<u>Означення.</u> Білий шум $\{\xi_j, j \in Z\}$ називається пуассонівським періодичним білим шумом, якщо для його розподілу

$$P\{\xi_j = k\} = \frac{\lambda_j^k}{k} e^{-\lambda_j}$$

параметр λ_j є періодичним, тобто існує ціле $L > 0$, що

$$\lambda_j = \lambda_{j+L}. \quad (3)$$

Це означення дає можливість побудови алгоритму моделювання пуассонівського періодичного білого шуму Для цього, використовуючи базовій білий шум, необхідно реалізувати на ЕОМ відоме перетворення його елементів в елементи послідовності, розподіленої за законом Пуассона. Але тут, на відміну від моделювання пуассонівського шуму, параметр λ якого постійний, необхідно враховувати закономірність (3), тобто періодичність параметра λ_j. Аналіз цих оцінок показує їх майже періодичну поведінку, причому значення оцінок близькі до відповідних значень, обчислених згідно з (4). Це узгоджується з загальним теоретичним положенням про поведінку оцінок математичного сподівання і дисперсії випадкових величин, розподілених за законом Пуассона.

Отримані в даній роботі результати мають важливе теоретичне і прикладне значення, оскільки тут вперше запропоновано ефективний метод моделювання періодичних білих шумів і реалізовано цю можливість для розподілу Пуассона. Результати моделювання у свою чергу можуть бути використані для моделювання стохастично періодичних сигналів, для розв'язуваннч задач імітаційного моделювання явищ, процесів, характерною особливістю яких є стохастична періодичність.

УДК 681.325

ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ВИМОГ ШИРОКОСМУГОВИХ СИГНАЛІВ

© *Адріан Наконечний, 2000*

Державний університет “Львівська політехніка”, кафедра "Автоматика і телемеханіка", вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна.

Розглядаються доцільність і основні критерії розділення сигналів на вузько- і широкосмугові. Показано, що від цього залежить вибір дійсної аналітичної моделі, а отже, і спосіб обробки сигналів. Наголошується, що для аналізу широкосмугових сигналів найбільш придатним є малохвильове перетворення, яке забезпечує найкращу роздільну здатність в усьому діапазоні частот.

Рассматриваются необходимость и основные критерии разделения сигналов на узко- и широкополосные. Показано, что от этого зависит выбор действительной аналитической модели, а значит, и способ обработки сигналов. Подчеркивается, что для анализа широкополосных сигналов наиболее приемлемым представляется маловолновое преобразование, которое обеспечивает наилучшую разделительную способность во всем диапазоне частот.

The importance and criterions of the signals division into narrow- and wideband have been presented in this article. There has been showed that the selection of valid analytical model depends on this fact, and hence, depends also on signal processing method. There has been emphasized that wavelet transform is the most appropriate for the wideband signals analysis. This transform gives the best resolution through all frequency range.

Вступ. Відомо, що при аналізі та обробці широкосмугових сигналів, які часто застосовують на практиці, досить гостро постає проблема забезпечення необхідної роздільної здатності в широкому діапазоні частот.

Властивості роздільної здатності вузькосмугових сигналів і вузькосмугових функцій, які використовують перетворення Фур'є не є Q-постійними* і змінюються вздовж багатьох октав. Отже, неможлива якісна оцінка і дійсне порівняння сигналів в межах їх широких частотних діапазонів. З іншого боку, широкосмугові властивості спричиняють розширення конструкції класичного вузькосмугового сигналу і вузькосмугових функцій, які, крім використання перетворення Фур'є, базуються ще і на стаціонарності перетворень (малих змінах). Властивості роздільної здатності широкосмугових (малохвильових) перетворень залишаються постійними упродовж багатьох октав зміни сигналів [1,4], а отже, вони дозволяють здійснювати оцінку і порівняння характеристик сигналів в широкому діапазоні частот. Згадана Q-постійна властивість малохвильового перетворення досягається за рахунок постійної зміни розміру вікна та фіксації кількості циклів в аналізуючому "ядрі". Малохвильове перетворення забезпечує пропорційну роздільну здатність в кожній частотній смузі. У міру збільшення центральної частоти зростає ширина смуги аналізуючого ядра масштабованої базової малохвильової функції. Роздільна здатність за зміщенням (часом) також змінюється пропорційно; на високих частотах (малі масштаби) масштабована базова малохвильова функція сильно стискається і тим самим забезпечує добру роздільну здатність за часом.

Зазначимо, що малохвильова теорія має деяку аналогію до короткочасового перетворення Фур'є, причому ця аналогія досліджена в багатьох працях з метою пристосування малохвильової теорії до традиційних, добре відомих теорій [4–6]. При цьому проблема одночасного часо-частотного або часо-масштабного аналізу досліджується з наголосом на малохвильову теорію та характеристики роздільної здатності у двовимірному просторі.

Якщо у малохвильових перетвореннях використовувати базову малохвильову функцію у вигляді тоноподібної функції вікна, аналогічної до базової функції Морлета, то такі перетворення дають можливість різко мінятися при високочастотних компонентах сигналу. Роздільна здатність за часом стає дуже високою для малих значень масштабу, а відповідно роздільна здатність за частотою зменшується. Для аналізування низькочастотних компонент малохвильове перетворення огинає зовнішні контури (великий масштаб), створюючи вікна довшої тривалості з низькою часовою роздільною здатністю, але високою роздільною здатністю по частоті. Комбінація різко змінних і обвідних властивостей малохвильових перетворень дозволяє створювати Q-постійні або вікна з постійними фрактальними роздільними здатностями ширини смуг. Необхідно відзначити, що базові малохвильові функції є також широкосмуговими, оскільки вони, крім того, що можуть міняти частоти у широкому частотному діапазоні, мають також низькочастотні обвідні.

Як відомо, добуток роздільних здатностей за часом і частотою визначається нерівністю Гайзенберга і залишається практично постійним протягом всієї смуги частот вхідних сигналів [2]. Отже, обробка такої постійної роздільної здатності перетворення має однакові властивості (Q-постійний аналіз) протягом багатьох смуг проведення операцій. Така властивість не справджується у випадку перетворення Фур'є, яке має однакову ширину смуги навколо кожної центральної частоти. Поділена ширина смуги або Q змінюються у міру зміни центральної частоти і вікно перетворення Фур'є не може виконувати Q-постійний аналіз протягом всієї ширини смуги.

Інтерпретація роздільної здатності масштаб-зміщення. Під час дослідження двозначних функцій доцільно здійснювати і дослідження роздільної здатності масштаб-зміщення. Така роздільна здатність аналогічна до роздільної здатності в часо-частотному плані для вузькосмугового випадку. Якісні характеристики малохвильового перетворення в масштабно-зміщувальному плані найлегше можна інтерпретувати як якісні характеристики широкосмугової двозначної функції. Таке представлення забезпечує тісний зв'язок з дослідженням вузькосмугових функцій, які тісно пов'язані з будь-яким апаратом часо-частотного аналізу [1,5] і усвідомленням можливих застосувань

* Q-постійною вважається постійна роздільна здатність протягом широкого частотного діапазону вхідних сигналів

малохвильового перетворення. Наступний розгляд широкосмугових умов показує, що деякі з припущень, які звичайно задовольняються у вузькосмуговому аналізі, а саме стаціонарність, стають надалі недійсними.

Перед детальним дослідження широкосмугових двозначних функцій доцільно провести як їх обґрунтування, так і їх обмеження. Широкосмугові і/або нестаціонарні сигнали широко досліджували протягом минулих кількох десятків років, однак вони не застосовувалися в багатьох практичних системах або розробках. Такі дії зумовлювалися тим, що кожна обробка, яка включала широкосмугові сигнали, вимагала великого обсягу обчислень, при цьому приймались часто некоректні припущення, а також недієздатні алгоритми та структури обробки. **Оскільки малохвильова теорія дозволяє ефективно здійснювати широкосмугову обробку, то саме на її основі доцільно аналізувати широкосмугові сигнали і системи.** Широкосмугова обробка і пов'язані з нею широкосмугові двозначні функції можуть бути представлені в малохвильовій області через використання малохвильового перетворення і поєднаних з ним малохвильових операторів. Як з теоретичного, так і з практичного погляду є доцільним представляти широкосмугову обробку на основі малохвильової теорії, а також подавати інтерпретацію малохвильової теорії на основі концепції широкосмугової обробки. Такі взаємозв'язки поєднують малохвильову теорію з широкосмуговими структурами обробки, які мають прикладну орієнтацію. Широкосмугові нестаціонарні сигнали існують в багатьох прикладних задачах, але їх використовували раніше, переважно, у вигляді певних обмежень, які накладалися на вузькосмугову обробку, ніж як елемент моделі або характеристики. Тому включення широкосмугових нестаціонарних особливостей в процес моделювання (з малохвильової теорії) дозволяє отримати істотні переваги при розв'язанні ряду прикладних задач.

Вимоги до широкосмугового сигналу. Прикладні задачі, які отримують переваги від широкосмугової або малохвильової обробки, повинні задовольняти певні "широкосмугові вимоги". Тому перед розглядом кожної широкосмугової двозначної функції необхідно здійснювати перевірку на виконання таких вимог. Після чого розглядаються декілька можливих широкосмугових структур обробки (процесорів). Кожний інший процесор вимагає встановлення своїх припущень і вимог. Спочатку коротко накладаються вимоги на сигнали в межах частини ширини смуги, а потім точніше на добуток тривалість-ширина смуги. Коли ж сигнал або система розглядаються як широкосмугові? Для багатьох застосувань широкосмугові вимоги залежать як від сигналу, так і від системи одночасно.

Звичайно величина ширини смуги сигналу порівнюється з її центральною частотою. При цьому визначається частинна ширина смуги (BW/f_c) якщо сигнал є широкосмуговим (частинна ширина смуги є мірою, залежною від сигналу). Частинна ширина смуги (інколи іменується як сигнал "Q") визначається, коли фазова і амплітудна обвідна, яка "пробігає" по комплексній експоненті на центральній частоті, є допустимою моделлю. Модульований сигнал належить до синусоїдного або комплексного експоненційного сигналу на особливій несучій (центральній) частоті ω_c, який був закодований (модульований) інформацією. Звичайно несуча частота є набагато вища, ніж ширина смуги модулюючого сигналу. Модуляція або кодування звичайно виконуються зміною амплітуди синусоїди, фази або їх обох в часі. Така зміна фази і/або амплітуди є модулюючою обвідною фази й амплітуди $\phi(t)$ і $a(t)$ відповідно. Вираз для модульованого сигналу має вигляд:

$$f(t) = a(t)e^{j\phi(t)}e^{j\omega_c t} = a(t)e^{j(\omega_c t + \phi(t))} \qquad (1)$$

Різні типи модуляції, зокрема частотна модуляція (ЧМ), фазова модуляція (ФМ) і амплітудна модуляція (АМ) безпосередньо кодують модульовану інформацію в обвідні. Інші типи модуляції одночасно змінюють амплітудну і фазову обвідні.

Якщо обвідні змінюються на величину (найвища частота в модулюючому сигналі), що є значно більшою відносно центральної частоти, тоді центральна частота не буде більше відділятися від обвідних – сигнал розглядається як широкосмуговий. Значною величиною модуляції вважається перевищення приблизно на десяту частину центральної частоти. У випадку, коли зміна фази в обвідній за рівнем є близька до зміни фази у члені несучої частоти, то зміни фази обвідної і несучої

мають розглядатися разом. Даний факт доцільно розглядати докладніше після більш строгого визначення центральної частоти і ширини смуги.
Початковий результат є таким, що для широкосмугових сигналів член несучої частоти не може бути відділеним від його обвідної без представлення недопустимого спотворення (якщо спотворення є допустимим, то сигнал розглядається як вузькосмуговий).

Широкосмугові сигнали і аналітична модель сигналу. Підтвердження широкосмугової умови для частинної ширини смуги формулюється за допомогою аналітичного представлення сигналу [1,7], яке використовує обвідні сигналу для представлення сигналу і ефективно відкидає експоненційність на центральній частоті. У багатьох прикладних задачах для зменшення кількості вибірок та їх частоти дослідники використовують дану аналітичну модель сигналу з метою змішування сигналів з їх відеоеквівалентами (представлених тільки обвідними). Обвідні аналітичних сигналів згодом обробляються за допомогою відповідних перетворень та інших операцій (зокрема малохвильових перетворень). Така обробка обвідної є **недійсною** для широкосмугових сигналів. Недійсність такого відеопроцесора підтверджується згодом.

Аналітичний сигнал часто представляють за допомогою Гільбертового перетворення [3]. Аналітичний сигнал формується з дійсного сигналу

$$f_{\text{дійсн.}}(t) = a(t)\cos[\omega_c t + \phi(t)] \tag{2}$$

додаванням його до Гільбертового перетворення того самого дійсного сигналу

$$f(t) = f_{\text{дійсн.}}(t) + jHT[f_{\text{дійсн.}}(t)]. \tag{3}$$

Для того, щоб дана функція мала форму, аналогічну до рівняння (1), вимагається виконання умови відсутності спектрального перекриття. Якщо сигнал моделюється як добуток високочастотного сигналу (вибраний як тональний або комплексний експоненційний (показниковий) на несучій частоті $e^{j\omega_c t}$) і низькочастотного сигналу (обвідний сигнал $a(t)e^{j\phi(t)}$):

$$f(t) = lf(t)\cdot hf(t) \text{ або } f(t) = a(t)e^{j\phi(t)}e^{j\omega_c t} \tag{4}$$

лише тоді, коли (немає перекриття між низькочастотними і високочастотними ділянками сигналу):

$$LF(\omega)\cdot HF(\omega) = 0 \text{ для всіх } \omega.$$

Гільбертовим перетворенням добутку високочастотного сигналу $e^{j\omega_c t}$ і низькочастотного сигналу (обвідна $a(t)e^{j\phi(t)}$) буде низькочастотний сигнал, помножений на Гільбертове перетворення високочастотного сигналу:

$$HT[f(t)] = lf(t)\cdot HT[hf(t)] \tag{5}$$

де HT означає Гільбертове перетворення. Для модульованої обвідної отримаємо:

$$HT[f(t)] = lf(t)HT[hf(t)] = a(t)e^{j\phi(t)}HT\left[e^{j\omega_c t}\right] = \\ = a(t)e^{j\phi(t)}e^{j\left(\omega_c t - \frac{\pi}{2}\right)} = e^{-j\frac{\pi}{2}}a(t)e^{j\phi(t)}e^{j\omega_c t} = e^{-j\frac{\pi}{2}}f(t) \tag{6}$$

З (3) отримаємо

$$f(t) = a(t)e^{j\phi(t)}e^{j\omega_c t} + je^{-j\frac{\pi}{2}}\left[a(t)e^{j\phi(t)}e^{j\omega_c t}\right] \tag{7}$$

Відзначимо, що Гільбертове перетворення експоненти є лише зміщення фази [3] і при цьому припускається, що центральна частота додатна. Коли дійсний сигнал додається до його Гільбертового перетворення (3), то фазове зміщення взаємодіє так, щоби знищити частотні компоненти, менші від нуля, і в такий спосіб створюється аналітичний опис сигналу. Всі згадані операції виконуються з припущенням про відсутність спектрального перекриття. Для цієї моделі це означає, що центральна частота є більша, ніж будь-яка частота, що міститься в модулюючому сигналі.

Аналітична модель сигналу є недійсною для деяких широкосмугових сигналів. Гільбертове перетворення добутку тонального сигналу (на центральній частоті) і низькопропускного (обвідного) сигналу (4) необов’язково дорівнює добутку цього тонального сигналу і Гільбертового перетворення низькопропускного сигналу. Така умова вимагається для представлення дійсного аналітичного сигналу смугового сигналу. Умовою, що вимагається, є те, що центральна частота тонального сигналу повинна мати частоту, що є вищою, ніж будь-які частоти низькопропускного сигналу з “значною” енергією (можливо, не нижче ніж 20-30 dB). Центральна частота повинна бути більшою, ніж ця “розширена ширина смуги”.

Коли центральна частота є меншою, ніж “розширена ширина смуги”, тоді модель аналітичного сигналу буде недійсна. Сигнал не можна представити як добуток високопропускного і низькопропускного сигналу. Якщо ж операції, пов’язані з формуванням аналітичного сигналу, все ж виконуються, тоді результуючий сигнал не має коректних фазових і амплітудних обвідних (такі обвідні не будуть більше відповідати обвідним дійсного оригінального сигналу). Можна показати, що зміщення фази на 180° використовується для високочастотних ділянок спектра сигналу вище центральної (або високої) частоти. Ефект множення високочастотних компонентів на мінус один може бути значним – велика частина інформації сигналу міститься у фазі (разом із всіма часолокалізованими властивостями перетворення Фур’є). Всі часові вибірки збиваються при зміні цих частотних компонент. Отже, якщо така модель аналітичного сигналу застосовується до широкосмугових сигналів, то аналітичні сигнали не можуть бути сформовані додаванням дійсного сигналу до його Гільбертового перетворення. Даний факт є істотним обмеженням при виборі аналітичної моделі широкосмугового сигналу.

Ефективне середньоквадратичне значення (с.к.з.) добутку час-ширина смуги. Для більш строгої оцінки широкосмугових вимог до сигналів розглядається добуток часу на ширину смуги. Для більшості широкосмугових сигналів вони розглядаються як широкосмугові, якщо їх частинна ширина смуги, поділена на центральну частоту, є більшою, ніж приблизно 0,1 (або10%), або

$$\left[\frac{(\mathrm{BW})}{\omega_c}\right] \rangle 0{,}1 \text{ коли } \omega_c \neq 0$$

Якщо центральна частота дорівнює нулю, то дане означення не використовується і сигнал розглядається як широкосмуговий. Для сигналу $f(t)$ спектр $F(\omega)$ визначається як перетворення Фур’є від $f(t)$. При цьому центральна частота визначається як спектральна середня точка:

$$\omega_c = \left[\frac{\int_L^{\infty} \omega |F(\omega)|^2 d\omega}{2\pi \int_L^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega}\right] \qquad (8)$$

де $L = 0$ для дійсних сигналів і $L = -\infty$ для комплексних або аналітичних сигналів. Ширина смуги визначається як середньоквадратичне значення від ширини смуги:

$$\mathrm{BW} = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(\omega - \omega_c)|^2 d\omega}{(2\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega - \omega_c)|^2 d\omega}}\,, \qquad (9)$$

однак для дійсних сигналів тільки додатна частина частоти оригінального спектра включається в це інтегрування. Необхідно зазначити, що сигнали, енергія яких сконцентрована на низьких частотах (низькопропускні сигнали) завжди розглядаються як широкосмугові сигнали. Це зумовлено постійними змінами масштабу, які трапляються (в багатьох октавах) навколо нульової частоти.

Для аналітичного сигналу, який розглядався попередньо, визначення центральної частоти повинно бути середньоквадратичним, яке визначається виразом (8). Однак середньоквадратичне значення ширини смуги не може бути допустимим визначенням для ширини смуги модулюючого сигналу. Це обумовлюється її визначенням як 3 dB від ширини смуги. Ширини смуг є до деякої міри довільними доти, доки не будуть визначені спеціальні загасання на краях смуги. Енергія низькопропускного модулюючого сигналу мусить бути значно ослаблена на центральній частоті; 3 dB є недостатньо. Рівень допустимого спотворення буде визначати ступінь необхідного загасання (приблизно 20-30 dB щонайменше) і загасання буде приводити до збільшення ширини смуги.

Для будь-яких сигналів, які є **справді багатооктавними (широкосмуговими) сигналами, аналітичний вираз сигналу матиме недійсне представлення.** Голос є прикладом багатооктавного сигналу з частотними компонентами, меншими, ніж 100Гц і більшими, ніж 6,4 кГц (6 октав). Аналітичний вираз сигналу, який формується з голосу, не буде точною моделлю голосу – деякі компоненти частот будуть зміщені по фазі, а інші – ні (як це було показано в попередньому аналізі Гільбертового перетворення).

Який буде вплив такого спотворення? Якщо сигнали є багатооктавними сигналами і використовується аналітична форма, демодульована низькопропускна обвідна сигналу буде іншою, ніж оригінальний вузькосмуговий модульований сигнал (як це розглядалося вище). Отже, при активному зондуванні, коли передавальний модульований сигнал є відомий, опорні сигнали, що формуються з цього оригінального передавального низькопропускного сигналу, не будуть відповідати прийнятій обвідній сигналу. Неузгодженості між опорними сигналами і прийнятими обвідними здебільшого будуть спричиняти значне зменшення досягнення максимальної кореляції або роздільної здатності (зменшується якість обробки узгодженого фільтра). На завершення відзначимо, що аналітична модель сигналу і пов'язана з нею обробка обвідної є дійсною тільки тоді, коли "розширена ширина смуги" низькопропускного сигналу є меншою, ніж центр смуги пропускання сигналу або частота несучої.

Повернемося до загальних властивостей сигналу. Крім характеристики частинної ширини смуги сигналу, є також важливою характеристика тривалості ефективного часу сигналу. Для сигналу $f(t)$ центральний час T визначають так:

$$T_c = \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} t\left|f(t)\right|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|^2 dt}\right] \tag{10}$$

Тривалість ефективного часу визначається як середньоквадратична тривалість:

$$T = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2\left|f(t-T_c)\right|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t-T_c)\right|^2 dt}} \tag{11}$$

Центральний час може ефективно центрувати (усереднювати) положення сигналу в нульовий момент часу. Тривалість ефективного часу визначає величину тривалості часу сигналу.

Середньоквадратичні ширина смуги і тривалість часу можуть бути об'єднані для формування ефективного середньоквадратичного добутку час-ширина смуги $T \cdot BW$ Коли цей добуток час-ширина смуги є значно більшим 1, тоді сигнали будуть розглядатися як **широкосмугові**. Багато авторів [6,7]відносять такі сигнали до розряду складних сигналів. Такого типу сигнали можуть бути детерміновані або стохастичні. Якщо сигнали є стохастичні, то очікуване значення $f(t)$ заміняє $f(t)$ в рівняннях (10) і (11), а спектральна густина потужності $f(t)$ заміняє $\left|F(\omega)\right|^2$ в рівняннях (8) і (9).

Висновки. **Коректне тлумачення широкосмуговості сигналу визначає вигляд аналітичної моделі сигналу (її дійсність або недійсність) і в остаточному підсумку спосіб його обробки.**

Широкосмуговість сигналу може бути визначена оцінкою або відношенням частинної ширини смуги до центральної частоти, або середньоквадратичного добутку час-ширина смуги.

Наведену вище аналітичну модель широкосмугового сигналу можна використовувати тільки у випадку, коли ширина смуги низькочастотної обвідної є менша від центральної частоти, що становить істотне обмеження для розгляду такого типу сигналів.

Для отримання аналітичної моделі широкосмугового сигналу, а, отже, для здійснення його ефективної обробки доцільно використовувати аналітичну модель, що базується на малохвильовому перетворенні. Таке представлення дає змогу отримати постійну роздільну здатність в широкому діапазоні частот і не спотворювати амплітудну і фазову складові.

1. Наконечний А.Й. Малохвильове перетворення і широкосмугові взаємні двозначні функції // Вісн. ДУ "Львівська політехніка". 1998. № 356. 2. Наконечний Р.А. Представлення сигналів через базові функції // Збірник наукових праць "Комп'ютерні технології друкарства" конф."ДРУКОТЕХН-98". С.107-108. 3. Ефимов А.В., Золотарев Ю.Г., Терпигорева В.М. Математический анализ (специальные разделы). Ч.2. М., 1980. 295 с. 4. Charles K. Chui. An Introduction to Wavelets // Department of Mathematics, Texas AEM University. 1993. 5. Daubechies I. The wavelet transform, time/frequency localization and signal analysis // IEEE Trans. Inform. Theory. Vol.36. Sept. 1990. P.961-1005. 6. Flandrin, P. Wavelets and related time-frequency transforms // Proc. SPIE 1348/ 1990. P.2-13. 7 Swick D.A. A Review of Wideband Ambiguity Functions. NRL Report 6994. 1969.