Похибка наближення многочленним чебишовським сплайном

Кількість ланок сплайна	Степінь многочлена на кожній ланці			
	1	2	3	4
1*	0.069011	0.000591	0.000177	0.000167
2	0.017450	0.000076	0.000039	$7.793 \cdot 10^{-7}$
3	0.007685	0.000050	$7.042 \cdot 10^{-6}$	$6.778 \cdot 10^{-7}$
4	0.004235	0.000019	$1.527 \cdot 10^{-6}$	$1.515 \cdot 10^{-7}$

Висновки. Отримані результати ілюструють доцільність застосування наближення сплайнами для подання градуювальних характеристик. Застосування сплайнів невеликих порядків дало змогу спростити аналітичне подання характеристики і зробити її придатнішою для апаратної реалізації.

1. Techniques for Approximating the International Temperature Scale of 1990. BIPM Sèvres, France,1990. 2. Попов Б. А. Равномерное приближение сплайнами. – К., 1986. 3. Попов Б. О., Сущик К. В. Дослідження збіжності ітераційної процедури для знаходження балансного наближення // Відбір і обробка інформ. – 2000. – Вип. 16(92). – С. 137–141. 4. Попов Б. О., Сущик К. В. Точність наближення функцією від раціонального многочлена // Відбір і обробка інформ. – 2000. – Вип. 14(90). – С. 137–141. 5. Температурые измерения. Справочник // Геращенко О.А., Гордов А.Н., Лах В.И., Стаднык Б.И., Ярышев Н.А. – К., 1984.

УДК 517.9, 681.51

І.М.Романишин[1], Л.А.Синицький[2]
[1]Фізико-механічний інститут НАН України
[2]Львівський національний університет ім. І. Франка

ДО АДИТИВНОЇ D-СТІЙКОСТІ МАТРИЦІ ПРИ ЗМІНІ ОДНОГО ДІАГОНАЛЬНОГО ЕЛЕМЕНТА

Наведено достатні умови адитивної D-стійкості матриці при зміні одного діагонального елемента, які зводяться до стійкості двох поліномів.

Адитивна D-стійкість матриці при зміні одного діагонального елемента еквівалентна стійкості одного класу систем керування з відємним зворотним зв'язком довільним коефіцієнтом підсилення. Отже, подано достатні умови, застосовні до перевірки стійкості цього класу систем керування.

Sufficient conditions of additive D-stability of a matrix at change of one diagonal element are presented. These conditions are reduced to stability of two polynoms.

Additive D-stability of a matrix at change of one diagonal element is equivalent to stability of one class of control systems at any factor of amplification. Thus, the resulted sufficient conditions are applied for check of stability of this class of control systems.

1.Вступ

Матрицю A і її характеристичний поліном будемо вважати стійкими, якщо всі власні значення матриці A, тобто нулі характеристичного полінома, мають від'ємні дійсні частини.

Визначення [1]. Матриця A називається адитивно D-стійкою, якщо $A–D$ ($D = diag(d_1, d_2, ..., d_n)$) – стійка за довільних $d_i \geq 0$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$.

* Під чебишовським сплайном з кількістю ланок $r=1$ розуміємо найкраще чебишовське наближення.

З погляду теорії кіл (для математичної моделі лінійного кола у вигляді системи диференціальних рівнянь у нормальній формі) адитивна D-стійкість матриці A означає, що коло залишається стійким незалежно від втрат в реактивних елементах, тобто при підключенні послідовно з індуктивностями і паралельно ємностям довільних резисторів з додатними опорами.

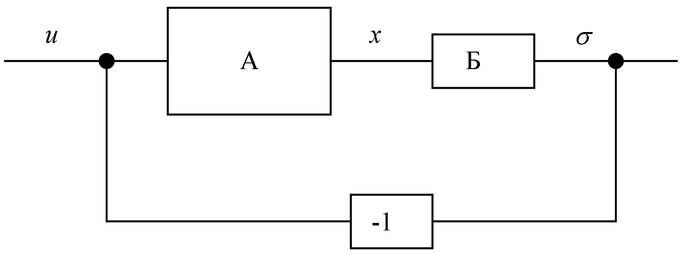
У теорії систем керування адитивна D-стійкість означає стійкість системи керування з довільним коефіцієнтом підсилення [2]. Поняття адитивної D-стійкості застосовується в задачах абсолютної стійкості, для вирішення проблеми Айзермана [3], а також для дослідження нейронних кіл [4], в задачах економетрії та математичної екології [5].

Підкласом адитивно D-стійких матриць є матриці, для яких матричне рівняння Ляпунова має розв'язки у вигляді діагональної матриці з додатними елементами (в літературі такі матриці називають D-дисипативними [5], Lyapunov diagonally stable [1]). Такі матриці розглянуто у [6] та у інших роботах.

Частковим різновидом адитивно D-стійких матриць є матриці, які залишаються стійкими при відніманні з одного або двох діагональних елементів довільних невід'ємних чисел. Умови, які повинна задовольняти $n \times n$-вимірна матриця A для того, щоб $A - D$ ($D = diag(d,0,...,0)$) була стійкою при довільному $d \geq 0$, розглядались в [2] на основі застосування частотного критерію Найквіста, математичного апарату Лур'є–Якубовича–Попова тощо. Однак досі конструктивних критеріїв не існує [7]. В цій публікації наведено критерій стійкості $A - D$ при $D = diag(d, 0,..., 0), d \geq 0$, який зводиться до стійкості двох поліномів.

Основний результат

Стійкість матриці $A - D$ при $D = diag(d,0,\ldots,0), d \geq 0$ зводиться до стійкості системи керування (див.рисунок) з довільним коефіцієнтом підсилення.



Система керування

На рисунку А – об'єкт керування, який описується системою рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = Ax + su, \tag{1}$$

де $x - n$-вимірний вектор, $A - n \times n$–стійка матриця, $s = (1,0,...,0)^T$, Б – блок, який описується рівнянням

$$\sigma = r^T x, \tag{2}$$

де $r = (d,0,...,0)^T$, d – довільний коефіцієнт підсилення, $d \geq 0$,

$$\sigma = -u. \tag{3}$$

Співвідношення (2), (3) описують регулятор.

Стійкість систем цього класу досліджується у багатьох роботах у зв'язку з проблемою абсолютної стійкості. Комплексна частотна характеристика розімкненої системи (1), (2) має вигляд

$$W(j\omega) = r^T (j\omega I - A)^{-1} s.$$

Відповідно до (2), (3)

$$W(j\omega)=d\frac{det(j\omega I-A_1)}{det(j\omega I-A)},\tag{4}$$

де A_1 – головна підматриця, яка відповідає алгебраїчному доповненню елемента a_{11} матриці A.

Для стійкості системи (1)–(3) при довільних $d\geq 0$ згідно з критерієм Найквіста необхідно і достатньо, щоб годограф $W(j\omega)$ не перетинав дійсної осі при від'ємних значеннях абсциси.

У [7] показано, що достатньою умовою стійкості системи на рисунку з безмежним коефіцієнтом підсилення є стійкість головної підматриці A_1. Далі будемо вважати A_1 і A стійкими. У такому разі знаки $det\,A_1$ і $det\,A$ протилежні, тому

$$W(0)>0\,.$$

Розглянемо умови, які має задовольняти дробово-раціональна функція $W(j\omega)$, щоб

$$arg\,W(j\omega)\neq\pi,0\leq\omega<\infty\,.\tag{5}$$

Для цього подамо її у вигляді

$$W(j\omega)=\frac{R_1(\omega)+jI_1(\omega)}{R(\omega)+jI(\omega)},\tag{6}$$

де $R_1(\omega),R(\omega),I_1(\omega),I(\omega)$ – поліноми.

Позначимо додатні нулі функцій у послідовності зростання $R(\omega):\overline{\omega}_1,\overline{\omega}_2,...;I(\omega):\overline{v}_0,\overline{v}_1,...;$ $R_1(\omega):\omega_1,\omega_2,...;I_1(\omega):v_0,v_1,...$. Оскільки матриці A_1 і A стійкі, то нулі дійсної $R(\omega)$ і уявної $I(\omega)$ частин, так само, як і нулі поліномів $R_1(\omega)$ і $I_1(\omega)$ – дійсні числа і чергуються [8]:

$$\overline{v}_0=0<\overline{\omega}_1<\overline{v}_1<\overline{\omega}_2<\ldots,$$

$$v_0=0<\omega_1<v_1<\omega_2<\ldots.$$

Від взаємного розташування нулів функцій чисельника і знаменника (6) буде залежати виконання умови (5). Відзначимо, що аналогічна задача, чи належить дробово-раціональна функція класу додатних функцій, розглядалась в [9].

У [2] показано, що достатні умови, за яких функція $W(j\omega)$ (6) задовольняє (5), такі:

$$\begin{cases}\overline{v}_{i-1}<\omega_i<\overline{v}_i, & i=1,2,\ldots,\\ \overline{\omega}_i<v_i<\overline{\omega}_{i+1}, & i=1,2,\ldots\end{cases}\tag{7}$$

Відзначимо також, що аналогічний критерій стійкості систем, коли нулі і полюси комплексної частотної характеристики – дійсні числа, наведено в [10].

Отже, достатні умови стійкості матриці $A-D$ при $D=diag(d,0,\ldots,0),d\geq 0$ зводяться до перевірки (7) чергування коренів поліномів $R_1(\omega),R(\omega),I_1(\omega),I(\omega)$.

Перевірка (7) чергування коренів поліномів є громіздкою процедурою. Конструктивнішими є умови, сформульовані в теоремі, які зводяться до перевірки стійкості двох поліномів.

Відзначимо, що $\det(j\omega I-A)=R(\omega)+jI(\omega)$ відповідає поліном $\det(\lambda I-A)$.

Теорема. Для того, щоб матриця $A-D$ при $D=diag(d,0,\ldots,0),d\geq 0$ була стійка, достатньо, щоб поліноми, які відповідають

$$\begin{aligned}P_1(\omega)&=R(\omega)+jI_1(\omega)\\ P_2(\omega)&=R_1(\omega)+jI(\omega)\end{aligned}\tag{8}$$

були стійкими.

Доведення.

Дійсно, при стійкості поліномів, що відповідають (8), виконуються умови (7), що і доводить теорему.

Відзначимо простоту побудови поліномів, які відповідають (8).

Розглянемо матрицю 4×4. Справедливо

$$\begin{gathered} det(j\omega I - A) = (j\omega)^4 + a_1(j\omega)^3 + a_2(j\omega)^2 + a_3(j\omega) + a_4 \\ det(j\omega I - A_1) = (j\omega)^3 + b_1(j\omega)^2 + b_2(j\omega) + b_3 \end{gathered},$$

де $a_i, b_i (i = 1,...)$ – коефіцієнти характеристичних поліномів для матриць A і A_1 відповідно.

Тоді

$$\begin{gathered} R_1 = -b_1\omega^2 + b_3 \\ I_1 = -\omega^3 + b_2\omega \\ R = \omega^4 - a_2\omega^2 + a_4 \\ I = -a_1\omega^3 + a_3\omega \end{gathered}$$

і

$$\begin{gathered} P_1(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + a_2\lambda^2 + b_2\lambda + a_4 \\ P_2(\lambda) = a_1\lambda^3 + b_1\lambda^2 + a_3\lambda + b_3 \end{gathered}$$

Для матриці 8×8 перевірка умов теореми зводиться до перевірки стійкості поліномів:

$$\begin{gathered} \lambda^8 + \lambda^7 + a_2\lambda^6 + b_2\lambda^5 + a_4\lambda^4 + b_4\lambda^3 + a_6\lambda^2 + b_6\lambda + a_8 = 0 \\ a_1\lambda^7 + b_1\lambda^6 + a_3\lambda^5 + b_3\lambda^4 + a_5\lambda^3 + b_5\lambda^2 + a_7\lambda + b_7 = 0 \end{gathered}$$

У [2] наведено необхідні умови, за яких виконується (5):

$$\begin{cases} 0 < \omega_1 < \overline{\omega}_2, \\ \overline{v}_{i-1} < v_i < \overline{v}_{i+1}, \ i = 1,2,\dots, \\ \overline{\omega}_{i-1} < \omega_i < \overline{\omega}_{i+1}, i = 2,3,\dots, \end{cases}$$

Ці умови у наведених вище позначеннях зводяться до перевірки стійкості поліномів, які відповідають:

$$\begin{gathered} Q_1(\omega) = R(\omega) + jR_1(\omega) \\ Q_2(\omega) = I(\omega) + jI_1(\omega) \end{gathered}$$

Очевидно, що отриманий результат справедливий для матриць $A - D$ при $D = diag(\underbrace{0,0,\dots,d}_{k},0,\dots,0), d \geq 0$. У такому разі комплексна частотна характеристика розімкненої системи має вигляд:

$$W(j\omega) = d\,\frac{det(j\omega I - A_k)}{det(j\omega I - A)}$$

де A_k – головна підматриця, що відповідає алгебраїчному доповненню елемента a_{kk} матриці A.

Отже, необхідною умовою адитивної D-стійкості матриці A є стійкість поліномів, що відповідають (8), для всіх $(n-1)\times(n-1)$ головних підматриць матриці A.

Висновок

Запропоновано достатні умови адитивної D-стійкості матриці при зміні одного діагонального елемента (стійкості одного класу систем керування з довільним коефіцієнтом підсилення), які зводяться до перевірки стійкості двох поліномів.

1. Hershkowitz D. Recent Directions in Matrix Stability // Linear Algebra and its Applications. – 1992, ***171****. – P. 161–186. 2. Романишин И.М., Синицкий Л.А. H_D-системы // Проблемы управления и информатики. – 1996. – 1–2. – С. 224–238. 3. Романишин И.М., Синицкий Л.А. О некоторых классах матриц и проблеме Айзермана // Проблемы управления и информатики. – 1998. – 6. – С. 14–24. 4. Kaszkurewicz E., Bhaya A. Comments on "Necessary and Sufficient Condition for Absolute Stability of Neural Networks" // IEEE Trans. on Circuits and System. – 1995, v.42. Part 1. – P. 497–499. 5. Пых Ю.А. Равновесие и устойчивость в моделях популяционной динамики. – М., 1983. 6. Barker G.R., Berman A., Plemmons R.J. Positive Diagonal Solutions to the Lyapunov Equations // Linear and Multilinear Algebra. – 1978. V.5. – P. 249–256. 7. Мееров М.В. Исследование и оптимизация многосвязных систем управления. – М., 1986. 8. Фельдбаум А.А., Бутковский А.Г. Методы теории автоматического управления. – М., 1971. 9. Балабанян Н. Синтез электрических цепей – М., 1961. 10. Цыпкин Я.З. Основы теории автоматических систем. – М., 1977.*

УДК 621.317

Б.М. Голюка[1], В.І. Лозбін[1,2], П.Г. Столярчук[1], В.О. Яцук[1]
[1]Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра метрології, стандартизації та сертифікації,
[2]Люблінська політехніка, кафедра автоматики і метрології

ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ МЕТРОЛОГІЧНОЇ НАДІЙНОСТІ ВИМІРЮВАНЬ НА ПОСТІЙНОМУ СТРУМІ

Описано метод оцінки метрологічної надійності вимірювань на постійному струмі.

The created method of assessment metrological reliability of metering for continuous current.

Вступ. Об`єктивну кількісну інформацію про перебіг технологічних процесів отримують, вимірюючи їх параметри. Вимірювання слід розглядати як цілісний процес від сприйняття і перетворення вимірювальної інформації з об`єкта до її опрацювання, зберігання, передачі і використання для вироблення зворотної дії на контрольовані технологічні об`єкти. Тому в сучасних умовах одним із найважливіших параметрів технічних об`єктів є їх метрологічна надійність. Щоб забезпечити необхідну метрологічну надійність, на практиці постійно контролюють процеси вимірювань. Достовірна вимірювальна інформація необхідної точності може бути отримана тільки технічно обґрунтованим вибором засобів вимірювання (ЗВ) і повинна містити дані про характеристики ЗВ та умови вимірювань.

На базі цих даних після визначення обмежувальних характеристик розраховують точнісні характеристики (межі допустимих основної та додаткової похибок) потрібного засобу вимірювання.

Постановка задачі. Однією із основних метрологічних характеристик засобів вимірювань при періодичному контролі є достовірність вимірювань (контролю) параметрів, яка вказує на імовірність того, що значення похибки вимірювання не буде перевищувати допустимих значень із заданою імовірністю $P_{дов}$.