УДК 548:537.611.44, 536.75

© **Бацевич О.Ф.**[1], **Мриглод І.М.**[2], **Рудавський Ю.К.**[1], **Токарчук М.В.**[2]
[1]ДУ "Львівська політехніка", кафедра вищої математики
[2]Інститут фізики конденсованих систем, відділ НЕП

ЧАСОВІ КОРЕЛЯЦІЙНІ ФУНКЦІЇ БАГАТОКОМПОНЕНТНОЇ РІДКОЇ СУМІШІ МАГНІТНИХ ТА НЕМАГНІТНИХ ЧАСТИНОК

Проаналізовано структуру гідродинамічної матриці суміші магнітних та немагнітних частинок і запропоновано узагальнення, що дає можливість вивчення гідродинаміки багатокомпонентної суміші. Методом матричної теорії збурень знайдені колективні моди, з яких 2 – звукові, решта m – дисипативні, де m визначається кількістю адитивних інтегралів руху. Знайдені аналітичні вирази для часових кореляційних функцій системи і для випадку двокомпонентної суміші наведені вирази для динамічних структурних факторів.

The structure of hydrodynamic matrix of a mixture of magnetic and nonmagnetic particles was analyzed, and generalization which allows to consider the hydrodynamics of a multicomponent mixture was proposed. By the means of matrix perturbation theory the collective modes were found, two of which are sound and the rest m – dissipative, where m is determined by the number of additive integrals of motion. The analytical expressions for time correlation functions were derived and for the case of binary mixture expressions for the dynamical structure factors presented.

Вступ

У наш час магнітні рідини, суміші магнітних і немагнітних частинок у зовнішніх полях механічного або електромагнітного походження мають важливе значення в хімічних, електронних та інших сучасних технологіях. Це робить дослідження термодинамічних, структурних і динамічних властивостей рідкого магнетика надзвичайно цікавим і важливим. Більшість методів, запропонованих для вивчення магнітних рідин, базуються на феноменологічному підході (наприклад, [1–3]). Строгий статистичний підхід для розгляду динамічних властивостей ідеальної Гайзенбергівської феророзчину був розвинений в [4, 5]. Рівноважні властивості цієї моделі були розглянуті в роботі [6].

Мета цієї роботи – дослідити гідродинамічну поведінку суміші магнітних і немагнітних часток. Починаючи з розгляду бінарної магнітної суміші, пропонується схема, яка дає змогу нам знайти також спектр збудження і часові кореляційні функції для загального випадку багатокомпонентної магнітної суміші.

Гідродинамічні рівняння

Для розгляду гідродинаміки системи, спочатку необхідно визначити так звані параметри скороченого опису – змінні, середні значення яких найбільш адекватно характеризують систему. Параметри скороченого опису $\hat{Y}(k)$ можна вибрати як Фур'є перетворення мікроскопічних густин консервативних змінних. Для бінарної суміші маємо

$$\hat{Y}(k) = \left\{\hat{n}_1(k), \hat{n}_2(k), \hat{p}(k), \hat{s}(k), \hat{h}(k)\right\} \;, \tag{1}$$

де $\hat{n}_1(k) = \sum_{i=1}^{N_1} e^{\mathrm{i}\, kr_i}$, $\hat{n}_2(k) = \sum_{i=1}^{N_2} e^{\mathrm{i}\, kr_i}$ є парціальними густинами немагнітних (сорт 1) і магнітних (сорт 2) частинок, $\hat{p}(k)$ є густиною повного імпульсу, $\hat{s}(k)$ та $\hat{h}(k)$ пов'язані відповідно з густиною намагніченості та енергії. У загальному випадку m_1-компонентної суміші, у якій m_2 компоненти володіють магнітним моментом, ми маємо справу з $m_1 + m_2 + 2$ параметрами скороченого опису: $\hat{n}_1$, $\hat{n}_2$, … , $\hat{n}_{m_1}$ – парціальні густини кількості частинок, $\hat{s}_1, \hat{s}_2$, … , $\hat{s}_{m_2}$ – парціальні густини намагніченості, $\hat{p}$ та $\hat{h}$ – густина повного імпульсу та енергії.

Використовуючи підхід, оснований на методі нерівноважного статистичного оператора Зубарєва, рівняння гідродинаміки і рівняння для часових кореляційних функцій $\tilde{F}(k,z)$ були отримані в [7]. Для малих відхилень від рівноваги ці рівняння можна написати так:

$$\left\{\mathrm{i}\omega\cdot\tilde{1} - \mathrm{i}\tilde{\Omega}(k) + \tilde{\Phi}(k,\omega)\right\}\cdot\left\langle \Delta\hat{Y}(k)\right\rangle^{\omega} = 0, \tag{2}$$

$$\left\{z\cdot\tilde{1} - \mathrm{i}\tilde{\Omega}(k) + \tilde{\Phi}(k,z)\right\}\cdot\tilde{F}(k,z) = \tilde{F}_0(k), \tag{3}$$

де $\left\langle \Delta\hat{Y}(k)\right\rangle^{\omega}$ з $\Delta\hat{Y}(k) = \hat{Y}(k) - \left\langle \hat{Y}(k)\right\rangle$ означають відхилення гідродинамічних змінних (параметрів скороченого опису) від рівноважних значень $\left\langle \hat{Y}(k)\right\rangle$, а $\tilde{F}(k,z)$, $\tilde{F}_0(k)$ є, відповідно, Фур'є перетвореннями часових та статичних кореляційних функцій, $\mathrm{i}\tilde{\Omega}(k)$ – частотна матриця, $\tilde{\Phi}(k,z)$ – матриця функцій пам'яті.

Важливо звернути увагу, що в гідродинамічній границі матриці $\mathrm{i}\tilde{\Omega}(k)$ і $\tilde{\Phi}(k,z)$ є пропорціональними до відповідно $\mathrm{i}k$ і $(\mathrm{i}k)^2$:

$$\mathrm{i}\tilde{\Omega}(k) = \mathrm{i}kv_s\cdot\tilde{\omega}\,, \qquad \tilde{\Phi}(k,z) = (\mathrm{i}k)^2 v_s\cdot\tilde{\varphi}\,, \tag{4}$$

де v_s – швидкість звуку (див. далі). Крім того, для зазначеного вище набору параметрів скороченого запису вони мають хрестоподібну та антихрестоподібну структуру [8]

$$\tilde{\omega} = \begin{pmatrix} \tilde{0} & \begin{matrix}\omega_{1,\pi}\\ \vdots\\ \omega_{\pi-1,\pi}\end{matrix} & \tilde{0} \\ \omega_{\pi,1}\dots\ \omega_{\pi,\pi-1} & 0 & \omega_{\pi,1+\pi}\dots\ \omega_{\pi,m+2} \\ \tilde{0} & \begin{matrix}\omega_{\pi+1,\pi}\\ \vdots\\ \omega_{m+2,\pi}\end{matrix} & \tilde{0} \end{pmatrix}, \; \tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1 & \begin{matrix}0\\ \vdots\end{matrix} & \tilde{\varphi}_2 \\ 0\ \dots & \varphi_{\pi,\pi} & \dots\ 0 \\ \tilde{\varphi}_3 & \begin{matrix}\vdots\\ 0\end{matrix} & \tilde{\varphi}_4 \end{pmatrix} \tag{5},$$

де $m = m_1 + m_2$, π-ва компонента відповідає імпульсу. У роботі [8], було знайдено вирази елементів частотної матриці через термодинамічні коефіцієнти; елементи матриці функцій пам'яті є коефіцієнтами переносу, які знаходяться за формулами типу Гріна-Кубо.

Спектр колективних мод та часові кореляційні функції

З рівняння (2) слідує рівняння для спектра збуджень

$$\det|z\tilde{1} - \mathrm{i}\tilde{\Omega}(k) + \tilde{\Phi}(k,z)| = 0 \,. \tag{6}$$

Розв'язуючи це рівняння в загальному випадку, ми отримуємо дві звукові моди і m дифузійних мод z_i

$$\begin{aligned} z_\pm &= \pm \mathrm{i}k \cdot v_s + \Gamma \cdot k^2, \\ z_i &= D_i \cdot k^2, \qquad i = 1 \quad m, \end{aligned} \tag{7}$$

де $v_s^2 = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\left[\left(\mathrm{i}\tilde{\Omega}\big/\mathrm{i}k\right)^2\right]$ і $\Gamma = \frac{\mathrm{Sp}(\tilde{\varphi}\tilde{\omega}^2)}{\mathrm{Sp}(\tilde{\omega}^2)}$ є швидкістю та коефіцієнтом загасання звуку. Коефіцієнти загасання всіх дифузійних мод D_i, $i = 1\ldots m$, можна знайти з алгебраїчного рівняння m-го порядку [9]. Для випадку бінарної магнітної суміші $v_s^2 = (\partial P / \partial \rho)_{NSM}$, і коефіцієнти загасання Γ, D_1, D_2 можна виразити через термодинамічні параметри і коефіцієнти переносу.

Часові кореляційні функції, задані рівнянням (2), можна отримати як

$$\tilde{F}(k,z) = \left\{ \sum_{+,-} \frac{\tilde{g}_0^\pm + \mathrm{i}k \cdot \tilde{g}_1^\pm}{z \mp \mathrm{i}kv_s + k^2 v_s \Gamma} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\tilde{g}_0^i + \mathrm{i}k \cdot \tilde{g}_1^i}{z + k^2 v_s D_i} \right\} \cdot \tilde{F}_0 \,, \tag{8}$$

де $\tilde{g}_{0,\,1}^{\pm,\,i}$ – так звані вагові коефіцієнти. Тут верхній індекс '$\pm$' та 'i' $(=1\ldots m)$ стосується відповідно звукових та дифузійних мод, значення нижнього індекса '0', '1' нумерують порядок наближення вагового коефіцієнта по k. Методом матричної теорії збурень нами були аналітично знайдені вагові коефіцієнти часових кореляційних функцій у гідродинамічному наближенні

$$\tilde{g}_0^\pm = \frac{\tilde{\omega}(\tilde{\omega} \pm 1)}{2}, \qquad \tilde{g}_1^\pm = \pm \tilde{g}_0^\pm \tilde{\varphi}(\tilde{P} + \frac{1}{2}\tilde{g}_0^\mp) \pm (\tilde{P} + \frac{1}{2}\tilde{g}_0^\mp)\tilde{\varphi}\tilde{g}_0^\pm \tag{9}$$

$$\tilde{g}_0^j = \prod_{l=1(\neq j)}^{m} \tilde{P} \frac{D_l - \tilde{\varphi}}{D_l - D_j} \tilde{P}, \quad \tilde{g}_1^j = (\tilde{R}_j \cdot \tilde{\varphi} - 1)\tilde{\omega}\tilde{\varphi}\tilde{g}_0^j + \tilde{g}_0^j \tilde{\varphi}\tilde{\omega}(\tilde{\varphi} \cdot \tilde{R} - 1), \quad j = 1\ldots m\,, \tag{10}$$

відповідно для звукових та дифузійних мод, де $\tilde{P} = 1 - \tilde{\omega}^2$, $\tilde{R}_j = \sum_{k=1(\neq j)}^{m} \frac{\tilde{g}_0^k}{D_k - D_k}$.

Розглядаючи, наприклад, бінарну магнітну суміш, динамічний структурний фактор 'ij' для неї можна записати через термодинамічні параметри та коефіцієнти переносу, як зазначено нижче

$$S_{ij}(\omega,k) = \frac{TV}{2\rho v_s^2} \sum_{+,-} \frac{k^2\Gamma \cdot c_i c_j - k(k \pm \omega/v_s)(c_i\gamma_j + \gamma_i c_j - c_i c_j(\alpha + \Gamma))}{(\omega \pm kv_s^2)^2 + (k^2\Gamma)^2} + \sum_{\mu=1}^{2} \frac{k^2 G_{ij}^\mu}{\omega^2 + (k^2 D_\mu)^2} \tag{11}$$

де $G_{ij}^1 = \frac{D_1 \cdot TV}{D_2 - D_1} \cdot \left(D_2 (\partial c_i / \partial \mu_j)_{TV\mu_j} + [c_i \gamma_j + \gamma_i c_j - c_i c_j (\alpha + D_2)] / \rho v_s^2 - L_{ij} \right)$ і G_{ij}^2 можна одержати з G_{ij}^1 заміною $D_2 \leftrightarrow D_1$. Тут $\alpha = 2\Gamma - \eta_l / \rho$, $\gamma_k = L_{kj} \frac{u_l}{\kappa_T} + L_{kH} \frac{\alpha_p}{c_V \kappa_T}$. u_i, c_i, μ_i є парціальний молярний об'єм, парціальна концентрація і хімічний потенціал сорту i відповідно. L_{ij} є коефіцієнтами взаємодифузії між частками i-го і j-го сортів, η_l – поздовжня в'язкість, L_{iH} – коефіцієнти термодифузії. κ_T, α_p, c_V – ізотермічна стисливість, ізобаричний коефіцієнт теплового розширення і коефіцієнт теплопровідності в ансамблі з постійним об'ємом, відповідно.

Для простої рідини формули (9) та (10) дають добре відому в літературі формулу Ландау-Плачека для динамічного структурного фактора

$$\mathrm{Re} \frac{S(k,\omega)}{S(k)} = \frac{1}{2\gamma} \sum_{+,-} \frac{k^2\Gamma - k(\pm\omega / v_s + k)(\eta_l / \rho - 3\Gamma)}{(\omega \pm k v_s)^2 + (\Gamma k^2)^2} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot \frac{k^2 \cdot \lambda / c_p}{\omega^2 + (k^2 \cdot \lambda / c_p)^2}. \tag{12}$$

Висновки

Були розв'язані матричні рівняння гідродинаміки (2) і (3) в аналітичній формі для широкого класу багатокомпонентних рідин з $m+2$ параметрами скороченого опису, деякі компоненти в яких можуть володіти магнітним моментом. Спектр колективних мод був знайдений з рівняння (2), а рівняння (3) дали вирази для часових кореляційних функцій. На підставі знайдених виразів наводяться парціальні динамічні структурні фактори бінарної суміші магнітної та немагнітної рідин.

Важливо підкреслити, що вхідними змінними теорії є термодинамічні параметри і коефіцієнти переносу.

[1] Akhiezer I.A., Akhiezer I.T. // Sov. Phys. Solid State. 1987. Vol.29. P.48.

[2] Hubbard J.B., Stiles P.J. // Journal of Chemical Physics. 1986. Vol.84. P.6955.

[3] Ido Y., Tanahashi T., Journ. // Phys. Soc. Japan, 1991. Vol.60. P.466.

[4] Mryglod I.M., Tokarchuk M.V., Folk R. On the Hydrodynamic Theory of a Magnetic Liquid I. General Description. // Physica A. 1995. Vol.220. P.325–348.

[5] Mryglod I.M., Folk R. On the Hydrodynamic Theory of a Magnetic Liquid II. Hydrodynamic Modes in the Heizenberg Fluid // Physica A. 1996. Vol.234. P.129–150.

[6] Вакарчук І.О., Рудавський Ю.К., Понеділок Г.В. // Теор. матем. фіз. 1984. 58. № 3. С.445–460.

[7] Mryglod I.M. // Cond. Matt. Phys. 1997. № 10. С.115.

[8] Rudavskii Yu.K., Mryglod I.M., Tokarchuk M.V., Batsevych O.F. Preprint ICMP-98-29E.

[9] Batsevych O.F., Rudavskii Yu.K., Mryglod I.M., Tokarchuk M.V. Preprint I CMP-99-14U.

[10] Bhatia A.B., Tornton D.E., March N.H. // Journ. Chem. Phys. 1974. Vol.4. P.97.