руху і його застосування до ротора на двох осесиметричних пружних опорах / І.І. Філімоніхіна, Г.Б. Філімоніхін // *Машинознавство*. – 2007. – №3. – С. 22–27. 4. Філімоніхіна І.І. Застосування функції Гамільтона до визначення умов зрівноваження автобалансирами ротора, здійснюючого просторовий рух / І.І. Філімоніхіна // *Збірник наукових праць КНТУ*, 2007. – Вип. №18 – С. 34–41. 5. Філімоніхін Г.Б. Методика складання диференціальних рівнянь руху роторних систем з автобалансирами і її застосування до системи ротор – масивний корпус - автобалансира / Г.Б. Філімоніхін, В.В. Гончаров // *Збірник наукових праць КНТУ*. – 2009. – Вип. 22. – С. 357–363. 6. Філімоніхін Г.Б. Диференціальні рівняння руху системи, складеної з незрівноваженого ротора з нерухомою точкою, корпуса і автобалансира / Г.Б. Філімоніхін, В.В. Гончаров // *Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин: Загальнодержавний міжвідомчий науково-технічний збірник*. – Вип. 40. – Ч. II – Кіровоград: КНТУ, 2010. – С. 86–93. 7. Філімоніхін Г.Б. Безрозмірні диференціальні рівняння, що описують стійкість основного руху системи, складеної з незрівноваженого ротора з нерухомою точкою, корпуса і автобалансира / Г.Б. Філімоніхін, В.В. Гончаров, І.І. Філімоніхіна // *“Східно-європейський журнал передових технологій”*. – 2011. – Вип. 1/3 (49). – С. 40–44. 8. Філімоніхін Г.Б. Стійкість основних рухів системи – ротор з нерухомою точкою, корпус і автобалансира / Г.Б. Філімоніхін, В.В. Гончаров // *“Східно-європейський журнал передових технологій”*. – 2011. – Вип. 2/3 (50). – С. 18–22. 9. Детинко Ф.М. Об устойчивости работы атобалансира для динамической балансировки / Ф.М. Детинко // *Изв. АН СССР.ОТН. Мех. и машиностр.* – 1956. – № 4. – С. 38–45. 10. Симоновский В.И. Устойчивость и нелинейные колебания роторов центробежных машин / В.И. Симоновский. – Харьков: Изд. “Вища школа”, 1986. – 128 с. 11. Симоновский В.И. Динамика роторов центробежных машин / В.И. Симоновский. – Суми: Вид-во СумДУ, 2002. – 143 с. 12. Гадяка В.Д. Математическая модель ротора турбокомпрессора для исследования несинхронных составляющих вибрации / В.Г. Гадяка, Д.В. Лейких, В.И. Симоновский // *Компрессорное и энергетическое машиностроение*. – 2010. – № 2(20). – С. 48–50. 13. Гадяка В.Д. О некоторых диагностических признаках влияния внутреннего трения на вибрационное состояние ротора турбокомпрессора / В.Г. Гадяка, Д.В. Лейких, В.И. Симоновский // *Газотурбин. Технологии*. – 2009. – № 4(75). – С. 22–25. 14. Лейких Д.В. Ідентифікація причин збудження несинхронних коливань роторів турбокомпресорів і способи зниження їх амплітуд: автореф. дис.... канд. техн. наук: 05.02.09 / Д.В. Лейких; Сумський державний університет. – Суми, 2011. – 24 с. 15. *Опір матеріалів: підручник* / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський; за ред. Г. С. Писаренка. – К.: Вища шк., 1993. – 655 с.