5. ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ГАЛУЗІ

УДК 534.1+62-5 ***Проф. Б.І. Сокіл, д-р техн. наук – Академія сухопутних військ ім. гетьмана Петра Сагайдачного; асист. М.Б. Сокіл, канд. техн. наук – НУ "Львівська політехніка"; аспір. О.І. Хитряк – Карпатському відділенні Інституту геофізики ім. С.І.Субботіна НАН України***

ОДИН ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ПРО НЕЛІНІЙНІ ЗГИННІ КОЛИВАННЯ СЕРЕДОВИЩ

Запропоновано методику розв'язування обернених задач динаміки для згинних нелінійних коливань середовищ. Вона дає змогу побудувати аналітичну апроксимацію пружних та дисипативних сил, виходячи із закону зміни основних параметрів руху. Методика базується на принципі одночастотності коливань у нелінійних системах та методі Крилова-Боголюбова-Митропольського (КБМ) побудови асимптотичних розв'язків крайових задач для рівнянь з частинними похідними, які є математичними моделями процесу.

Ключові слова: нелінійні коливання, амплітуда, частота, асимптотичний метод

Актуальність та огляд основних результатів досліджень. Аналітичне визначення силових чинників відповідно до закону руху об'єкту в одно- чи багатовимірних пружних системах навіть для найпростіших їх моделей пов'язане з певними труднощами. Складність полягає в тому, що задача не завжди має єдиний розв'язок. Різні аспекти розв'язування таких задач (а вони мають назву обернених задач динаміки [1]) стосовно системи із зосередженими масами розглядали, наприклад, в [2-8]. Метою ж цієї роботи є описати за допомогою аналітичних співвідношень жорсткісні та ін. характеристики середовищ таким чином, щоб їх рух відбувався відповідно до заданих (програмних) законів зміни амплітуди і частоти коливань.

Постановка задачі. Відомо [9, 10], що динамічні процеси багатьох систем із розподіленими параметрами описуються диференціальним рівнянням

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\alpha^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=\varepsilon f\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right), \tag{1}$$

зокрема, воно описує нелінійні згинні коливання суцільних та сипких середовищ. В (1) $u(x,t)$ – поперечне переміщення досліджуваного об'єкта з координатою x в довільний момент часу t; α – стала, яка визначається через фізико-механічні параметри середовищ; $f\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)$ – невідома функція, що вказує на відхилення його пружних характеристик від лінійного закону, а також нелінійні дисипативні та ін. сили; $\varepsilon>0$ – малий параметр і він вказує на малу величину максимального значення останніх порівняно із лінійною складової відновлювальної сили. Залежно від способу закріплення для рівняння (1) будемо розглядати наступні крайові умови:

$$u(x,t)\big|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial\, x^2}\right|_{x=0} = 0; \qquad u(x,t)\big|_{x=l} = \left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial\, x^2}\right|_{x=l} = 0 \tag{2а}$$

- для випадку шарнірно опертих кінців;

$$u(x,t)\big|_{x=0} = \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial\, x}\right|_{x=0} = 0; \qquad \left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial\, x^2}\right|_{x=l} = \left.\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial\, x^3}\right|_{x=l} = 0 \tag{2б}$$

- для випадку жорстко закріпленого лівого кінця $(x=0)$ та вільного правого кінця $(x=l)$;

$$u(x,t)\big|_{x=0} = \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial\, x}\right|_{x=0} = 0; \qquad u(x,t)_{x=l} = \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial\, x}\right|_{x=l} = 0 \tag{2в}$$

- для жорстко закріплених лівого і правого кінців;

$$\left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial\, x^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial\, x^3}\right|_{x=0} = 0; \qquad \left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial\, x^2}\right|_{x=l} = \left.\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial\, x^3}\right|_{x=l} = 0 \tag{2г}$$

- для випадку вільних кінців;

$$u(x,t)\big|_{x=0} = \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial\, x}\right|_{x=0} = 0; \qquad u(x,t)_{x=l} = \left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial\, x^2}\right|_{x=l} = 0 \tag{2д}$$

- для випадку жорстко закріпленого правого кінця та шарнірно опертого лівого кінця.

Методика розв'язування. Використовуючи загальну ідею методу КБМ [9, 11], у першому наближенні одночастотний розв'язок рівняння (1) за крайових умов (2а–2д) запишемо у вигляді

$$u(x,t) = u_0(a,x,\psi) + \varepsilon u_1(a,x,\psi), \tag{3}$$

де параметри a та ψ є функції часу, а закони їх зміни задаються програмним рухом; $u_0(a,x,\psi)$ та $u_1(a,x,\psi)$ – 2π – періодичні по $\psi = \omega t + \varphi$ функції, ω – частота, φ – початкова фаза; a – амплітудний параметр динамічного процесу. Нормальні функції, що визначають форми динамічної рівноваги, та відповідні власні числа незбуреного $(\varepsilon = 0)$ руху визначаємо із розв'язків відповідних лінійних крайових задач. З цією метою $u_0(a,x,\psi)$ представимо у вигляді

$$u_0(x,t) = aX(x)\sin(\omega\, t + \varphi), \tag{4}$$

де $X(x)$ – виражаються через функції Крилова [10]

$$K_1(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}\kappa x + \cos\kappa x),\ K_2(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{sh}\kappa x + \sin\kappa x),$$

$$K_3(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}\kappa x - \cos\kappa x),\ K_4(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{sh}\kappa x - \sin\kappa x). \tag{5}$$

Зі врахуванням наведеного вище, власні значення і власні функції описуються залежностями:

$$\sin(\kappa l) = 0,\ X(x) = \sin(\kappa x)\ , \tag{6а}$$

$$\mathrm{ch}(\kappa l)\cos(\kappa l) + 1 = 0,\ X(x) = K_3(\kappa x) - \frac{K_1(\kappa l)}{K_2(\kappa l)} K_4(\kappa x), \tag{6 б}$$

$$\mathrm{ch}(\kappa l)\cos(\kappa l)-1=0\,,\ X(x)=K_3(\kappa x)-\frac{K_3(\kappa l)}{K_4(\kappa l)}K_4(\kappa x), \tag{6 в}$$

$$\mathrm{ch}(\kappa l)\cos(\kappa l)-1=0\,,\ X(x)=K_1(\kappa x)-\frac{K_3(\kappa l)}{K_4(\kappa l)}K_2(\kappa x), \tag{6 г}$$

$$\mathrm{tg}(\kappa l)=\mathrm{th}(\kappa l)\,,\ X(x)=K_3(\kappa x)-\frac{K_1(\kappa l)}{K_2(\kappa l)}K_4(\kappa x)\,. \tag{6 д}$$

Перейдемо до знаходження правої частини рівняння (1). Для цього будемо вважати, що динамічний процес у досліджуваному середовищі визначений законами зміни амплітуди і частоти (періоду) коливань. Найбільш доступним, виходячи із практичного способу їх визначення, є подання їх послідовними значеннями, тобто $a_1, a_2, \ldots, a_N;\ T_1, T_2, \ldots, T_N$. В **[5]** показано, що множина значень $\{a_i\}$ і $\{T_i\}$ визначає наближено закони зміни в часі параметрів a і ψ за допомогою диференціальних рівнянь

$$\frac{da}{dt}=\varepsilon A(a), \qquad \frac{d\psi}{dt}=\omega+\varepsilon B(a), \tag{7}$$

в яких $A(a), B(a)$ – відомі поліноми. Таким чином, задача полягає у визначенні такої функції $f(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^3 u}{\partial x^3})$ для диференціального рівняння (1), за якої коливний процес середовища, узгоджується із (7). Із умов накладених на праві частини вказаних вище залежностей випливає, що невідому функцію можна шукати у вигляді

$$f(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^3 u}{\partial x^3})=\sum_{k=1}^{N}c_k f_k(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}), \tag{8}$$

де: $f_k(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^3 u}{\partial x^3})$ – лінійно незалежні многочлени; c_k – невідомі коефіцієнти, котрі знаходяться так, щоб коливний процес системи проходив відповідно до законів зміни амплітуди і частоти, які визначені співвідношеннями (7). З урахування наведеного, функція $u_1(a,x,\psi)$ та параметри $c_1,\ldots c_N$ зв'язані диференціальним співвідношенням

$$L(u_1)=\sum_{k=1}^{N}c_k\overline{f}_k(a,x,\psi)+\left[-2\omega\cos\psi\cdot A(a)+2a\omega\sin\psi\cdot B(a)\right]\cdot X(x)\,, \tag{9}$$

де: $L(u_1)=\omega^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2}+\alpha^2\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4}$; $\overline{f_k}\left(a,x,\psi\right)=f_k(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^3 u}{\partial x^3})_{|u=u_0}$.

Амплітуда коливань досліджуваного середовища співпадатиме із амплітудою головної гармоніки, якщо виконується співвідношення

$$\int_0^{2\pi}u_1\left(a,x\psi\right)\begin{Bmatrix}\cos\psi\\ \sin\psi\end{Bmatrix}d\psi=0\,. \tag{10}$$

Вказане, а також властивості власних функцій $\{X(x)\}$ дають змогу отримати співвідношення, що зв'язують невідомі параметри $c_1,\ldots c_N$ та поліноми $A(a), B(a)$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{N} c_k P_k(a) = A(a), \quad \sum_{k=1}^{N} c_k R_k(a) = B(a), \end{cases} \tag{11}$$

де $P_k(a) = \dfrac{1}{\pi\omega\Delta} \int_0^l \int_0^{2\pi} \overline{f}_k\left(a,x,\psi\right) \cdot \cos\psi \cdot X_1(x)\, d\psi\, dx;$ $R_k(a) = \dfrac{1}{\pi\omega\Delta a} \int_0^l \int_0^{2\pi} \overline{f}_k\left(a,x,\psi\right) \cdot \sin\psi \cdot X_1(x)\, d\psi\, dx,$

$\Delta = \int_0^l X_k^2\left(x\right) dx.$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (11) є основою для визначення невідомих коефіцієнтів c_k. Якщо співвідношення (11) виконуються за всіх значень параметра a і вони однозначно визначають шукані коефіцієнти, то базисні функції $\{f_k\}$ підібрані вдало. У випадку ж, коли співвідношення (11) несумісні за довільних значень параметра a -система функцій $\{f_k\}$ підібрана некоректно і треба замінити її іншою. Коли ж (11) виконуються за всіх значень параметра a, але однозначно визначити із неї невідомі параметри c_k не вдається, тоді додаткові умови для знаходження невідомих параметрів можна отримати, наприклад, з умови мінімуму функціоналу

$$J = \int_0^{2\pi} \int_0^l \left[\sum_{k=1}^{N} c_k \overline{f}_k(a,x,\psi) \right]^2 dx\, d\psi\,. \tag{12}$$

Нехай у вказаному випадку із (11) можна визначити зв'язок між першими s невідомими коефіцієнтами та всіма іншими у вигляді $c_i = \eta_i(c_{s+1}, \ldots, c_N), \quad i = 1, 2, \ldots s.$, де η_i – відомі функції.

З врахуванням вище наведеного, (12) набирає вигляду

$$J = \int_0^{2\pi} \int_0^l \left[\sum_{i=1}^{s} \eta_i(c_{s+1}, \ldots, c_N) \overline{f}_i(a,x,\psi) + \sum_{r=s+1}^{N} c_r \overline{f}_r(a,x,\psi) \right]^2 dx d\psi \tag{13}$$

Функціонал (13) набуватиме мінімального значення, якщо виконуються умови

$$\frac{\partial J}{\partial c_{s+i}} = \varphi_i(c_{s+1}, c_{s+2}, \ldots, c_N, a) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N - s. \tag{14}$$

Розв'язуючи сумісну систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка випливає із (11) та (14) відносно c_k, знаходимо всі невідомі коефіцієнти.

Висновки. У роботі запропоновано методику розв'язування не менш важливої задачі, як задача аналізу – задачі синтезу, тобто визначення таких силових чинників, які спричиняють заданий рух середовища. Із їх розв'язками пов'язано багато проблем у машинобудуванні, для яких потрібно визначити, чи підібрати із наперед заданого руху системи її нелінійні характеристики, зокрема під час дослідження вимушених коливань середовищ, для яких небажаними є резонансні явища. Основна її ідея може бути узагальнена на деякі інші системи з розподіленими параметрами.

Література

1. **Галиуллин А.С.** Обратные задачи динамики. – М. : Изд-во "Наука", 1981. – 145 с.

2. Кононенко В.О. Определение петлеобразных характеристик нелинейных колебательных систем из анализа движения / В.О. Кононенко, Н.П. Плахтиенко // Прикладна механіка. – 1970. – IV. – Вип. 9. – С. 9-15.

3. Кононенко В.О. Определение характеристик нелинейных элементов колебательных систем из анализа движения / В.О. Кононенко, Н.П. Плахтиенко // Прикладна механіка. – 1969. – V. – Вип. 10. – С. 1-7.

4. Плахтієнко Н.П. Про визначення нелінійної характеристики коливної системи з аналізу фазової траєкторії // Доповіді АН УРСР. Сер. А. – 1976. – Вип. 4. – С. 336-338.

5. Сеник П.М. Одно обобщение обратной задачи асимптотического метода Н.Н. Боголюбова // Известия ВУЗов. – 1960. – № 6. – С. 226-232.

6. Сеник П.М. Визначення функції, яка характеризує розсіювання енергії коливної системи // Прикладна механіка. – 1960. – IV. – Вип. 1. – С. 40-45.

7. Сеник П.М. Про побудову оптимальної автономної програмно-коливної системи з сильною нелінійністю / П.М. Сеник, Б.І. Сокіл // Доповіді АН УРСР. Сер. А. – 1976. – № 7. – С. 600-603.

8. Сокіл Б.І. Обернені задачі динаміки нелінійних систем із розподіленими параметрами та один підхід до їх розв'язання / Б.І. Сокіл, О.І. Хитряк // Науковий вісник УкрДЛТУ : зб. наук.-техн. праць. – Львів : УкрДЛТУ. – 2009. – № 19.10 – С. 64-67.

9. Митропольский Ю.А. Асимптотические решения уравнений в частных производных / Ю.А. Митропольский, Б.И. Мосеенков. – К. : Вид-во "Вища шк.", 1976. – 592 с.

10. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М. : Изд-во "Наука", 1968. – 560 с.

11. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М. : Изд-во "Наука", 1974. – 408 с.

***Сокил Б.И., Сокил М.Б., Хитряк О.И.* Единый подход к решению обратной задачи о нелинейных изгибистых колебаниях сред**

Предложена методика развязывания обратных задач динамики для изгибистых нелинейных колебаний сред. Она дает возможность построить аналитическую аппроксимацию упругих и дисипативних сил, исходя из закона изменения основных параметров движения. Методика базируется на принципе одновременности колебаний в нелинейных системах и методе Крылова-Боголюбова-Митропольского (КБМ) построения асимптотических решений краевых задач для уравнений с производными частей, которые являются математическими моделями процесса.

Ключевые слова: нелинейные колебания, амплитуда, частота, асимптотический метод

***Sokil B.I., Sokil M.B., Khytriak O.I.* One approach to solving Inverse problem of Nonlinear bending vibration of a medium**

It is developed a method of solving inverse dynamics problems for Nonlinear bending vibration of the medium. It allows construct an analytical approximation of the elastic and the dissipation properties of forces, on the assumption of a given law of variation of the key motion parameters. The method is based on the principle of a single frequency of oscillations in nonlinear systems, the method of Krylov-Bogoliubov-Mitropol'skii (KBM) for construction of asymptotic solutions of the boundary value problems for partial differential equations, which are mathematical models of the process.

Keywords: nonlinear oscillation, amplitude, frequency, asymptotic method.

УДК 621.01:681.3

Проф. О.М. Полюдов, д-р техн. наук; здобувач Н.М. Кандяк – Українська академія друкарства, м. Львів

ЕНЕРГОСИЛОВІ ПАРАМЕТРИ КОМБІНОВАНОГО МАЛЬТІЙСЬКОГО МЕХАНІЗМУ

Розглянуто енергосилові параметри комбінованого мальтійського механізму з кривошипно-кулісним та кулісно-кривошипним приводом. Теоретичні викладки доведені до числового прикладу, який підтверджує дієвість виведених формул. Вста-