

В.С. ЛОВЕЙКІН, Ю.О. РОМАСЕВИЧ

Національний університет біоресурсів і природокористування України

ОПТИМІЗАЦІЯ РОЗГОНУ ОДНОМАСОВИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ ПРЯМИМ ВАРІАЦІЙНИМ МЕТОДОМ

© Ловейкін В.С., Ромасевич Ю.О., 2011

Наведено методику розв'язання оптимізаційної задачі за допомогою прямого варіаційного методу, який дозволяє врахувати вимоги, які ставляться до режимів руху механічних одномасових систем. Проаналізовано результати та встановлено, що збільшення плавності руху системи впливає на збільшення величини критерію.

The brought methods of the decision optimization problems by means of direct variational method, which allows to take into account requirements, which are put to mode of the motion one-mass mechanical systems. The analyzed results and is fixed that increase to smothnesses of the moving the system influences the value criterion upon increase.

Постановка проблеми. Сучасне виробництво характеризується зростаючими вимогами щодо якості руху різноманітних механізмів і машин. Під якістю руху розуміють точність виконання тієї чи іншої операції, енерговитрати на її виконання, тривалість руху та інші показники. Звичайно, необхідно, щоб бажані показники були максимальними, а небажані – мінімальними. Тому ці задачі формуються як оптимізаційні, у яких показники руху механічної системи є критеріями оптимізації.

Для більшості промислових машин (роботи, вантажопідйомні машини, верстати, мобільні транспортні засоби тощо) робочі органи у процесі руху на початковій стадії моделювання (у першому наближенні) можна представити у вигляді руху матеріальної точки з деякою (приведеною) масою. У цьому дослідженні буде проведена оптимізація саме одномасових механічних систем.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Для оптимізації режимів руху механічних систем використовуються різноманітні фундаментальні теорії оптимального керування: варіаційне числення [1], принцип максимуму Л.С. Понтрягіна [2], динамічне програмування [3].

Функція, яка доставляє екстремум критерію оптимізації (функціоналу) у варіаційному численні, шукається у класі неперервних функцій. При цьому режими руху механічних систем характеризуються плавністю [4]. На відміну від цього оптимізація руху механізмів, проведена за допомогою принципу максимуму, дає змогу отримати функції керування з характерним „релейним” перемиканням, що є небажаним. Однак принцип максимуму дає змогу враховувати різноманітні обмеження на керування та інші кінематичні функції руху механізму [5].

Постановка мети та задач дослідження. Метою приведеного дослідження є оптимізація розгону механізму, який моделюється одномасовою механічною системою при врахуванні обмежень на динамічну складову приводного зусилля. Для досягнення поставленої мети ставляться такі задачі: 1) розв'язати оптимізаційну задачу за допомогою варіаційного числення та проаналізувати результат; 2) сформулювати вимоги до закону руху механічної системи; 3) розв'язати варіаційну задачу із врахуванням вимог за допомогою нового прямого варіаційного методу; 4) проаналізувати отримані результати.

Виклад основного матеріалу. Для оптимізації режиму руху одномасової механічної системи необхідно забезпечити мінімум критерію:

$$I = \int_0^{t_1} F_{дин}^2 dt = \int_0^{t_1} (m_{прив} \ddot{x})^2 dt \rightarrow \min, \quad (1)$$

де $F_{дин}$ – динамічна складова приводного зусилля; $m_{прив}$ – приведена до поступального руху маса механічної системи; x – координата механічної системи (точка над символом означає диференціювання за часом); t – час; t_1 – тривалість розгону механічної системи.

Пояснимо вибір критерію (1). Мінімізація цього функціоналу дасть змогу зменшити номінальний момент приводного механізму механічної системи, що, своєю чергою, зменшить його габарити і вартість. Крім того, для асинхронних електродвигунів еквівалентний момент приблизно пропорційний еквівалентному струму, яким визначаються електричні втрати у приводі. Отже, мінімум критерію (1) відповідає мінімуму втрат у обмотках двигуна [5].

Умовою екстремуму інтегральних функціоналів є рівняння Ейлера–Пуассона [1], яке для критерію (1) запишеться так:

$$\frac{iv}{x} = 0. \quad (2)$$

Для знаходження розв’язку рівняння (2) використаємо симетричні крайові умови:

$$\begin{cases} x(0) = \dot{x}(0) = 0; \\ x(t_1) = \frac{vt_1}{2}; \dot{x}(t_1) = v. \end{cases} \quad (3)$$

Забігаючи наперед, скажемо, що саме такі крайові умови забезпечують глобальний мінімум функціоналу (1). Розв’язок крайової задачі (2)-(3) має такий вигляд:

$$x = \frac{vt^2}{2t_1}, \quad (4)$$

при цьому динамічна складова приводного зусилля буде константою:

$$F_{дин} = \frac{m_{прив}v}{t_1} = \text{const}, \quad (5)$$

що означає, що на початку та у кінці руху на механічну систему діє ненульове зусилля. Це призводить до ударів у кінематичних зачепленнях приводу, їх зношування, збільшення пускових струмів у двигуні, що є небажаним. Необхідно прагнути до „пом’якшення” режимів руху, тобто до плавного наростання та зменшення зусилля. Крім того, величина приводного зусилля не повинна перевищувати деякої величини, наприклад, максимального моменту в асинхронному двигуні. Цю вимогу формують так:

$$F_{дин} \leq F_{max}, \quad (6)$$

де F_{max} – максимальне приводне зусилля, що діє на механічну систему.

Для врахування поставлених вимог до руху механічної системи використаємо наближений метод розв’язання варіаційної задачі (1). Мінімум критерію (1) будемо шукати на деякій функції. Знайдемо цю функцію. Для цього розв’яжемо диференціальне рівняння:

$$\frac{xvii}{x} = 0, \quad (7)$$

при таких крайових та додаткових умовах:

$$\begin{cases} x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0; \\ \ddot{x}\left(\frac{t_1}{2}\right) = \frac{F_{max}}{m_{прив}}; \quad \ddot{x}\left(\frac{t_1}{2}\right) = x^{IV}\left(\frac{t_1}{2}\right) = \dots = x^{XIII}\left(\frac{t_1}{2}\right) = 0; \\ \dot{x}(t_1) = v, \quad \ddot{x}(t_1) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Пояснимо вибір саме таких крайових умов. Початкові та кінцеві крайові умови характеризуються нульовими прискореннями. Отже, перша вимога виконується. Додаткові умови поставлені посередині інтервалу розгону системи встановлюють рівність прискорення деякій величині $\ddot{x}\left(\frac{t_1}{2}\right) = \frac{F_{max}}{m_{прив}}$. При цьому динамічне зусилля посередині інтервалу руху дорівнює F_{max} .

Нульові вищі похідні посередині інтервалу руху формують характерну „площадку” графіка динамічного зусилля або пропорційної йому величини – прискорення (це буде видно на графіку), тобто майже незмінності функції вліво та вправо від точки $t = \frac{t_1}{2}$.

Зазначимо, що збільшення порядку похідної у точці $t = \frac{t_1}{2}$ наближає графік функції динамічної складової приводного зусилля до прямої, яка описується рівнянням (5) (при цьому приймається $F_{дин} = F_{max}$), а величина функціоналу (1) наближається до глобального мінімуму. Однак цього мінімуму ніколи не буде досягнуто, оскільки у крайових умовах присутні додаткові умови, яких немає в умовах (3): рівність нулю прискорень на початку та у кінці руху системи. Функція динамічної складової приводного зусилля дорівнює F_{max} лише у точці $t = \frac{t_1}{2}$ і ніде не перевищує його. Отже, виконана друга умова (6).

Не будемо наводити розв’язок крайової задачі (7)–(8). Запишемо лише значення функціоналу за виразом (1), яке йому відповідає:

$$I = \frac{2}{6525} (9408F_{max}^2 t_1 - 18760F_{max} m_{прив} v + \frac{12675m_{прив}^2 v^2}{t_1}). \quad (9)$$

Перетворимо вираз (9). Для цього за формулою (5) подамо тривалість розгону системи, замінивши динамічне зусилля $F_{дин}$ на максимальне F_{max} : $t_1 = \frac{m_{прив} v}{F_{max}}$. Очевидно, що яким би виразом не описувався наближений до оптимального режим руху системи, тривалість її розгону буде більша ніж тривалість руху системи за законом (4). Тому можемо записати:

$$t_1 = \frac{nm_{прив} v}{F_{max}}, \quad (10)$$

де n – деякий коефіцієнт.

Підставимо вираз (10) до формули (9) та отримаємо:

$$I = \frac{2F_{max} m_{прив} v}{6525} (12675 + 56n[-335 + 168n]). \quad (11)$$

Знайдемо таке значення коефіцієнта n , за якого вираз (11) набуває мінімуму. Для цього розв'яжемо рівняння:

$$\frac{\partial I}{\partial n} = 0. \tag{12}$$

Розв'язок рівняння (12) має такий вигляд:

$$n = \frac{65}{56}. \tag{13}$$

Отже, тривалість розгону системи за наближеним до оптимального законом руху на 16% довша. Враховуючи вирази (10) та (13), знайдемо значення функціоналу (11):

$$I = \frac{286m_{прив}^2 v}{261t_1} \approx 1,096 \frac{m_{прив}^2 v}{t_1}, \tag{14}$$

яке ненабагато відрізняється від глобального мінімуму, що дорівнює $\frac{m_{прив}^2 v^2}{t_1}$.

Підставляючи вирази (10) та (13) у розв'язок крайової задачі (7)–(8), можемо знайти наближений розв'язок оптимізаційної задачі (1). Зазначимо, що отриманий вираз не міститиме величини t_1 , але міститиме величину F_{max} . Тобто задаючи обмеження на максимальне зусилля, ми однозначно отримаємо мінімальну тривалість розгону механічної системи. Цим отриманий закон руху нагадує закони руху механічних систем, знайдених за допомогою принципу максимуму Понтрягіна. Зазначимо, що мінімум функціоналу (1) шукають у дуже вузькому класі функцій: цей клас функцій можна отримати, якщо розв'язати крайову задачу (7)–(8) та підставити у розв'язок вираз (10). У результаті отримаємо клас функцій з одним параметром n . Однак такий клас містить наперед задані властивості: нульові другі похідні функції в околах крайніх точок та неперевикнення функцією другої похідної встановленого обмеження. Для синтезованої функції та її вищих похідних включно до третьої побудуємо графіки функцій (рис. 1) при таких параметрах: $F_{max} = 100$ Н, $v = 1$ м/с, $m_{прив} = 100$ кг.

Аналізуючи графік прискорення механічної системи (рис. 1, в), зазначимо, що він плавно змінюється і на всьому інтервалі пуску не перевищує величини $\frac{F_{max}}{m_{прив}}$. Графік ривка механічної

системи (рис. 1, г) починається та закінчується нульовими значеннями, хоча ми не ставили таких крайових умов (8). Очевидно, нульові початкові та кінцеві значення ривка з'являються у разі оптимізації значення функціоналу (12)–(13). Це наводить на думку, що оптимізація функціоналу (1) таким способом дає змогу отримувати нульові вищі похідні у крайніх точках. Якщо це так, то можна отримати плавні закони руху при постановці „жорстких” крайових умов: тобто без нульових других похідних у крайніх точках. Ці крайові умови запишуться так:

$$\begin{cases} x(0) = \dot{x}(0) = 0; \\ \ddot{x}(\frac{t_1}{2}) = \frac{F_{max}}{m_{прив}}; \quad \overset{IV}{\ddot{x}}(\frac{t_1}{2}) = \overset{IV}{x}(\frac{t_1}{2}) = \dots = \overset{XV}{x}(\frac{t_1}{2}) = 0; \\ \ddot{x}(t_1) = v. \end{cases} \tag{15}$$

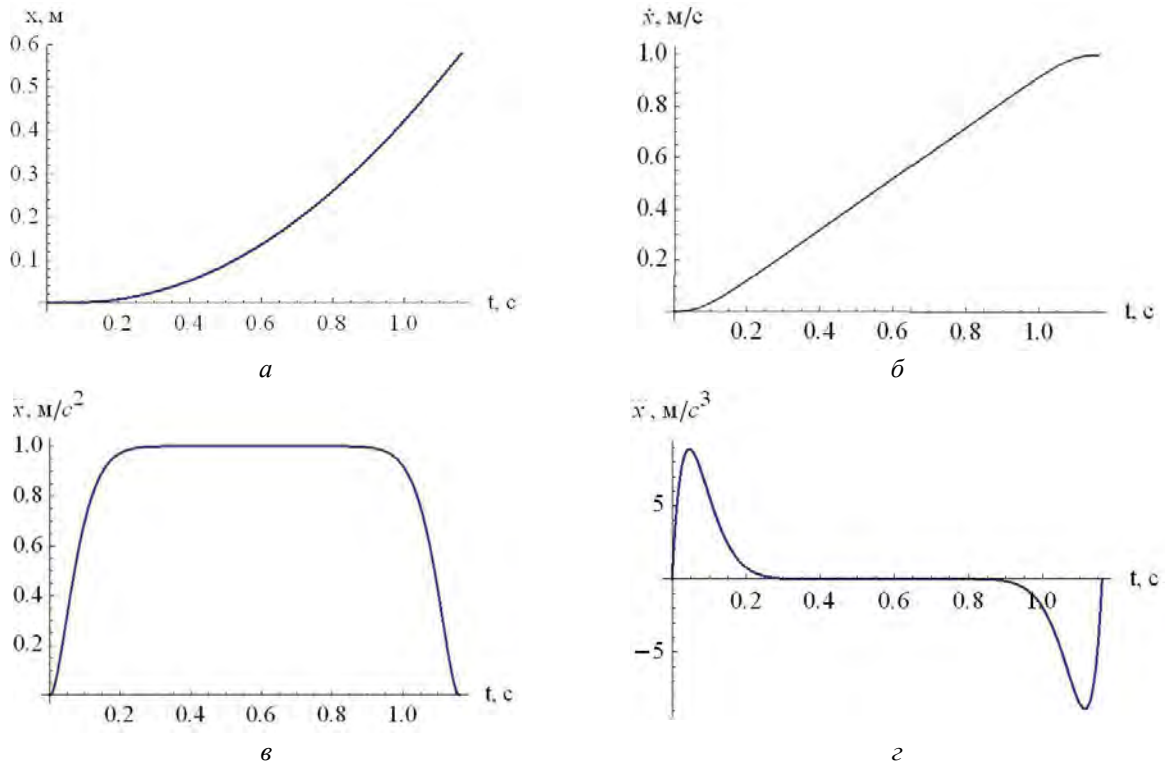


Рис. 1. Графіки функцій переміщення (а), швидкості (б), прискорення (в) та ривка (г) механічної системи

Зазначимо, що ми не будемо змінювати порядок диференціального рівняння (7), для якого ставляться крайові умови (15). Тобто розв'язки крайових задач (7)–(8) та (7), (15) належатимуть одному класу функцій.

Не будемо детально зупинятись на процесі наближеного розв'язування варіаційної задачі, запишемо лише основні результати. Тривалість розгону для цього режиму становить:

$$t_1 = \frac{15 m_{прив} v}{14 F_{max}}. \quad (16)$$

Функціонал цієї задачі дорівнює:

$$I = \frac{30 m_{прив}^2 v}{29 t_1} \approx 1,035 \frac{m_{прив}^2 v}{t_1}. \quad (17)$$

Це значення дуже близьке до глобального мінімуму функціоналу.

Для отриманих законів руху механічної системи за тих самих параметрів, що і для попередньої задачі (графіки на рис. 1), побудуємо графіки функцій (рис. 2).

Аналіз графіків, наведених на рис. 2, підтверджує зроблене припущення відносно того, що протягом процедури оптимізації значення функціоналу з'являються нульові вищі похідні у крайніх точках руху механічної системи: графік прискорення має нульові початкове та кінцеве значення.

Закон руху механічної системи, графіки якого зображено на рис. 2, не виключає виникнення у передачах „м'яких” ударів, оскільки ривок системи не має нульових початкових та кінцевих значень. Тому доцільно оптимізувати рух системи та отримати такий закон руху, за якого не тільки ривок, а й похідна ривка на початку та у кінці руху системи дорівнювали нулю. Такі закони руху будуть характеризуватись надзвичайно високою плавністю руху механічної системи. Поставимо крайові умови, які забезпечуватимуть високу плавність руху:

$$\begin{cases} x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = \dddot{x}(0) = 0; \\ \frac{t_1}{2} = \frac{F_{max}}{m_{прив}}; \quad \frac{t_1}{2} = x^{IV}(\frac{t_1}{2}) = \dots = x^{XI}(\frac{t_1}{2}) = 0; \\ \dot{x}(t_1) = v, \quad \ddot{x}(t_1) = \dddot{x}(t_1) = 0. \end{cases} \quad (18)$$

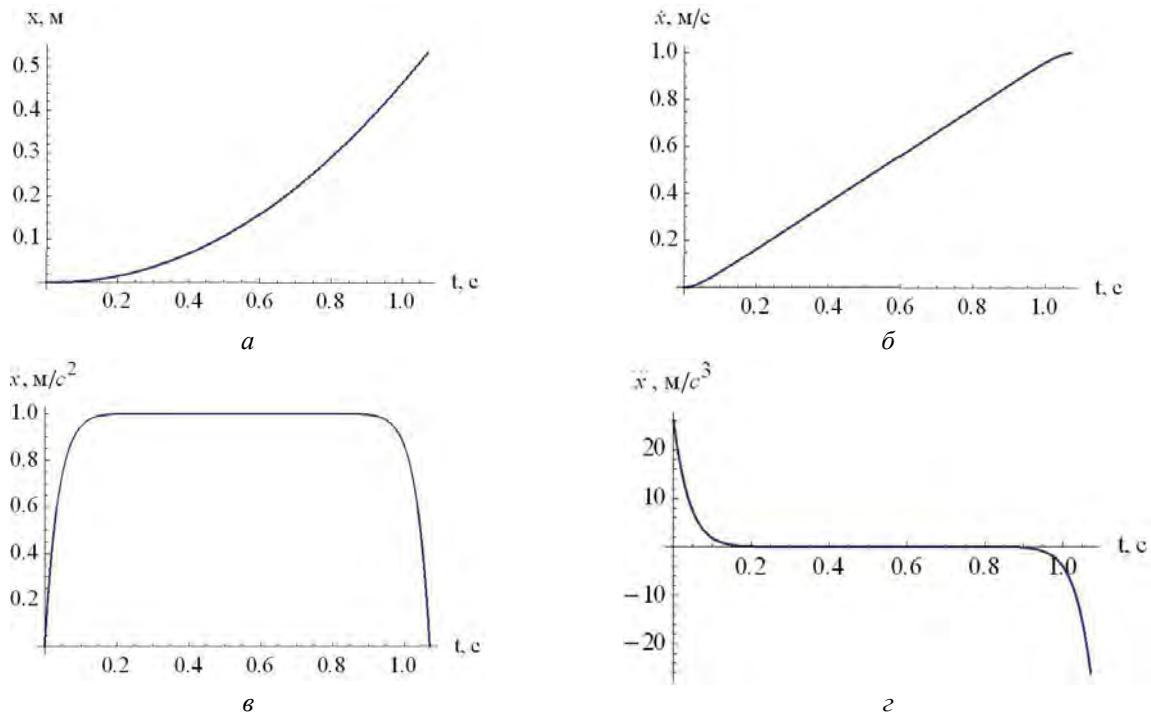


Рис. 2. Графіки функцій переміщення (а), швидкості (б), прискорення (в) та ривка (г) механічної системи

Розв’язання крайової задачі з подальшою мінімізацією значення функціоналу (1) дає такі результати: тривалість руху системи дорівнює

$$t_1 = \frac{143 m_{прив} v}{112 F_{max}}; \quad (19)$$

значення функціоналу дорівнює

$$I = \frac{247676 m_{прив}^2 v}{210105 t_1} \approx 1,179 \frac{m_{прив}^2 v}{t_1}. \quad (20)$$

Наведемо графіки функцій для отриманих законів руху системи (рис. 3).

Аналіз графіків, наведених на рис. 1–3, показує, що такі закони руху можна використовувати для різноманітних технологічних процесів з вимогами відносно плавності руху. Однак збільшення плавності руху призводить до збільшення функціоналу, що є небажаним.

Висновки. На основі проведених досліджень можна зробити такі висновки:

- 1) запропоновано новий прямий спосіб розв’язання варіаційних задач з обмеженнями, які накладаються на другу похідну функції;
- 2) закони руху механічної системи, знайдені за допомогою нового способу, характеризуються плавністю руху системи, а також нульовими похідними на початку та у кінці руху системи, причому зі збільшенням порядку похідних значення функціоналу зростає;

3) запропонований спосіб можна використати для оптимізації режимів руху інших (багатомасових) механічних систем, на рух яких накладаються різноманітні обмеження.

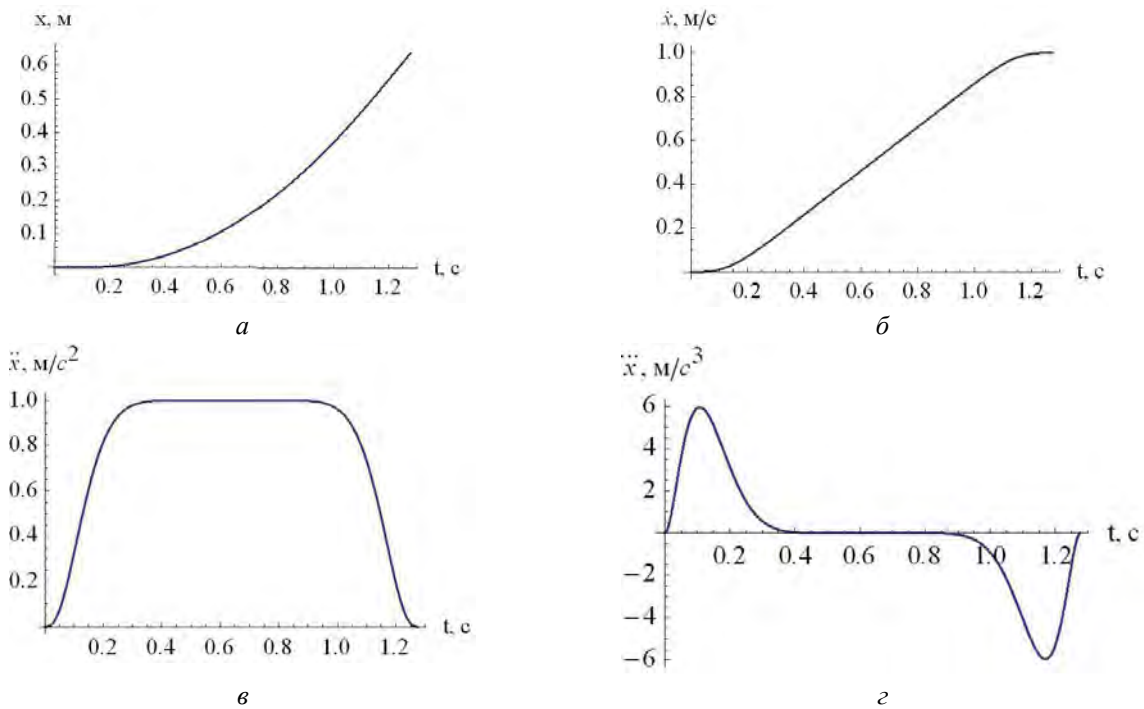


Рис. 3. Графіки функцій переміщення (а), швидкості (б), прискорення (в) та ривка (г) механічної системи

1. Петров Ю.П. Вариационные методы теории оптимального управления / Ю.П. Петров. – Л.: Энергия, 1977. – 280 с. 2. Математическая теория оптимальных процессов / [Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко] – М.: Физматгиз, 1961. – 392 с. 3. Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллман [под. ред. Воробьева Н.Н.] – М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – 400 с. 4. Ловейкін В.С. Динамічна оптимізація підйомних машин / В.С. Ловейкін, А.П. Нестеров. – Х.: ХНАДУ, 2002. – 291 с. 5. Смехов А. А. Оптимальное управление подъемно-транспортными машинами / А. А. Смехов, Н. И. Єрофеев. – М.: Машиностроение, 1975. – 239 с.