

**В.М. ШАТОХИН, \*Е.А. ЯКОВЛЕВ**

Национальный технический университет “Харьковский политехнический институт”,  
\*Харьковский государственный технический университет строительства и архитектуры

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ВИБРАЦИОННЫХ МОНТАЖНЫХ УСТРОЙСТВАХ И СИНТЕЗ ИХ ПАРАМЕТРОВ**

© Шатохин В.М., Яковлев Е.А., 2011

*Розроблено математичну модель вібраційного монтажного пристрою для складального робота, що дає змогу досліджувати процес пуску механізму, усталені режими, просторові рухи будь-яких точок деталі, яка монтується. Запропоновано двопараметричну модель регульованого запуску електродвигуна з дебалансом, а також алгоритм синтезу параметрів пристрою за власними формами коливань. Наведено результати розрахункових досліджень динамічних процесів під час монтажу конкретної деталі.*

*The mathematical model of vibratory erection device for adjustment robot, which allows research the process of mechanism starting, formed modes, spatial movements of any point assembled detail, is developed. Two-parameter model of the controlled electric motor start with eccentric is offered. The algorithm of device parameter syntheses on vibration natural mode is offered. Results of calculated researches of the dynamic processes at montage of the concrete detail are produced.*

**Постановка проблемы.** Актуальной в разных отраслях промышленности является проблема автоматизация сборки с применением роботов (манипуляторов) для увеличения производительности труда, высвобождения рабочих рук, повышения качества работ, а также при выполнении опасных для здоровья, физически тяжелых и монотонных работ. Одним из перспективных направлений при решении этой задачи является применение так называемых неуправляемых, в частности вибрационных монтажных устройств. Использование их позволяет отказаться при сборке даже неосесимметричных деталей без фасок от дорогостоящих датчиков и сервоприводов, не предъявляет высоких требований к жесткости всей конструкции робота. Сборка осуществляется так. Схват робота “грубо” подводит монтируемую деталь, которая установлена в грейфере вибрационного монтажного устройства, к месту соединения с другой деталью (например, плунжер к гильзе плунжера). Включается монтажное устройство, деталь с грейфером начинают совершать определенные пространственные колебания, при этом происходит сопряжение деталей, даже несмотря на то, что первоначально положение монтируемой детали было неточным. Пространственные колебания грейферу и детали сообщаются электродвигателем с дебалансом, установленным на монтажном устройстве.

**Анализ последних исследований.** Конструктивные особенности вибрационных монтажных устройств проанализированы в работах [1–4]. Там же изложены простейшие приемы выбора параметров механизмов. Моделированию динамических процессов в некоторых устройствах с дебалансными, электромагнитными и механическими виброприводами посвящены работы [5–8].

Созданные образцы сборочных устройств подтвердили их высокую эффективность. Однако недостаточная разработка математических моделей указанных устройств, методов их исследования, оптимального выбора параметров и режимов работы затрудняет совершенствование существующих конструкций и рациональной компоновки аналогичных механизмов.

**Постановка задачи.** Цель работы – построение математических моделей динамических процессов в вибрационных монтажных устройствах, а также разработка алгоритмов синтеза их параметров. Модели должны обладать возможностями исследования движения звеньев механизма и характерных точек монтируемых деталей не только в процессе пуска, но и на установившихся режимах.

**Математическая модель вибрационного монтажного механизма.** На рис. 1 показано схему механизма для сборочного устройства. Конструктивно устройство состоит из нескольких жестких тел, соединенных упругими элементами: 1 – основание для крепления механизма к “руке” манипулятора; 2 – кольцо; 3 – наклонные стержни; 4 – грейфер; 5 – монтируемая деталь; 6 – пластинчатые пружины; 7 – тахометр; 8 – электродвигатель; 9 – дебаланс; 10 – пластина упругой опоры возбудителя, которая изогнута под углом  $45^\circ$  и крепится к кольцу так, чтобы ось электродвигателя образовывала углы в  $45^\circ$  с направлениями, параллельными осям плоских пружин.

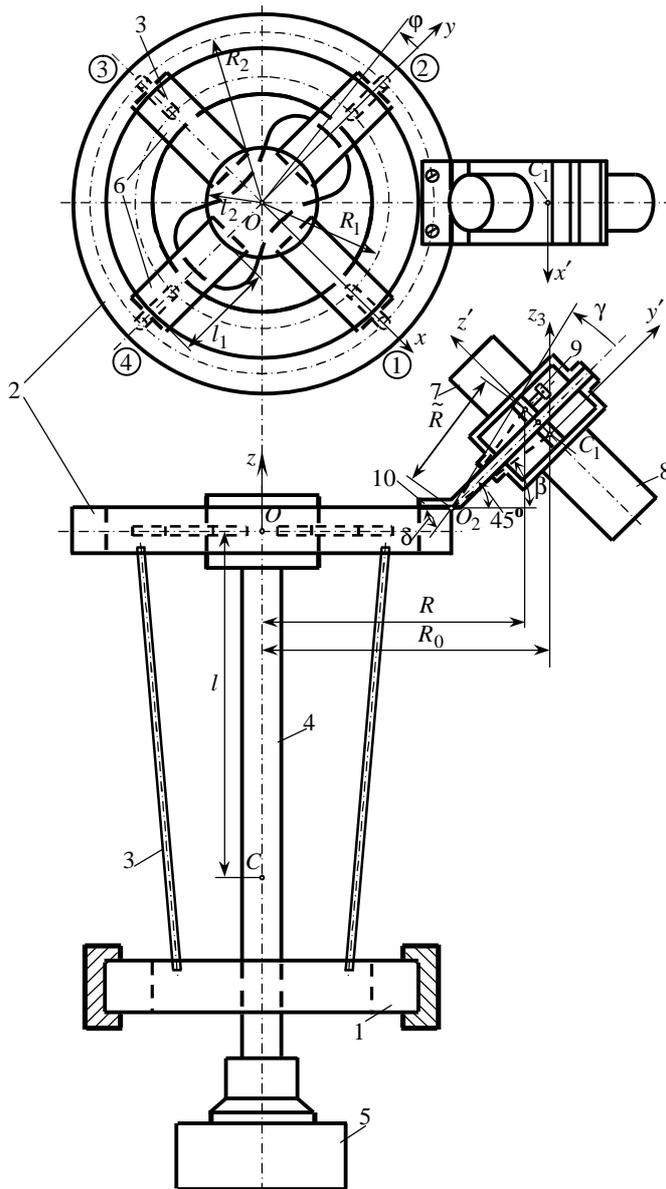


Рис. 1. Схема вибрационного монтажного механизма

грейфера вокруг осей  $Ox_1$  и  $Oy_1$ ; координата  $z_1 = z$  – вертикальное смещение точки подвеса. Эксперименты показали, что на эксплуатационных режимах работы механизма положение возбудителя по отношению к кольцу полностью определяется угловой координатой  $\gamma$ , а его

Для записи дифференциальных уравнений движения используется процедура составления уравнений Лагранжа 2-го рода.

**Обобщенные координаты.** Неподвижную систему координат свяжем со схватом манипулятора, ее начало поместим в плоскости крепления грейфера к плоским пружинам (предполагая, что они статически деформированы). Оси  $Ox$  и  $Oy$  направляем вдоль указанных пружин, а ось  $Oz$  – вертикально вверх. Положение кольца в неподвижной системе координат  $Oxyz$  с точностью до бесконечно малых высшего порядка определяется тремя обобщенными координатами:  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$ . Координаты  $x$  и  $y$  определяют положение центра масс кольца. Координата  $\varphi$  определяет поворот подвижной, жестко связанной с кольцом системы координат  $O_1x_1y_1z_1$ , по отношению к неподвижной.

Можно показать, что положение грейфера по отношению к кольцу с точностью до бесконечно малых высших порядков также определяется тремя обобщенными координатами (рис. 2): координаты  $\vartheta_{x_1}$ ,  $\vartheta_{y_1}$  характеризуют вращение

упругую опору можно моделировать шарниром со спиральной пружиной (точка  $O_2$  на рис. 1), коэффициент жесткости которой легко найти опытным путем.

Таким образом, движение механизма характеризуют семь обобщенных координат:  $x, y, \varphi, \vartheta_{x_1}, \vartheta_{y_1}, z_1, \gamma$ .

Полная **кинетическая энергия системы** в предположении малости колебаний имеет вид:

$$T = m_1 \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} + \frac{J_{z_1} \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_2}{2} \left[ (\dot{x} - l \dot{\vartheta}_{y_1})^2 + (\dot{y} + l \dot{\vartheta}_{x_1})^2 + \dot{\varphi}^2 \right] + \frac{J_{\xi} \dot{\vartheta}_{x_1}^2}{2} + \frac{J_{\eta} \dot{\vartheta}_{y_1}^2}{2} + \frac{J_{\zeta} \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_3}{2} \left[ \left( \dot{x} - R_0 \dot{\varphi} \cos 45^\circ - R^* \dot{\varphi} \sin \beta \cos 45^\circ (\dot{x} + R_0 \dot{\varphi} \cos 45^\circ - R^* \dot{\varphi} \sin \beta \cos 45^\circ)^2 + R^{*2} \dot{\varphi}^2 \cos^2 \beta \right)^2 \right] + \frac{J_{x_3} \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{J_{z_3} \dot{\varphi}^2}{2}.$$

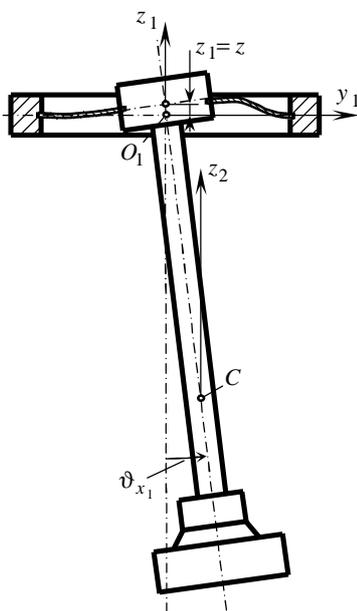


Рис. 2. Обобщенные координаты  $\vartheta_{x_1}, z_1$

Аналогично для **обобщенных восстанавливающих сил** получены такие выражения:

$$Q_x = -4cx; Q_y = -4cy; Q_\varphi = -4cR_0^2 \varphi; Q_{\vartheta_{x_1}} = -\tilde{c} \vartheta_{x_1}; Q_{\vartheta_{y_1}} = -\tilde{c} \vartheta_{y_1}; Q_{z_1} = -4c_1 z_1; Q_\gamma = -c_2 \gamma.$$

**Возмущающие силы и моменты** имеют вид:

$$F_x = \frac{\sqrt{3}}{2} m \dot{\varphi}^2 r \cos(\psi + \xi); F_y = \frac{\sqrt{3}}{2} m \dot{\varphi}^2 r \cos(\psi - \xi); M_{O_1 z_1} = m \dot{\varphi}^2 r R \sin \psi - I_z^{(r)} \dot{\varphi} \cos 45^\circ; M_{O_2 z_4} = -m \dot{\varphi}^2 r \cos \psi \tilde{R} \sin(\delta - 45^\circ).$$

Исследуя установившиеся режимы, необходимо учесть, что  $\psi = \omega t, \dot{\psi} = \omega, \ddot{\psi} = 0$ .

Для рассматриваемых устройств значение имеет интегральный эффект действия сил сопротивления, поэтому для простоты описания **обобщенные силы сопротивления** принимались пропорциональными соответствующим обобщенным скоростям:  $Q_x^* = -\beta_x \dot{x}, Q_y^* = -\beta_y \dot{y}, Q_\varphi^* = -\beta_\varphi \dot{\varphi}, Q_{\vartheta_{x_1}}^* = -\beta_{\vartheta_{x_1}} \dot{\vartheta}_{x_1}, Q_{\vartheta_{y_1}}^* = -\beta_{\vartheta_{y_1}} \dot{\vartheta}_{y_1}, Q_{z_1}^* = -\beta_{z_1} \dot{z}_1, Q_\gamma^* = -\beta_\gamma \dot{\gamma}$ . Неточность в задании коэффициентов демпфирования  $\beta_x, \beta_y, \beta_\varphi, \beta_{\vartheta_{x_1}}, \beta_{\vartheta_{y_1}}, \beta_{z_1}, \beta_\gamma$  при анализе переходных режимов не имеет существенного значения. На установившихся режимах, близких к резонансным, для выбора коэффициентов демпфирования целесообразно использовать экспериментальные данные по вынужденным колебаниям прототипов конструкции.

В приведенных формулах используются такие обозначения:  $m_1$  – масса кольца;  $J_{z_1}$  – момент инерции кольца относительно вертикальной оси;  $m_2$  – масса рейфера и детали;  $J_\xi, J_\eta, J_\zeta$  – моменты инерции рейфера относительно главных центральных осей инерции;  $l$  – расстояние от точки подвеса до центра масс рейфера;  $m_3$  – масса возбудителя;  $R_0$  – расстояние от центра масс

возбудителя до оси механизма;  $R^*$  – расстояние от центра масс возбудителя до оси шарнира;  $\beta$  – угол между направлением  $O_2C_1$  и горизонталью;  $J_{x'}$ ,  $J_{z_3}$  – моменты инерции возбудителя соответственно относительно осей  $C_1x'$  и  $C_1z_3$ ;  $R_2$  – радиус большей окружности, на которой закреплены концы стержней ( $R_1$  – радиус меньшей окружности) (см. рис. 1);  $c$  – коэффициент жесткости стержня;  $\tilde{c}$  – эквивалентный коэффициент жесткости, соответствующий обобщенным координатам  $\vartheta_{x_1}$ ,  $\vartheta_{y_1}$ ;  $c_1$  – жесткость на изгиб четырех плоских пружин;  $c_2$  – экспериментальное значение коэффициента жесткости;  $m$  – масса дебаланса;  $r$  – расстояние от центра масс дебаланса до оси электродвигателя;  $I_z^{(r)}$  – суммарный момент инерции роторов электромотора и тахометра относительно оси  $z'$ ;  $R$  – расстояние от оси механизма до точки пересечения плоскости движения дебаланса с осью электромотора;  $\tilde{R}$  – расстояние от оси шарнира  $O_2$  до точки пересечения оси электромотора и плоскости движения дебаланса (см. рис. 1).

**Дифференциальные уравнения движения механизма.** Выполнив стандартные операции по составлению уравнений Лагранжа второго рода, в предположении малости колебаний (громоздкие выкладки здесь не приводим), уравнения движения механизма запишем в виде:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{P}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{q} = [x, y, \varphi, \vartheta_{x_1}, \vartheta_{y_1}, z_1, \gamma]^T$  – вектор обобщенных координат (т – знак транспонирования);  $\mathbf{M}$  – матрица инерции;  $\mathbf{B} = \text{diag}\{\beta_x, \beta_y, \beta_\varphi, \beta_{\vartheta_{x_1}}, \beta_{\vartheta_{y_1}}, \beta_{z_1}, \beta_\gamma\}$  – диагональная матрица демпфирования;  $\mathbf{C} = \text{diag}\{4c, 4c, 4cR_2^2, \tilde{c}, \tilde{c}, 4c_1, c_2\}$  – матрица жесткости;  $\mathbf{P} = [F_x, F_y, M_{O_1z_1}, 0, 0, 0, M_{O_2z_4}]^T$  – вектор возмущения.

**Расчетно-экспериментальные исследования динамических процессов в вибрационном монтажном механизме.** Для уточнения параметров модели использовались определенные в эксперименте частоты и формы собственных колебаний.

**Алгоритм синтеза по формам колебаний.** Особенность устройства состоит в том, что оно работает вблизи резонанса. Это обстоятельство дает возможность, решая задачи синтеза, пользоваться расчетами собственных колебаний, так как форма последних близка к форме резонансных колебаний.

Конструктивные соображения требуют, чтобы на эксплуатационном режиме изменения координат  $\vartheta_{x_1}$ ,  $\vartheta_{y_1}$  и  $\varphi$  были максимальными (для облегчения и ускорения монтажа), а изменения координат  $x$  и  $y$  – минимальными (с целью уменьшения вибраций всего монтажного устройства). Задача поэтому ставится так. Необходимо рассмотреть формы собственных колебаний модели механизма и благоприятные из них “улучшить” в указанном выше смысле, варьируя конструктивные параметры.

Возможный путь решения задачи – использование идей теории чувствительности [9].

Пусть после решения задачи о собственных значениях и собственных векторах

$$(-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{C})\mathbf{h} = 0 \quad (2)$$

для уравнения

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = 0, \quad (3)$$

соответствующего (1), оказалось целесообразным собственному вектору  $\mathbf{h}_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ; в нашем случае  $n = 7$ ) придать более благоприятную конфигурацию  $\mathbf{h}_i^*$ . Обозначим изменение  $\mathbf{h}_i$  через

$$\Delta \mathbf{h}_i = \mathbf{h}_i^* - \mathbf{h}_i. \tag{4}$$

Считая  $\Delta \mathbf{h}_i$  достаточно малым, рассмотрим частные производные вектора  $\mathbf{h}_i$  по варьируемым параметрам  $p_k$  ( $k=1, m$ ), тогда с точностью до малых второго порядка можно записать

$$\Delta \mathbf{h}_i = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \mathbf{h}_i}{\partial p_k} \Delta p_k, \tag{5}$$

где  $\Delta p_k$  – изменение  $k$ -го параметра.

Справедливым является очевидное разложение

$$\frac{\partial \mathbf{h}_i}{\partial p_k} = \sum_{j=1}^n a_{ijk} \mathbf{h}_j \quad (j=1, n). \tag{6}$$

Если теперь выражение

$$(-\omega_i^2 \mathbf{M} + \mathbf{C}) \mathbf{h}_i = 0$$

продифференцировать по параметру  $p_k$  и полученное выражение умножить слева на  $\mathbf{h}_i^T$  ( $l \neq i$ ), то с учетом (6) получим

$$a_{ilk} = \frac{\mathbf{h}_i^T \left( \frac{\partial \mathbf{C}_k}{\partial p_k} - \omega_i^2 \frac{\partial \mathbf{M}_k}{\partial p_k} \right) \mathbf{h}_i}{(\omega_i^2 - \omega_l^2) \mathbf{h}_i^T \mathbf{M} \mathbf{h}_i}. \tag{7}$$

Если  $l = i$ , то целесообразно положить  $a_{iik} = 0$ .

С учетом (6) выражению (5) можно придать вид

$$\Delta \mathbf{h}_i = \mathbf{S} \Delta \mathbf{p}, \tag{8}$$

где  $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{ij1} h_{1j} & \mathbf{L} & \sum_{j=1}^n a_{ijm} h_{1j} \\ \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij1} h_{nj} & \mathbf{L} & \sum_{j=1}^n a_{ijm} h_{nj} \end{bmatrix}$  – матрица чувствительности;  $\Delta \mathbf{p} = [\Delta p_1, \mathbf{K}, \Delta p_m]^T$  – вектор

изменения параметров.

Выражение (8) можно рассматривать как уравнение относительно  $\Delta \mathbf{p}$ . В зависимости от

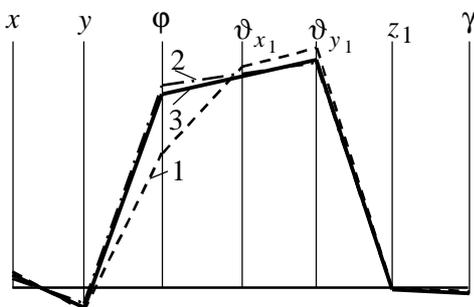


Рис. 3. Синтез пятой формы колебаний: 1 – исходная; 2 – желаемая; 3 – после синтеза

соотношения для  $n$  и  $m$  для  $\Delta \mathbf{p}$  имеют место такие выражения:

$$\Delta \mathbf{p} = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \Delta \mathbf{h}_i \quad (m < n); \tag{9}$$

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{S}^{-1} \Delta \mathbf{h}_i \quad (m = n); \tag{10}$$

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{S}^T (\mathbf{S} \mathbf{S}^T)^{-1} \Delta \mathbf{h}_i \quad (m > n). \tag{11}$$

Формула (9) получена методом наименьших квадратов. С помощью выражения (11) из бесчисленного множества решений выделяется единственное, обладающее свойством  $\|\Delta \mathbf{p}\|_2 \Rightarrow \min$ .

Новое значение вектора параметров, отвечающего измененной форме, приближенно представим в виде

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \Delta \mathbf{p}, \quad (12)$$

где  $\mathbf{p}_0$  – исходный вектор параметров.

В формуле (5)  $\Delta \mathbf{h}_i$  предполагается малым, что практически редко выполняется. Для больших значений  $\Delta \mathbf{h}_i$  можно воспользоваться модификацией изложенного алгоритма [3].

На рис. 3 приведены результаты оптимизации пятой формы колебаний. В качестве варьируемых параметров брали диаметр стержня  $d_c$  и толщину плоской пружины  $h$ , а в качестве желаемой формы колебаний выбирали расчетную форму, в которой значение координаты  $\varphi$  увеличено на 30 % и настолько же процентов уменьшены значения координат  $x$  и  $y$ ; другие же координаты брали без изменений. Из рисунка видно, что форма, полученная после оптимизации, имеет более благоприятную конфигурацию, чем исходная, особенно для координаты  $\varphi$ .

**Исследования установившихся и переходных режимов.** Построенная полная модель (1) предоставляет возможность анализировать динамические процессы как пуска механизма, так и установившиеся режимы, изучать геометрию движений звеньев устройства и монтируемых деталей, что составляет основу полноценного решения задач синтеза параметров устройства.

При формировании компонентов вектора возмущения принимали, что зависимость угловой скорости ротора электродвигателя от времени при включении устройства имеет вид, приведенный на графике (рис. 4). Для интервала времени  $0 \leq t \leq t_0$  взят квадратичный закон изменения угловой скорости, что хорошо согласуется с данными экспериментов. Зависимость угла поворота ротора электродвигателя от времени оказывается при этом такой:

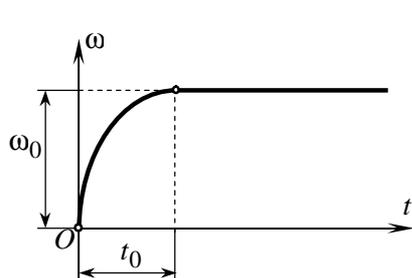


Рис. 4. Закон изменения угловой скорости электродвигателя при пуске

$$\psi = \begin{cases} -\frac{\omega_0(t-t_0)^3}{3t_0^2} + \omega_0 t - \frac{\omega_0 t^3}{3}, & t \leq t_0; \\ \frac{2}{3}\omega_0 t_0 + \omega_0(t-t_0), & t > t_0, \end{cases}$$

где  $\omega_0$  – угловая скорость установившегося режима (управляемый параметр);  $t_0$  – время установления.

Характер изменения обобщенных координат  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$ ,  $\vartheta_{x_1}$  при пуске устройства иллюстрируют рис. 5–8. Расчеты выполнены при  $t_0 = 2$  с,  $\omega_0 = 152,05$  рад/с ( $n_0 = 1452$  мин<sup>-1</sup>). В этом случае реализуются резонансные колебания вблизи 5-й собственной частоты механизма ( $\nu_5 = 24,2$  Гц), когда значительно изменяются координаты  $\vartheta_{x_1}$ ,  $\vartheta_{y_1}$  и достаточно существенны

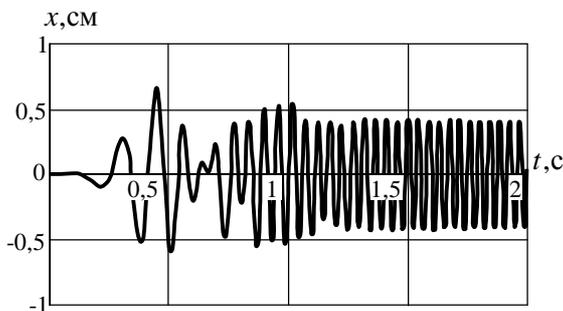


Рис. 5. Закон изменения координаты  $x$

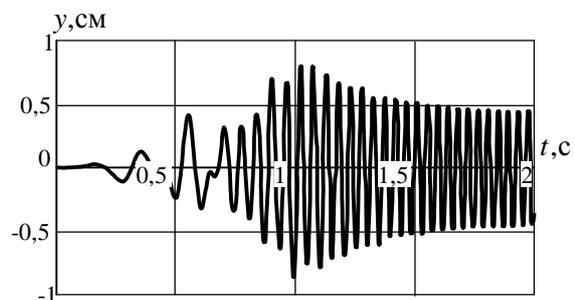


Рис. 6. Закон изменения координаты  $y$

изменения координат  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$ . Такой режим способствует быстрому сопряжению деталей, что подтверждается опытным путем.

Пространственные движения одной из характерных точек основания монтируемой детали, представленного на рис. 9 (координаты даны в миллиметрах), показаны на рис. 10.

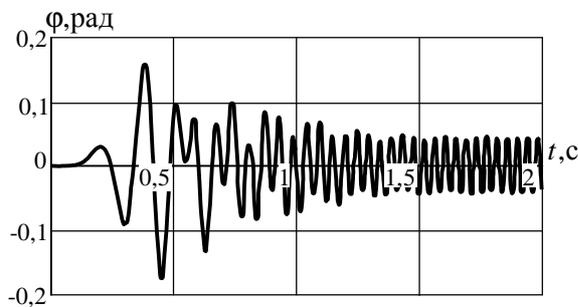


Рис. 7. Закон изменения угла поворота  $\varphi$

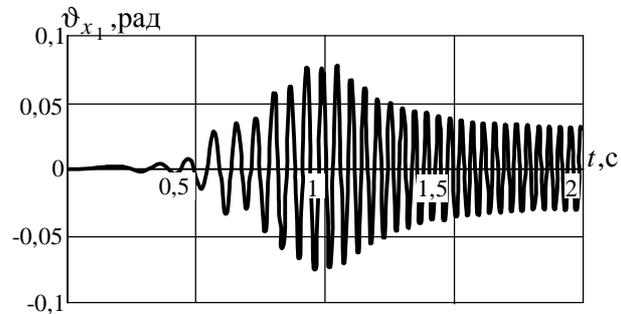


Рис. 8. Закон изменения угла поворота  $\varphi_{x_1}$

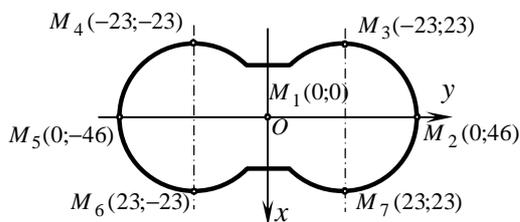


Рис. 9. Расположение характерных точек основания монтируемой детали

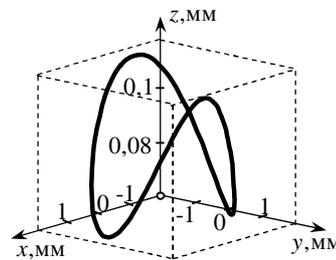


Рис. 10. Траектория движения точки  $M_1$

### Выводы.

1. Построена полная математическая модель вибрационного монтажного устройства для сборочного робота.
2. Изложен алгоритм синтеза параметров устройства по собственным формам колебаний.
3. Предложена двухпараметрическая модель регулируемого запуска электродвигателя с дебалансом.
4. Приведены результаты расчетных исследований динамических процессов при пуске механизма и на установившихся режимах.
5. Рассмотрены пространственные движения характерных точек монтируемой детали.
6. Изложенный подход перспективен для создания и совершенствования аналогичных конструкций.

1. Jcobi P. *Fügemechnismen für die automatisierte Montage mit Industrierobotern.*—Karl-Marx-Stadt, *Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule*, 1982. — S. 96. 2. Шатохин В.М., Якоби П. *Синтез параметров вибрационного монтажного устройства для сборочного робота // Теория механизмов и машин.* — Харьков: Вища школа, 1985. — Вып. 38. — С. 3–13. 3. Шатохин В.М. *Анализ и параметрический синтез нелинейных силовых передач машин: моногр.* — Харьков: НТУ “ХПИ”, 2008.— 456 с. 4. *Вибрации в технике: справочник. В 6-ти т. / Под ред. Э.Э. Лавендела.* — М: Машиностроение, 1981.— т. 4: *Вибрационные процессы и машины.*— 510 с. 5. Ланець О.С. *Високо-ефективні міжрезонансні вібраційні машини з електромагнітним приводом (Теоретичні основи та практика створення): моногр.* — Львів: Видавництво Національного університету “Львівська політехніка”, 2008. — 324 с. 6. Шатохин В.М. *Синтез параметров вибрационного монтажного устройства при вынужденных нелинейных колебаниях // Вісник Інженерної академії України.*

Спеціальний випуск. – К.: Інженерна академія України, 2000. – С. 407–410. 7. Зайцев А.И., Шатохин В.М. Синтез параметров вибрационных монтажных устройств по собственным формам колебаний // Вибрації в техніці та технологіях. – 2007. – № 2 (47). – С. 21–25. 8. Лобзов Б.А., Судник Ф.А. К расчету режимов колебаний при вибрационной сборке // В кн.: Автоматизация производственных процессов в машиностроении и приборостроении. – Рига: Зинатне, 1989. – Вып. 6. – С. 33–42. 9. Charles W. White, Bruce D. Maitum. Eigensolution sensitivity to parametric model perturbations. – The shock and vibration bulletin, 1996, 46, p. 123–133.

УДК 534.1

М.П. ЯРОШЕВИЧ, В.М. ТИМОЩУК, А.В. СИЛИВОНЮК

Луцький національний технічний університет

## САМОСИНХРОНІЗАЦІЯ ДЕБАЛАНСНИХ ЗБУДНИКІВ З КРАТНИМИ ЧАСТОТАМИ ОБЕРТАННЯ У ВІБРАЦІЙНИХ МАШИНАХ З ПЛОСКИМ РУХОМ РОБОЧОГО ОРГАНА

© Ярошевич М.П., Тимощук В.М., Силивонюк А.В., 2011

*Розглянуто задачу про кратну самосинхронізацію дебалансних віброзбудників у вібраційних машинах з плоским характером руху робочого органа.*

*Problem of disbalanced vibroexciters with multiple self-synchronization is regarded. The work of vibroexciters in vibration machines with plane system of moving body is examined.*

**Вступ.** Для створення високоефективних і надійних вібромашин важливе значення має явище самосинхронізації механічних віброзбудників. Його з успіхом використовують у найрізноманітніших вібромашинах, які серійно випускають у багатьох країнах світу. Однак можливості практичного застосування самосинхронізації ще далеко не використані: великого поширення набули лише вібромашини з двома збудниками, що самосинхронізуються; приклади практичного використання самосинхронізації збудників, що обертаються з кратними частотами, невідомі.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Нині явище динамічної синхронізації вивчене достатньо повно, розроблено теорію та методи розрахунку вібраційних машин із збудниками, що самосинхронізуються [1–3]. Разом з тим, у теорії синхронізації існують задачі, названі “непростими”, що потребують додаткових досліджень: зокрема, задачі про синхронізацію збудників, одні з яких обертаються з кутовою швидкістю, кратною кутовій швидкості інших [1, 3, 4]. У небагатьох роботах, що стосуються кратної самосинхронізації віброзбудників, розглядають лише системи з одним коливальним ступенем вільності тримкого тіла або дуже спрощені системи з кількома ступенями вільності: зокрема, у роботі [3] нехтують навіть жорсткістю пружної підвіски тримкого тіла.

**Метою роботи** є розширення практичного використання явища самосинхронізації дебалансних віброзбудників у вібраційних машинах з плоским характером руху робочого органа.

**Виклад основного матеріалу.** Нехай три дебалансні віброзбудники симетрично розміщені на пружно підвішеному тримкому твердому тілі, яке може здійснювати малі плоскі коливання; площина осей обертання усіх збудників проходить крізь центр мас тримкого тіла; вісь одного із збудників збігається з центром мас тримкого тіла (рис. 1); усі збудники приводяться в рух від незалежних асинхронних електродвигунів та обертаються в однаковому напрямку.