УДК 621.382

Р.А. Воробель[1], О.П. Гук[2], К. В. Сущик[1]
[1]Фізико-механічний інститут ім Г. В. Карпенка НАН України,
[2]НВО “Термоприлад”

БАЛАНСНІ НАБЛИЖЕННЯ В ОПТИМАЛЬНОМУ ПРЕДСТАВЛЕННІ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕРМОМЕТРІВ ОПОРУ

© Воробель Р.А., Гук О.П., Сущик К.В., 2004

Запропоновано метод встановлення балансних наближень градуювальних характеристик нелінійними виразами. Його новизною є те, що вхідними даними є неперервна функція, а не дискретна множина. Це забезпечує досягнення оптимальної точності на всьому проміжку визначення градуювальної характеристики.

A method of calculation of balanced approximation of calibration scale by non-linear expressions is proposed. A novelty of proposed techniques is the use of input data as continuous function instead of discrete set of points. Such an approach allows to reach optimal accuracy at whole interval of calibration scale.

Вступ

Сучасний науково-технічний прогрес характеризує значне зростання впливу інтелектуальних засобів вимірювань на побудову технологічних процесів, інтенсифікацію продуктивності праці, підвищення якості та здешевлення продукції. І в ньому температура не тільки сприяє пізнанню природи, але є також основним фізичним параметром, який відіграє значну роль при контролі, управлінні та автоматизації технологічних процесів [5]. Тому актуальним є підвищення точності вимірювання температури.

У роботі аналізуються первинні термоперетворювачі опору, особливості яких віддзеркалює градуювальна характеристика. Саме достовірне і зручне подання цієї характеристики є запорукою дотримання необхідних похибок перетворення при вимірюванні температури. Тому спочатку проаналізуємо апроксимаційні підходи до подання градуювальник характеристик потім дослідимо ядро наближення та оцінимо його похибку опишемо спосіб знаходження границь ланок сплайна та наведемо результати моделювання термометрів опору.

1. Апроксимаційне подання градуювальних характеристик термоперетворювачів

Градуювальні характеристики термоелектричних перетворювачів, як правило, мають значну нелінійність і тому їх часто подають у вигляді таблично заданих функції або за допомогою інтерполяційних поліномів. Використання поліноміального опису в практиці ускладнюється його обчислювальною громіздкістю, зумовленою високим порядком полінома. Фактично, розробляючи термометри для лінеаризації нелінійності градуювальної характеристики, використовують обернену до неї. Так, наприклад, точний опис функції, оберненої до градуювальної характеристики платинового термометра, представляється поліномом п’ятнадцятого степеня, чим забезпечується діапазон вимірюваних температур термометра від 13.8033 К до 273.16 К[1]. Тому актуальною є проблема ефективніших методів подання градуювальних характеристик у аналітичному вигляді. Доцільно використовувати для цього балансні наближення сплайнами, кожна ланка яких є найкращим чебишовським наближенням, а похибка досягає максимального значення на кожній ланці сплайна. Такі наближення оптимальні, тобто при заданій кількості ланок вони наближають функцію з мінімальною похибкою, а при заданій похибці мають мінімальну кількість ланок.

Розглянемо наближення функції $f(x)$ на проміжку $[a,b]$ чебишовським сплайном

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

$$S(F,x)=\sum_{i=1}^{r} F(A_i,x)\theta((x-z_{i-1})(z_i-x)), \tag{1}$$

де $\theta(x)$ – функція Хевісайда; $Z=\{z_i\}_{i=0}^{r}$ – множина вузлів сплайна; $F(A_i,x)=F(a_{0i},a_{1i},\ldots a_{mi};x)$ – функція наближення.

Виберемо функцію $F(A,x)$ у вигляді

$$F(A,x)=g(x)\varphi(V_{k,l}(A,x)), \tag{2}$$

де $\varphi(x)\in C^{\infty}[a,b], \varphi(x)$ – монотонна на $[a,b]$, $g(x)\in C^1[a,b], g(x)\neq 0$ на $[a,b]$;

$$V_{k,l}(A,x)=x^s R_{k,l}(A,x^p)=x^s\,\frac{\sum_{j=0}^{k} a_j x^{jp}}{1+\sum_{j=1}^{l} b_j x^{jp}}.$$

2. Ядро наближення та оцінка похибки

Відомо, що при виконанні умови $f(x)\in C^{m+1}[a,b], f(x)\neq 0$ максимальна похибка найкращого чебишовського наближення многочленом $P_m(x)$ на інтервалі $[a,b]$ має вигляд

$$\mu=\frac{\left|f^{(m+1)}(\xi)\right|(b-a)^{m+1}}{2^{2m+1}(m+1)!}. \tag{3}$$

Припустимо, що за умови виконання певних умов для довільного виразу наближення $F(A,x)$, залежного від параметрів $A=(a_0,\ldots,a_m)$, максимальна похибка найкращого чебишовського наближення функції $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$ може бути подана як

$$\mu=\frac{\eta(f(\xi),F)(b-a)^{m+1}}{2^{2m+1}(m+1)!}. \tag{4}$$

При виконанні рівності (4) вираз $\eta(f(\xi),F)$ називається ядром наближення функції $f(x)$ виразом $F(A,x)$. Загалом вираз ядра залежить від *m+1* похідних функції, що наближається:

$$\eta(f(\xi),F)=\phi(f'(x),f''(x),\ldots,f^{(m+1)}(x),F).$$

Відомо [2], що коли ядро наближення $\eta(f,F)\neq 0$ при $x\in[a,b]$, то максимальна похибка рівномірного наближення функції $f(x)\in C^{m+2}[a,b]$ ($m=k+l$) чебишовським сплайном (1) з заданою кількістю ланок r має вигляд

$$\mu=\frac{r^{-m-1}}{2^{2m+1}(m+1)!}\left(\int_a^b\left|\frac{\eta(f,F)}{w(x)}\right|^{\frac{1}{m+1}}dx\right)^{m+1}\left[1+O\left(\frac{b-a}{r}\right)\right].$$

3. Знаходження границь ланок сплайна. Для знаходження границь ланок $Z=\{z_i\}_{i=0}^{r}$ $(z_i<z_{i+1}, i=0,1,..,r,\;\; z_0=a, z_r=b)$ при балансному наближенні функції $f(x)\in C^{(m+1)}[a,b]$ сплайном з $r\,(r\to\infty)$ ланками – найкращими чебишовськими многочленними наближеннями степеня m – Г. Мейнардус запропонував ітераційну формулу для розв'язування системи *(r–1)*-го рівняння із *(r–1)*-м невідомим $z_i\,(i=1,2,\ldots,r-1)$:

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

$$z_i^{(t)} = \frac{z_{i+1}^{(t-1)}\varphi\left(\frac{z_i^{(t-1)}+z_{i+1}^{t-1}}{2}\right)+z_{i-1}^{(t)}\varphi\left(\frac{z_i^{t-1}+z_{i-1}^{t}}{2}\right)}{\varphi\left(\frac{z_i^{(t-1)}+z_{i+1}^{t-1}}{2}\right)+\varphi\left(\frac{z_i^{t-1}+z_{i-1}^{t}}{2}\right)}, \qquad (5)$$

де $\varphi(x) = \left|f^{(m+1)}(x)\right|^{1/(m+1)}$, величина Z_i є черговим значенням z_i; початкові значення точок z_i поділяють проміжок $[a,b]$ на рівні частини. Ітераційна формула (5) збігається, якщо функція $\varphi(x)$ не змінює знака на проміжку $[a,b]$. Відоме [2] узагальнення формули (5) для наближення сплайном з ланками $F(A,x) = F(a_0,\ldots,a_m,x)$. Функція $\varphi(x)$ набуває вигляд $\varphi(x) = \left|\eta(f(x),F(A,x))/w(x)\right|^{1/(m+1)}$, де $\eta(f(x),F(A,x))$ – ядро наближення функції $f(x)$ виразом $F(A,x)$; $w(x)$– вага наближення. Ядро наближення знаходять методами, описаними раніше [4].

Формулу (3) отримують з умови рівності похибки на ланках, застосовуючи до кожної з них вираз (2) та замінюючи інтегрування квадратурною формулою прямокутників.

Щоб підвищити точність ітераційної формули, застосуємо тут замість формули прямокутників квадратурну формулу Сімпсона. Так виведена нова ітераційна формула для знаходження границь заданої кількості ланок сплайна при балансному наближенні [3]:

$$z_i^{(t)} = \frac{z_{i-1}^{(t-1)}\left(\varphi\left(z_{i-1}^{(t-1)}\right)+4\varphi\left(\frac{z_{i-1}^{(t-1)}+z_i^{t-1}}{2}\right)+\varphi\left(z_i^{(t-1)}\right)\right)+z_{i+1}^{(t)}\left(\varphi\left(z_i^{(t-1)}\right)+4\varphi\left(\frac{z_i^{(t-1)}+z_{i+1}^{t-1}}{2}\right)+\varphi\left(z_{i+!}^{(t-1)}\right)\right)}{\varphi\left(z_{i-1}^{(t-1)}\right)+4\varphi\left(\frac{z_{i-1}^{(t-1)}+z_i^{t-1}}{2}\right)+2\varphi\left(z_i^{(t-1)}\right)+4\varphi\left(\frac{z_i^{(t-1)}+z_{i+1}^{t-1}}{2}\right)+\varphi\left(z_{i+1}^{(t-1)}\right)}. \qquad (6)$$

Приклад

Представити многочленним чебишовським сплайном з кількістю ланок *r=2* та степенем многочлена на кожній ланці *m=2* градуювальну характеристику платинового термометра опору, задану на проміжку від 273.16 K до 1234.94 K у вигляді:

$$W_r = 3.317710817\cdot10^{-28}\cdot T^9 - 2.412817407\,10^{-24}\cdot T^8 + 7.420833832\,10^{-21}\cdot T^7 -$$
$$-1.255295829\,10^{-17}\cdot T^6 + 1.280064828\,10^{-14}\cdot T^5 - 8.187928114\,10^{-12}\cdot T^4 +$$
$$+3.342198247\,10^{-9}\cdot T^3 - 1.454195220\,10^{-6}\cdot T^2 + 4.441108307\,10^{-3}\cdot T - 0.1421836301.$$

Виконавши обчислення, отримуємо сплайн:

$$s(x) = \begin{cases} 0. & x < 273.16 \\ -.13215592 + (.0043047590 - .58508919\ 10^{-6}\,x)\,x & x \le 879.3535668 \\ -.14529373 + (.0043409062 - .60920869\ 10^{-6}\,x)\,x & x \le 1234.94 \\ 0. & 1234.94 < x \end{cases}$$

Максимальна абсолютна похибка наближення дорівнює 0.000076.

Значення максимальної абсолютної похибки для інших значень *r* та *m* наведено у таблиці. Аналізуючи отриманий результат, слід зазначити, що наближення сплайном істотно зменшило вимоги до точності подання апроксимаційних параметрів наближення.

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Похибка наближення многочленним чебишовським сплайном

Кількість ланок сплайна	Степінь многочлена на кожній ланці			
	1	2	3	4
1*	0.069011	0.000591	0.000177	0.000167
2	0.017450	0.000076	0.000039	$7.793 \cdot 10^{-7}$
3	0.007685	0.000050	$7.042 \cdot 10^{-6}$	$6.778 \cdot 10^{-7}$
4	0.004235	0.000019	$1.527 \cdot 10^{-6}$	$1.515 \cdot 10^{-7}$

Висновки. Отримані результати ілюструють доцільність застосування наближення сплайнами для подання градуювальних характеристик. Застосування сплайнів невеликих порядків дало змогу спростити аналітичне подання характеристики і зробити її придатнішою для апаратної реалізації.

1. Techniques for Approximating the International Temperature Scale of 1990. BIPM Sèvres, France,1990. 2. Попов Б. А. Равномерное приближение сплайнами. – К., 1986. 3. Попов Б. О., Сущик К. В. Дослідження збіжності ітераційної процедури для знаходження балансного наближення // Відбір і обробка інформ. – 2000. – Вип. 16(92). – С. 137–141. 4. Попов Б. О., Сущик К. В. Точність наближення функцією від раціонального многочлена // Відбір і обробка інформ. – 2000. – Вип. 14(90). – С. 137–141. 5. Температурые измерения. Справочник // Геращенко О.А., Гордов А.Н., Лах В.И., Стаднык Б.И., Ярышев Н.А. – К., 1984.

УДК 517.9, 681.51

І.М.Романишин[1], Л.А.Синицький[2]
[1]Фізико-механічний інститут НАН України
[2]Львівський національний університет ім. І. Франка

ДО АДИТИВНОЇ D-СТІЙКОСТІ МАТРИЦІ ПРИ ЗМІНІ ОДНОГО ДІАГОНАЛЬНОГО ЕЛЕМЕНТА

© Романишин І.М., Синицький Л.А., 2004

Наведено достатні умови адитивної D-стійкості матриці при зміні одного діагонального елемента, які зводяться до стійкості двох поліномів.

Адитивна D-стійкість матриці при зміні одного діагонального елемента еквівалентна стійкості одного класу систем керування з відємним зворотним зв'язком довільним коефіцієнтом підсилення. Отже, подано достатні умови, застосовні до перевірки стійкості цього класу систем керування.

Sufficient conditions of additive D-stability of a matrix at change of one diagonal element are presented. These conditions are reduced to stability of two polynoms.

Additive D-stability of a matrix at change of one diagonal element is equivalent to stability of one class of control systems at any factor of amplification. Thus, the resulted sufficient conditions are applied for check of stability of this class of control systems.

1.Вступ

Матрицю A і її характеристичний поліном будемо вважати стійкими, якщо всі власні значення матриці A, тобто нулі характеристичного полінома, мають від'ємні дійсні частини.

Визначення [1]. Матриця *A* називається адитивно D-стійкою, якщо *A–D* ($D = diag(d_1, d_2, ..., d_n)$) – стійка за довільних $d_i \geq 0$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$.

---

* Під чебишовським сплайном з кількістю ланок *r=1* розуміємо найкраще чебишовське наближення.

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua