

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ БАГАТОПРОВІДНОГО КАБЕЛЯ ТИПУ “СКРУЧЕНА ПАРА”

© Павликевич М.Й., 2011

Наведено спосіб побудови математичної моделі неекранованого багатопровідного кабеля типу “скручена пара”, розташованого над провідною площиною, на основі моделі багатопровідної лінії з паралельними провідниками та застосування методів теорії багатополосних кіл.

Ключові слова: багатопровідний кабель, метод теорій багатополосних кіл.

This article presents the model a multiconductor transmission UTP cable over ground plane. The model is based on the model of multiconductor transmission line with parallel wires and methods of theory of multiport networks.

Key words: multiconductor transmission cable, methods of theory of multiport networks.

Вступ

Багатопровідні кабелі типу “скручена пара” (unshielded twisted pair – UTP) масово поширені як передавальні середовища сучасних високошвидкісних локальних мереж, зокрема в мережах Ethernet зі швидкостями пересилання до 10 Гб/с та з перспективою використання за вищих швидкостей.

Схема побудови базової математичної моделі

Математична модель багатопровідного кабеля UTP повинна відтворювати його характеристики залежно від геометричних параметрів, які характеризують його будову, електромагнітних параметрів матеріалів, що входять до його конструкції, та частоти електромагнітних коливань, які повинні пересилатися в кабелі. Крім того, математична модель повинна дозволяти аналіз характеристик кабеля у разі його під'єднання до зовнішніх джерел і навантажень, а також давати змогу відтворювати характеристики різноманітних з'єднань, утворених відрізками кабеля та під'єднаними до них зовнішніми багатополосними пристроями.

Для виконання цих завдань у роботі використаний такий спосіб побудови математичної моделі кабеля UTP:

- 1) відрізок кабеля заданої довжини поділяють на елементарні відрізки; в межах якого геометричні параметри вважають постійними (кусково-постійна апроксимація);
- 2) враховуючи геометричні параметри кабеля, електромагнітні параметри матеріалів і частоти для елементарного відрізка з використанням базової математичної моделі багатопровідної лінії, обчислюють матрицю потрібних схемних (класичних або хвильових) параметрів;
- 3) розраховують матриці схемних параметрів відрізка багатопровідної лінії, еквівалентної кабелю заданої довжини, каскадно об'єднуючи всі елементарні відрізки у потрібній послідовності за відомими співвідношеннями теорії лінійних багатополосників;
- 4) обчислюють матриці схемних параметрів багатополосних джерел (генераторів) і навантажень на кінцях відрізка еквівалентної багатопровідної лінії;
- 5) обчислюють потрібні робочі параметри для заданих генераторів і навантажень;

Згадана тут базова математична модель M-провідної лінії – це M+M-полосник, схемні параметри якого у вибраній системі класичних або хвильових параметрів відображають співвід-

ношення між напругами і струмами на полюсах залежно від геометричних і електромагнітних параметрів відрізка регулярної лінії та частоти.

Варто зазначити, що кабелі типу “скручена пара” належать до категорії нерегулярних ліній, оскільки значення їх первинних параметрів залежать від повздовжньої координати z : $\tilde{\mathbf{R}}(z), \tilde{\mathbf{L}}(z), \tilde{\mathbf{G}}(z), \tilde{\mathbf{C}}(z)$. Внаслідок цього відрізок такого кабеля довільної довжини може бути коректно описаний лише як $M+M$ -полосник, на відміну від регулярної багатопровідної лінії, яку можна однозначно описати також сукупністю матриць вторинних параметрів – діагональною матрицею коефіцієнтів поширення $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}[\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_M]$, матрицями власних векторів напруг $\hat{\mathbf{U}}$ та струмів $\hat{\mathbf{I}}$, модових хвильових опорів \mathbf{Z}_m або провідностей \mathbf{Y}_m чи характеристичних опорів \mathbf{Z}_c або провідностей \mathbf{Y}_c .

Побудова математичної моделі кабеля вказаного типу за описаною вище схемою містить ще одну принципову некоректність. Скручування провідників зумовлює існування поперечної компоненти вектора густини електричного струму провідності в реальному кабелі і тим самим існування повздовжньої компоненти магнітного поля, а наведена схема передбачає наявність лише повздовжньої компоненти вектора густини струму, що означає поперечність магнітного поля в лінії. Тим самим внесена принципова похибка у трактування хвильового процесу в лінії як поширення мод хвиль квазі-Т-типу, визначення напруг і струмів у ній, однак оцінювання величини цієї похибки в межах теорії квазістаціонарних полів у лінії неможлива. Однак невелике значення кута відхилення осі провідника від повздовжнього напрямку, який, наприклад, для кабеля UTP категорії 6 становить близько 11° , дає змогу сподіватися, що ця методична похибка моделі теж невелика.

Обчислення положення осей провідників у поперечному перерізі кабеля UTP

Для подальших досліджень побудована і застосована математична модель восьмипровідного (чотирипарного) кабеля UTP, поперечний переріз якого зображений на рис. 1.

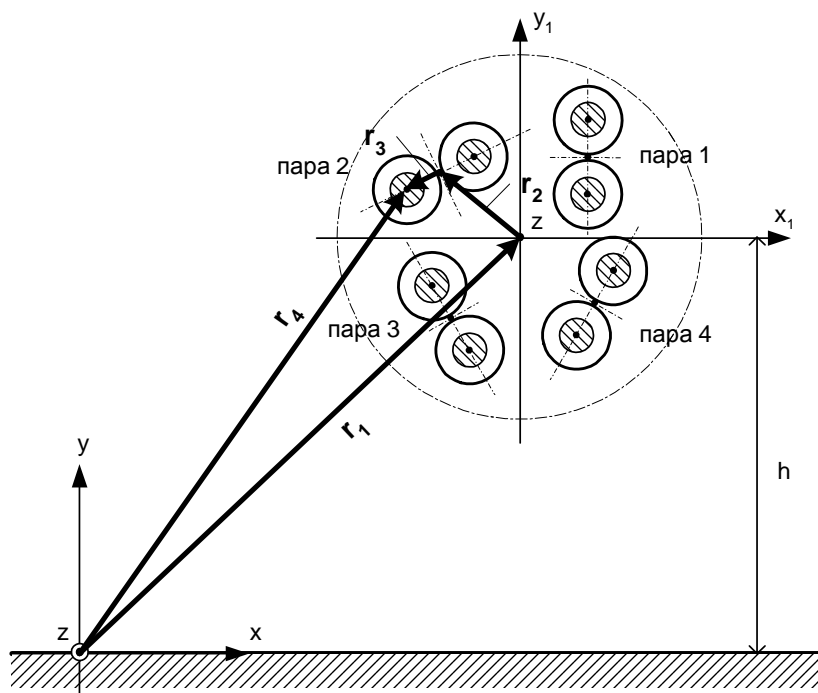


Рис. 1. Поперечний переріз багатопровідної лінії (модельна задача)

Кабель утворений системою циліндричних провідників, кожен з яких оточений циліндричною діелектричною оболонкою – ізоляцією. Вказані ізольовані провідники розміщені в зовнішньому діелектричному середовищі над провідною поверхнею і вісь кабеля міститься на відстані h від неї. Ізольовані провідники попарно скручені, так що їх ізоляція взаємно дотикається

протягом скручування; тим самим відстань між осями провідників фіксована і однакова в кожному поперечному перерізі моделі кабеля. Крок скручування може бути різний для кожної пари і визначається, зокрема, категорією кабеля. Взаємне розташування та орієнтація скручених пар в моделі кабеля показані на рис. 2.

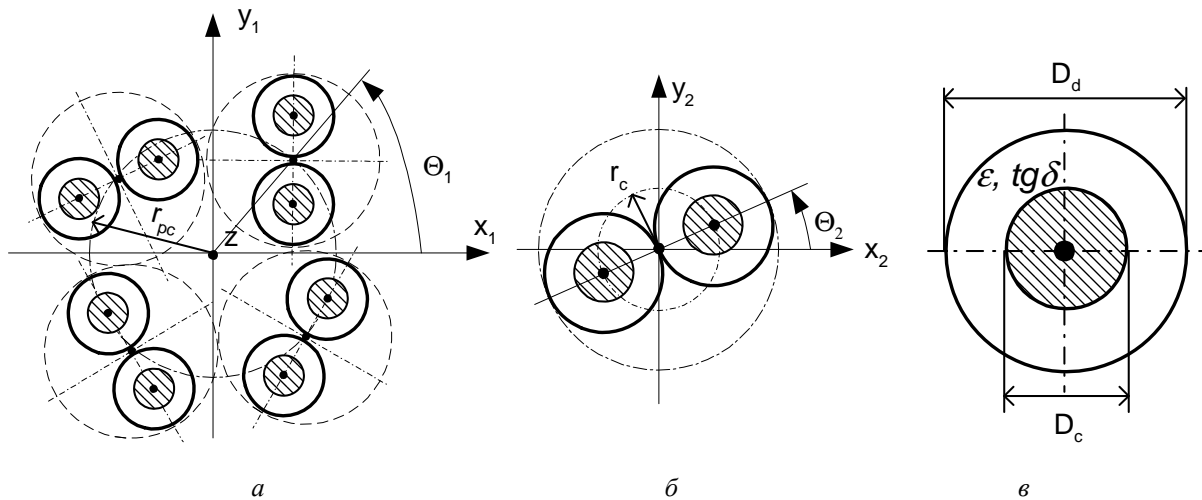


Рис. 2. До способів описування геометрії моделі кабеля UTP

Прийнято, що кожна пара по всій довжині кабеля розташовується всередині уявного циліндра, діаметр якого дорівнює двом діаметрам ізоляції провідників (рис. 2, б). Це дає змогу скрученим парам розташовуватися зі збереженням прямолінійності осей пар та відстаней між осями; осі провідників лежать на циліндричній поверхні радіусом r_c (рис. 2, б). Для визначеності цієї відстані прийнято, що поверхні всіх суміжних уявних циліндрів дотикаються, а їхні осі лежать на циліндричній поверхні радіусом r_{pc} , тоді відстань між осями циліндрів дорівнює діаметру циліндра (рис. 2, а). Орієнтації провідників у кожній парі щодо локальної системи координат пари x_2, y_2, z визначені кутами Θ_2 , який вказується окремо для кожної пари, а положення повздовжньої осі кожної пари – кутом Θ_1 у локальній координатній системі кабеля x_1, y_1, z . Зауважимо, що координата z спільна для усіх координатних систем на рис. 1 і 2.

У локальній системі координат x_2, y_2, z (рис. 2, б) i -ї пари положення осей першого і другого провідників у скрученій парі описується параметричним рівнянням гвинтової лінії

$$\mathbf{r}_3^{(i,1)}(p^{(i)}) = \begin{cases} x_2 = r_c \cdot \cos(p^{(i)} + \Theta_2^{(i)}) \\ y_2 = r_c \cdot \sin(p^{(i)} + \Theta_2^{(i)}) \\ z_2 = 0 \end{cases} \quad \mathbf{r}_3^{(i,2)}(p^{(i)}) = \begin{cases} x_2 = -r_c \cdot \cos(p^{(i)} + \Theta_2^{(i)}) \\ y_2 = -r_c \cdot \sin(p^{(i)} + \Theta_2^{(i)}) \\ z_2 = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

де $r_c = d_d/2$ – радіус кола у поперечному перерізі пари, на якому лежать центри провідників; d_d – діаметр ізоляції провідника, $\Theta_2^{(i)}$ – кут, показаний на рис. 2, який визначає початкове положення першого провідника пари щодо локальної системи координат при $z=0$; $p^{(i)} = 2 \cdot \pi \cdot z/s^{(i)}$ – параметр, визначений кроком гвинтової лінії $s^{(i)}$ для i -ї пари та повздовжньою координатою z , значення якої спільні для всіх координатних систем моделі.

Отже, для розрахунку локальних координат центрів поперечних перерізів провідників для кожної пари потрібно вказати такі вхідні дані: діаметр ізоляції провідника d_d (прийнятий однаковим для всіх провідників), крок скручування $s^{(i)}$, початковий кут $\Theta_2^{(i)}$ і значення координати z .

Положення осі кожної з чотирьох пари провідників у локальній системі координат кабеля x_1, y_1, z_1 описане вектором $\mathbf{r}_2^{(i)}, i = \overline{1,4}$ та визначається радіусом r_{pc} і кутом Θ_1 (рис. 2.а). Для них відповідно отримуємо

$$\mathbf{r}_2^{(1)} = \begin{cases} x_1 = 2\sqrt{2} \cdot d_d \cos(\Theta_1) \\ y_1 = 2\sqrt{2} \cdot d_d \sin(\Theta_1) \\ z_1 = 0 \end{cases} \quad \mathbf{r}_2^{(2)} = \begin{cases} x_1 = -2\sqrt{2} \cdot d_d \sin(\Theta_1) \\ y_1 = 2\sqrt{2} \cdot d_d \cos(\Theta_1) \\ z_1 = 0 \end{cases} \quad \mathbf{r}_2^{(3)} = -\mathbf{r}_2^{(1)}, \quad \mathbf{r}_2^{(4)} = -\mathbf{r}_2^{(2)}, \quad (2)$$

Положення осі кабеля над провідним екраном визначається розміром h ; який дає значення координати y , значення координати x може бути довільним, наприклад, $x=0$.

Отже, обчислення координат осей провідників у глобальній координатній системі x, y, z рис. 1 здійснюється шляхом обчислення значень вектора \mathbf{r}_4 для кожного j -го провідника кожної i -ї пари: $\mathbf{r}_4 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3$. Координати цих векторів для кожного з провідників лінії разом з іншими необхідними геометричними і електричними параметрами дають змогу обчислити матрицю схемних параметрів елементарного відрізка еквівалентної багатопровідної лінії з використанням базової математичної моделі багатопровідної лінії.

Поділ на елементарні відрізки

Поділ кабеля на елементарні відрізки істотний для правильної інтерпретації результатів обчислень, оскільки він замінює гладкі гвинтові лінії (або їх поєднання) послідовністю ступінчастих стрибкоподібних змін положень осей провідників. З погляду електричних характеристик це еквівалентне заміні нерегулярної лінії з неперервною і гладкою залежністю параметрів від координати z нерегулярною лінією зі ступінчастою зміною параметрів – ступінчастим переходом. Як відомо [1], частотні характеристики плавних і ступінчастих переходів якісно відрізняються.

Для випадку кабеля УТР ситуація дещо спрощується тим, що кроки скручування пар провідників $s^{(i)}$ набагато менші від мінімальної довжини хвилі у лінії. Для уникнення ефектів, зумовлених дискретизацією з однаковим кроком, у цій моделі застосовано спосіб генерування випадкових значень координати z з рівномірним законом розподілу в інтервалі довжини відрізка кабеля з подальшим сортуванням отриманих значень z у порядку зростання. Повна кількість значень координати z обчислюється на підставі бажаної середньої кількості цих значень на один період скручування провідників з найменшим кроком. Обчислення схемних параметрів регулярних відрізків багатопровідних ліній з довжинами, які відповідають різницям суміжних значень координати z , можна здійснити, наприклад, з використанням математичної моделі, яку запропонував автор у роботі [2].

Обчислення параметрів еквівалентної багатопровідної лінії

Хоч кабель типу “скручена пара” у строгому сенсі не є регулярною багатопровідною лінією, становить певний інтерес аналітичне вираження його параметрів у вигляді, типовому для такої лінії. Внаслідок того, що кабель у загальному випадку є взаємним несиметричним (M+M)-полюсником, для його опису, узагальнюючи відповідні положення теорії чотиріполюсників [3], слід використати дві матриці дзеркальних опорів або провідностей (англ. – *image impedance matrices*) $\mathbf{Z}_{i1} = \mathbf{Y}_{i1}^{-1}$ та $\mathbf{Z}_{i2} = \mathbf{Y}_{i2}^{-1}$ та матрицю дзеркальних функцій передачі (англ. – *image transfer function matrices*) \mathbf{g}_i .

Використовуючи матрицю каскадних А-параметрів відрізка кабеля, для вказаних матриць дзеркальних опорів отримуємо

$$\mathbf{Z}_{i1} = (\mathbf{A}_{11} \cdot \mathbf{Z}_{i2} + \mathbf{A}_{12}) \cdot (\mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{Z}_{i2} + \mathbf{A}_{22})^{-1} = (\mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{Y}_{i2}) \cdot (\mathbf{A}_{21} + \mathbf{A}_{22} \cdot \mathbf{Y}_{i2})^{-1}, \quad (3)$$

$$\mathbf{Z}_{i2} = (\mathbf{A}_{11} + \mathbf{Z}_{i1} \cdot \mathbf{A}_{21})^{-1} \cdot (\mathbf{Z}_{i1} \cdot \mathbf{A}_{22} + \mathbf{A}_{12}) = (\mathbf{Y}_{i1} \cdot \mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{21})^{-1} \cdot (\mathbf{A}_{22} + \mathbf{Y}_{i1} \cdot \mathbf{A}_{12}). \quad (4)$$

Трактуючи співвідношення (3) і (4) як систему рівнянь відносно невідомих матриць \mathbf{Z}_{i1} та \mathbf{Z}_{i2} , тобто

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Z}_{i1} \cdot \mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{Z}_{i2} + \mathbf{Z}_{i1} \cdot \mathbf{A}_{22} &= \mathbf{A}_{11} \cdot \mathbf{Z}_{i2} + \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{Z}_{i1} \cdot \mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{Z}_{i2} - \mathbf{Z}_{i1} \cdot \mathbf{A}_{22} &= -\mathbf{A}_{11} \cdot \mathbf{Z}_{i2} + \mathbf{A}_{12} \end{aligned} \right\},$$

можна звести їх до двох окремих матричних квадратних рівнянь:

$$\mathbf{Z}_{i1} \cdot \mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{A}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{Z}_{i1} = \mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{A}_{22}^{-1},$$

$$\mathbf{Z}_{i2} \cdot \mathbf{A}_{22}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{Z}_{i2} = \mathbf{A}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{12}.$$

На підставі результатів роботи [4], а також з урахуванням того, що матриці-клітки в (5) квадратні та неособливі, можна виразити розв'язки цих рівнянь у вигляді

$$\mathbf{Z}_{i1} = \mathbf{A}_{11} \cdot \mathbf{A}_{21}^{-1} \cdot \left(\mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{A}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{A}_{22}^{-1} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5)$$

$$\mathbf{Z}_{i2} = \mathbf{A}_{21}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{22} \cdot \left(\mathbf{A}_{22}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{A}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{12} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (6)$$

що легко перевірити підстановкою цих розв'язків у відповідні рівняння. Для чотириполюсника ці розв'язки зводяться до відомого вигляду [3].

Матриці дзеркальних опорів можна виразити через відповідні матриці вхідних опорів для режимів короткого замикання і холостого ходу на протилежному боці (М+М)-полюсника. На підставі виразів (3) і (4) вхідні опори для режимів короткого замикання можна виразити як

$$\mathbf{Z}_{s1} = \mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{A}_{22}^{-1}, \quad \mathbf{Z}_{s2} = \mathbf{A}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{12}, \quad (7)$$

а для режимів холостого ходу – як

$$\mathbf{Z}_{l1} = \mathbf{A}_{11} \cdot \mathbf{A}_{21}^{-1}, \quad \mathbf{Z}_{l2} = \mathbf{A}_{21}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{22}. \quad (8)$$

Тоді з виразів (5) і (6) слідує

$$\mathbf{Z}_{i1} = \mathbf{Z}_{l1} \cdot \left(\mathbf{Z}_{l1}^{-1} \cdot \mathbf{Z}_{s1} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (9)$$

$$\mathbf{Z}_{i2} = \mathbf{Z}_{l2} \cdot \left(\mathbf{Z}_{l2}^{-1} \cdot \mathbf{Z}_{s2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (10)$$

Результати (9) і (10) можна використати, наприклад, для обчислення відповідних матриць на підставі результатів вимірювань.

Інтуїтивно зрозуміло, що для симетричного (М+М)-полюсника матриці дзеркальних опорів \mathbf{Z}_{i1} та \mathbf{Z}_{i2} рівні. Це можна строго довести, впровадивши матрицю каскадних В-параметрів, яка описує пересилання через (М+М)-полюсник у напрямку, зворотному щодо прямого напрямку пересилання для А-параметрів (рис. 3).

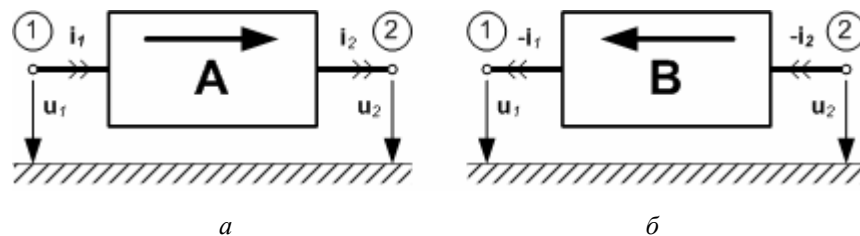


Рис. 3. До описування прямого і зворотного пересилання через (М+М)-полюсник А- і В-параметрами

У термінах А-параметрів і за збереження прийнятого додатного напрямку стрілок струмів пряме (рис. 3, а) і зворотне (рис. 3, б) пересилання описані як

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{i}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{i}_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2 \\ -\mathbf{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ -\mathbf{i}_1 \end{bmatrix},$$

або

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{i}_2 \end{bmatrix} &= \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{i}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{i}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{i}_1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & -\mathbf{A}_{12} \\ -\mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{i}_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Використовуючи формули для обернення кліткових матриць ([5], с. 580), обчислимо клітки матриці \mathbf{B} через клітки матриці \mathbf{A} :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & -\mathbf{A}_{12} \\ -\mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \left(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{A}_{22}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{21}\right)^{-1} & \mathbf{A}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{B}_{22} \\ \mathbf{A}_{22}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{B}_{11} & \left(\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{A}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{12}\right)^{-1} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Вираз для дзеркального опору \mathbf{Z}_{i2} можна отримати через В-параметри подібно до співвідношення (5):

$$\mathbf{Z}_{i2} = \mathbf{B}_{11} \cdot \mathbf{B}_{21}^{-1} \cdot \left(\mathbf{B}_{21} \cdot \mathbf{B}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{B}_{12} \cdot \mathbf{B}_{22}^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (14)$$

який зводиться до формули (6) для А-параметрів після підстановки виразів для матриць-кліток \mathbf{B}_{12} та \mathbf{B}_{21} з (13) та простих тотожних перетворень. Умова симетрії (М+М)-полосника щодо сторін 1 і 2 приводить до рівності $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, тобто $\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{B}_{ij}$, $i, j = \overline{1,2}$, а звідси до рівності $\mathbf{Z}_{i2} = \mathbf{Z}_{i1}$.

Асиметрію (М+М)-полосника можна охарактеризувати, впровадивши поняття матриці симетричності, яка узагальнює відповідний числовий параметр з теорії чотириполосників [3]. Можливі два способи означення матриці симетричності на підставі матриць дзеркальних опорів:

$$\mathbf{N}_1^2 = \mathbf{Z}_{i1} \cdot \mathbf{Z}_{i2}^{-1}, \quad \mathbf{N}_2^2 = \mathbf{Z}_{i2}^{-1} \cdot \mathbf{Z}_{i1} \quad (15)$$

Очевидно, що $\mathbf{N}_1^2 = \mathbf{N}_2^{2T}$, оскільки матриці \mathbf{Z}_{i1} та \mathbf{Z}_{i2} симетричні (на підставі теореми взаємності), тому надалі використовуємо перше з означень, опускаючи нижній індекс.

Для кількісного оцінювання асиметрії (М+М)-полосника зручніше використати норму матриці \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = \left(\mathbf{1} + \mathbf{N}^2\right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{1} - \mathbf{N}^2\right) = \left(\mathbf{1} + \mathbf{Z}_{i1} \cdot \mathbf{Z}_{i2}^{-1}\right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{1} - \mathbf{Z}_{i1} \cdot \mathbf{Z}_{i2}^{-1}\right). \quad (16)$$

Ця матриця побудована за аналогією з матрицею розсіяння сполучення М-полосних генератора і навантаження [6], тому значення її норми містяться в інтервалі $\|\mathbf{R}\| \in [0,1]$ для всього можливого діапазону значень елементів матриці \mathbf{N}^2 , до того ж нульове значення норми відповідає симетричному (М+М)-полоснику. Для більшої наочності результатів можна використовувати норму-максимум

$$\|\mathbf{R}\|_{\max} = \max_{i,j} \left| R_{ij} \right|, \quad (17)$$

тобто значення найбільшого модуля елемента матриці \mathbf{R} .

Числові експерименти з використанням запропонованої математичної моделі кабеля УТР, виконані для чотирипарного відрізка кабеля довжиною 1 м на частоті 100 МГц (кроки скручування пар провідників дорівнюють 15.3 мм, 15.4 мм, 17.8 мм і 19.4 мм відповідно) показують, що значення норми $\|\mathbf{R}\|$ – це величини порядку 10^{-3} , тобто достатньо малі для того, щоб достатньо довгий відрізок такого кабеля можна було вважати практично симетричним (М+М)-полосником. Враховуючи це, матрицю дзеркальних функцій передачі \mathbf{g}_i можна отримати, використовуючи, наприклад, матрицю каскадних А-параметрів вказаного (М+М)-полосника. До того ж вважаємо структуру матриці А-параметрів відрізка кабеля подібною до структури такої матриці для відрізка регулярної лінії [6], тобто

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{chG} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{-1} & \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{shG} \cdot \mathbf{Z}_m \cdot \hat{\mathbf{I}}^{-1} \\ \hat{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{Y}_m \cdot \mathbf{shG} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{-1} & \hat{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{chG} \cdot \hat{\mathbf{I}}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{chG} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{-1} & \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{shG} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{-1} \cdot \mathbf{Z}_c \\ \mathbf{Y}_c \cdot \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{shG} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{-1} & \hat{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{chG} \cdot \hat{\mathbf{I}}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Тоді матрицю \mathbf{g}_i можна визначити діагоналізацією матриць-кліток \mathbf{A}_{11} та \mathbf{A}_{22} , тобто обчисливши

$$\mathbf{chg}_i = \hat{\mathbf{U}}_{A12}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{11} \cdot \hat{\mathbf{U}}_{A12} = \hat{\mathbf{I}}_{A12}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{11} \cdot \hat{\mathbf{I}}_{A12}, \quad (18)$$

де $\mathbf{ch}g_i = \text{diag}[ch(g_{i1}) \quad ch(g_{i2}) \quad \dots \quad ch(g_{iM})]$, та обчисливши обернену функцію

$$\mathbf{g}_i = \text{arch}(\mathbf{ch}g_i) = \text{diag}[g_{i1} \quad g_{i2} \quad \dots \quad g_{iM}]. \quad (19)$$

У виразах (7) $\hat{\mathbf{U}}_{A12}$ та $\hat{\mathbf{I}}_{A12}$ – це матриці перетворення подібності, складені з власних векторів матриць-кліток відповідно \mathbf{A}_{11} або \mathbf{A}_{22} відповідно. На підставі цих результатів можна також обчислити матрицю модових власних опорів або провідностей

$$\mathbf{Z}_{m1} = \hat{\mathbf{U}}_{A12}^{-1} \cdot \mathbf{Z}_{i1} \cdot \hat{\mathbf{I}}_{A12} = \mathbf{Y}_{m1}^{-1}, \quad \mathbf{Y}_{m1} = \hat{\mathbf{I}}_{A12}^{-1} \cdot \mathbf{Y}_{i1} \cdot \hat{\mathbf{U}}_{A12}. \quad (20)$$

З використанням опрацьованої моделі можна здійснити аналіз параметричних залежностей характеристичних і схемних параметрів відрізків кабеля УТР у потрібному діапазоні частот.

Висновки

1. Запропонована схема побудови математичної моделі відрізка багатопровідного кабеля типу “скручена пара”, яка дозволяє якісно правильно відтворити залежності її характеристик від геометрії поперечного перерізу, розмірів, кроків скручування пар провідників, електричних параметрів діелектриків та провідників, а також від частоти в діапазоні значень параметрів лінії, які відповідають поширенню в ній хвиль основного типу.

2. На підставі теорії багатополосників отримані вирази для характеристичних параметрів відрізка регулярної багатопровідної лінії, наближено еквівалентної до відповідного відрізка кабеля типу “скручена пара”.

1. Фельдштейн, Явич. Синтез четырехполосников и восьмиполосников на СВЧ. 2. Павликевич М.Й. Базова математична модель багатопровідної лінії у квазістаціонарному наближенні // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка” “Радіоелектроніка та телекомунікації”. – 2010. – № 680. – С. 180–190 3. Величко Ю.Т. Прхідні чотириполосники. – К.: Держ. вид-во техн. літератури, 1958. – 410 с. 4. G.I. Shurret, T.O. Lewis, T.I. Boullion. Quadratic matrix equation. – The Ohio Journal of Science. V. 74, 1974. № 5. – P. 273–277. 5. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1968. – 720 с. 6. Павликевич М.Й. Схемні параметри багатопровідних ліній // Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук. пр. ІПМЕ НАН України. – Вип. 42. – К.: 2007. – С. 125–137.