

УДК 528.94

ВИЗНАЧЕННЯ ПЛОЩ ДІЛЯНОК ЗЕМНОГО ЕЛІПСОЇДА ЗА ПЛОСКИМИ ПРЯМОКУТНИМИ КООРДИНАТАМИ В ПРОЕКЦІЇ ГАУССА

С. Радов, О. Косогова

Луганський національний аграрний університет

Ключові слова: проекція Гаусса, врахування спотворення площ.

Постановка проблеми

Одним з основних завдань геодезичного забезпечення землеустрою є встановлення місцеположення та площ земельних ділянок. В Україні під час геодезичних та землепорядних робіт обов'язково використовується система координат Гаусса-Крюгера [9, п. 1.4.5], [13, п. 3], в якій визначаються координати і площа земельних ділянок.

Під час проектування земельних ділянок на площину виникають спотворення, що залежать від вибраної проекції та системи координат, положення та розміру ділянки, довжин сторін та інших факторів. Тому обчислена площа земельної ділянки може істотно відрізнятись від фактичної.

Для значних територій (областей, районів, міст, тощо) взагалі неможливо досягти необхідної точності земельно-кадастрової інформації, якщо не брати до уваги спотворення площ на площині.

Дослідження та врахування спотворень площ земельних ділянок в проекції на площину особливо актуальні в зв'язку із сучасними вимогами до даних державного земельного кадастру.

Аналіз останніх досліджень та публікацій, які стосуються вирішення цієї проблеми

Протягом останніх років опубліковано роботи, що стосуються обчислення площ земельних ділянок за геодезичними та плоскими прямокутними координатами [1–3], врахування спотворення площ ділянок на площині [4], [8, с. 339.], точності визначення площ земельних ділянок залежно від вибраної картографічної проекції [10].

Найповніше дослідження визначення площ ділянок на поверхні еліпсоїда та їх спотворення під час проектування на площину наведено в [1, 2]. Найефективнішими методами визнано числове інтегрування за точним контуром за геодезичними координатами та дискретне обчислення площ у прямокутній системі координат рівновеликої кіничної проекції [1, 2]. Наприклад [1, с. 53–54], для квадрата зі стороною 1000 км при інтерполюванні вздовж геодезичних ліній через 500 м похибка визначення площі в кіничній рівновеликій проекції становить $6,3 \cdot 10^{-8}$, а через 100 м – $2,5 \cdot 10^{-9}$ %. Якщо відстань між суміжними точками більша за 5–10 км, рекомендується [2] обчислювати координати проміжних точок геодезичних ліній через $0,01''-2''$ (30 см – 60 м), що потребує великого обсягу обчислень навіть для незначних територій.

Хоча рівнокутні циліндричні проекції Гаусса та Меркатора використовуються десятки років в багатьох країнах світу, досі не запропоновано методик для

надійного врахування спотворень площ і визначення їх з достатньою точністю. Це пов'язано із застосуванням наближених формул спотворення площ та з обчисленням площ без врахування кривизни зображення геодезичних ліній на площині в проекції Гаусса [4; 8, с. 339]. Залишкове значення спотворення площ значно більше від граничних похибок, яких можна досягти за результатами вимірів.

Як відомо, середню квадратичну похибку визначення площі за координатами вершин полігона можна обчислити за формулою [12, с. 23]

$$m_P = m \sqrt{\frac{1}{8} \sum_i^n D_{i-1,i+1}^2}, \quad (1)$$

де m та n – середня квадратична похибка положення та кількість вершин полігона; i – номер поточної вершини полігона; $D_{i-1,i+1}$ – довжина ліній між попередньою та наступною вершинами.

Наприклад, для квадрата зі стороною 1000 км та середньою квадратичною похибкою положення його вершин $m = 1$ мм площа визначається із точністю, що за формулою (1) становить 0,1 га ($1 \cdot 10^{-9}$ %).

Постановка завдання проблеми

Метою цієї статті є дослідження характеру спотворень площ у рівнокутній циліндричній проекції Гаусса та розроблення методики визначення площ ділянок поверхні еліпсоїда за плоскими прямокутними координатами їх вершин.

Виклад основного матеріалу

Відома тільки одна точна формула для обчислення площі ділянки еліпсоїда – формула площі сферіодної трапеції [3, 6, с. 42]:

$$P = b^2 (L_2 - L_1) \int_{B_1}^{B_2} \frac{\cos B}{(1 - e^2 \sin^2 B)^2} dB = (L_2 - L_1) \frac{b^2}{2} \times \\ \times \left[\left(\frac{\sin B_2}{1 - e^2 \sin^2 B_2} + \frac{1}{2e} \ln \frac{1 + e \sin B_2}{1 - e \sin B_2} \right) - \left(\frac{\sin B_1}{1 - e^2 \sin^2 B_1} + \frac{1}{2e} \ln \frac{1 + e \sin B_1}{1 - e \sin B_1} \right) \right], \quad (2)$$

де B та L – широта та довгота паралелей і меридіанів сферіодної трапеції; e – перший ексцентриситет еліпсоїда; b – мала піввісь еліпсоїда.

Вона дає можливість одержати також точну формулу для площі всієї поверхні еліпсоїда [11, с. 48]:

$$P_{ел.} = 2\pi a^2 + \pi \frac{b^2}{e} \ln \frac{1+e}{1-e}, \quad (3)$$

де a – велика піввісь еліпсоїда.

У геодезичній практиці, як правило, використовують наближені формули для обчислення площі сфероїдної трапеції (розклад підінтегральної функції в ряд з подальшим інтегруванням кожного члена ряду) та числове інтегрування по контуру довільних ділянок еліпсоїда, які “дають теоретично точний результат” [1, с. 22]. Наприклад, площа поверхні еліпсоїда Красовського $P_{\text{ев.}} = 510\,083\,035,4$ кв. км [14, с. 206] обчислена розкладанням у ряд з похибкою $-4,7 \cdot 10^{-10} \%$.

Розглянемо характер спотворення площі сфероїдної трапеції у проекції Гаусса на краю координатної зони, де вони найбільші.

Для сфероїдної трапеції, яка обмежена паралелями з широтами $50^{\circ}00'00''$ та $50^{\circ}50'00''$ і меридіанами з довготами відносно осьового меридіана $2^{\circ}59'54,00000''$ та $2^{\circ}59'59,46401''$, площа на поверхні еліпсоїда становить $1000,0001$ га. Площа цієї сфероїдної трапеції на площині в проекції Гаусса дорівнює $1001,0982$ га. Отже, спотворення площі становить $1,0981$ га, або $0,11 \%$.

Якщо на меридіані з довготою $2^{\circ}59'54,0''$ додатково взяти проміжні точки з інтервалом $5'$, то площа на поверхні еліпсоїда залишиться незмінною, а на площині вона дорівнюватиме $1035,5110$ га. Тобто для такої сфероїдної трапеції спотворення площі становить $35,5109$ га, або $3,55 \%$.

Очевидно, що спотворення площі поверхні еліпсоїда в проекції на площину залежить не тільки від масштабів зображення площі m_p у вершинах ділянки, а і від кривизни зображення геодезичної лінії на площині. Різниця між значеннями площ розглянутих фігур зумовлена тим, що в першому випадку вплив спотворень західного і східного меридіанів, південної і північної паралелей майже компенсуються, а в другому випадку – відсутня компенсація впливу кривизни зображення меридіанів.

Зазначимо, що вплив другого фактора може значно перевищувати спотворення за масштаб зображення площі m_p . Аналіз показав, що в межах однієї координатної зони в проекції Гаусса спотворення площ територій з надвеликими довжинами сторін може досягати $20\text{--}25 \%$ від фактичної площі ділянки еліпсоїда.

У зв'язку з відсутністю такої проекції еліпсоїда на площину, в якій довільна геодезична лінія еліпсоїда є прямою лінією на площині, принципового значення вибір проекції не має. Головним є врахування впливу масштабів зображення вздовж координатних осей та впливу кривизни геодезичної лінії.

Різниця в точності визначення площ ділянок еліпсоїда за прямокутними координатами в рівновеликих конічній та циліндричній проекціях [1, с. 50] пов'язана з недостатньо точним врахуванням особливостей впливу саме масштабів зображення вздовж координатних осей в цих проекціях. Тому, на наш погляд, є передчасним висновок про недоцільність використання циліндричних проекцій (рівнокутної та рівновеликої) для обчислення неспотворених площ земельних ділянок.

Щоб врахувати спотворення площ земельних ділянок у проекції Гаусса, перейдемо від плоских прямокутних координат x та y до криволінійних прямокутних координат на поверхні еліпсоїда X та Y , які визначають положення точки довжиною геоде-

зичних ліній відносно екватора (X) та осьового меридіана (Y).

На підставі залежності плоских прямокутних координат (x, y) від криволінійних прямокутних координат (X, Y) [7, с. 102]

$$x = X; \quad y = \int_0^Y m_y dY \quad (4)$$

та масштабів проекції вздовж осей абсцис і ординат [7, с. 101]

$$m_x = m_y = \sec \frac{Y}{R}, \quad (5)$$

маємо

$$y = \int_0^Y \sec \frac{Y}{R} dY = R \cdot \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{Y}{2R} \right), \quad (6)$$

де R – середній радіус кривизни еліпсоїда в цій точці.

Отже, ордината Y_i кожної точки на поверхні еліпсоїда обчислюється за плоскою ординатою y_i за формулою

$$Y_i = 2R_i \operatorname{arctg} \left(\exp \frac{y_i}{R_i} \right) - \frac{\pi}{4}, \quad (7)$$

а масштаби проекції уздовж криволінійних осей абсцис (X) та ординат (Y) – за формулами

$$m_{X_i} = \sec \frac{Y_i}{R_i}; \quad m_{Y_i} = 1. \quad (8)$$

Тепер масштаб зображення площі ділянки, що обчислена за координатами X та Y , становить

$$m'_{P_i} = m_{X_i} m_{Y_i} = \sec \frac{Y_i}{R_i}. \quad (9)$$

На площині площу ділянки поверхні знаходимо за формулами [наприклад, 5, с. 125]

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \sum_1^n y_i (x_{i-1} - x_{i+1}) \\ P &= \frac{1}{2} \sum_1^n x_i (y_{i+1} - y_{i-1}) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

де x_i, y_i – ($i = 1, 2, \dots, n$) – плоскі прямокутні координати вершин ділянки, порядок яких зростає за ходом годинникової стрілки.

Загальну площу земельної ділянки з урахуванням впливу масштабу зображення площі тепер можна обчислити за формулами:

$$P = \frac{1}{2} \sum_1^n Y_i \left(\frac{X_{i-1}}{m'_{P_{i-1}}} - \frac{X_{i+1}}{m'_{P_{i+1}}} \right) = \frac{1}{2} \sum_1^n Y_i \left(X_{i-1} \cos \frac{Y_{i-1}}{R_{i-1}} - X_{i+1} \cos \frac{Y_{i+1}}{R_{i+1}} \right), \quad (11a)$$

$$P = \frac{1}{2} \sum_1^n \frac{X_i}{m'_{P_i}} (Y_{i+1} - Y_{i-1}) = \frac{1}{2} \sum_1^n X_i \cos \frac{Y_i}{R_i} (Y_{i+1} - Y_{i-1}). \quad (11b)$$

Вплив кривизни зображення геодезичної лінії враховується числовим інтегруванням вздовж апроксимованої геодезичної лінії з рівновіддаленими вузлами. Доволі ефективною і найпростішою є формула Сімпсона, яку запишемо у вигляді:

$$P = \sum_1^n \int_{\hat{X}_i}^{\hat{X}_{i+1}} f(\hat{X}) d\hat{X} \approx \sum_1^n \frac{\hat{X}_{i+1} - \hat{X}_i}{3n} [(Y_{i,0} + Y_{i,n}) + 2(Y_{i,2} + Y_{i,4} + \dots + Y_{i,n-2}) + 4(Y_{i,1} + Y_{i,3} + \dots + Y_{i,n-1})] \quad (12)$$

або

$$P = \sum_1^n \int_{Y_i}^{Y_{i+1}} f(Y) dY \approx \sum_1^n \frac{Y_{i+1} - Y_i}{3n} [(\hat{X}_{i,0} + \hat{X}_{i,n}) + 2(\hat{X}_{i,2} + \hat{X}_{i,4} + \dots + \hat{X}_{i,n-2}) + 4(\hat{X}_{i,1} + \hat{X}_{i,3} + \dots + \hat{X}_{i,n-1})], \quad (13)$$

де

$$\hat{X}_i = X_i \cos \frac{Y_i}{R_i}. \quad (14)$$

Особливо треба зазначити, що під час числового інтегрування з рівновіддаленими вузлами необхідно на кожній стороні ділянки знайти такі проміжні точки проекції геодезичної лінії на площині, для яких інтервали числового інтегрування обчислюються за формулами:

$$\Delta \hat{X} = \frac{\hat{X}_{i+1} - \hat{X}_i}{n}; \quad \Delta Y = \frac{Y_{i+1} - Y_i}{n}. \quad (15)$$

де n – кількість проміжних відрізків лінії.

Положення таких точок на кожній стороні ділянки пропонують визначати послідовними наближеннями. Для цього спочатку обчислюють на поверхні еліпсоїда довжину (S) та азимут (A) сторони ділянки за вихідними геодезичними координатами кінцевих точок.

У першому наближенні визначають геодезичні координати (B_i, L_i) для поточної точки з номером (i) за відомим азимутом (A) та довжиною геодезичної лінії ($S_i = i \cdot S / n$). А потім за геодезичними координатами обчислюють координати \hat{X}'_i, Y'_i .

Розв'язавши обернену задачу на площині, визначають довжину лінії (d^i) та дирекційний кут (α^i).

Для наступних наближень уточнюється відстань до поточної (i) точки на поверхні еліпсоїда за формулою

$$S_i' = S_i + \frac{S_i}{d_i'} \cdot \frac{\hat{X}_i' - \hat{X}_i}{\cos \alpha_i'}. \quad (16)$$

Наближення припиняють, якщо

$$\Delta d = d^i - d^{i-1} \leq \varepsilon, \quad (17)$$

де d^i, d^{i-1} – значення довжини лінії у поточному та попередньому наближеннях; ε – задана точність розрахунків.

Аналогічно знаходять координати проміжних точок геодезичної лінії за заданими ординатами Y_i .

Використання запропонованого способу для обчислення площі розглянутого вище квадрата зі стороною 1000 км [1, с. 53–54] за плоскими прямокутними координатами Гаусса–Крюгера показало такі результати: у разі інтерполювання вздовж геодезичних ліній через 2 км похибка в площі становить $2,1 \cdot 10^{-9} \%$, через 1 км – $7,8 \cdot 10^{-11} \%$, через 750 м – $1,9 \cdot 10^{-11} \%$.

Отже, за однакових умов коректне врахування впливу кривизни зображення геодезичної лінії та масштабу спотворення довжин ліній вздовж координатних осей в проекції Гаусса дає точніший результат, ніж просте обчислення площ земельних ділянок у рівновеликих циліндричній та конічній проекціях.

Висновки

Аналіз точності визначення площ ділянок поверхні еліпсоїда за плоскими прямокутними координатами їхніх вершин в проекції Гаусса показує, що в межах однієї координатної зони площу будь-якої земельної ділянки можна обчислити з похибкою до 1 квадратного метра. Для значних територій, які розташовані в декількох координатних зонах, похибка визначення площі не перевищує 5–10 квадратних метрів або $10^{-10} - 10^{-12} \%$ від площі ділянки.

Отже, запропонована методика врахування спотворень площ ділянок еліпсоїда на площині в проекції Гаусса дає теоретично точний результат, як і за безпосереднього обчислення площ на поверхні еліпсоїда.

Література

1. Топографо-геодезичне та картографічне забезпечення ведення державного земельного кадастру. Визначення площ територій / В.Д. Барановський, Ю.А. Карпінський, А.А. Ляшенко / За заг. ред. Ю.О. Карпінського. – К.: НДГК, 2009. 92 с.
2. Барановський В.Д. Про цифрові методи обчислення площ великих територій / В.Д. Барановський, В.М. Трюхан // Вісник геодезії та картографії. – 2005. – № 4. – С. 17–21.
3. Виноградов А.В. Вычисление площади участка на поверхности эллипсоида / А.В. Виноградов // Геодезия и картография. – М., 2007. – № 6. – С. 41–46.
4. Войславский Л.К. Искажение площадей в системе плоских прямоугольных координат Гаусса / Л.К. Войславский // Проблемы розвитку земельних відносин, землеустрою і земельного кадастру в умовах ринкової економіки. – Харків, ХНАУ ім. В.В. Докучаєва. – 2005. – С. 139–142.
5. Геодезія. Частина перша; за заг. ред. проф., д.т.н. С.Г. Могильного і проф., д.т.н. С.П. Войтенко. – Донецьк, 2003. – 458 с.
6. Закатов П.С. Курс высшей геодезии / П.С. Закатов. – М.: Недра, 1964. – 504 с.
7. Высшая геодезия / В.Г. Зданович, Н.Г. Келль, К.А. Звонарев и др. – М.: Госгортехиздат, 1961. – 607 с.
8. Инженерная геодезия: учебн. для вузов / Е.Б. Ключин, М.И. Киселев, Д.Ш. Михелев; Под ред. Д.Ш. Михелева. – М.: Высшая школа, 2001. – 464 с.
9. Інструкція з топографічного знімання в масштабах 1:5000, 1:2000, 1:1000 та 1:500 (ГКНТА-2.04-02-98). – Київ: ГУГКтаК України, 1998. – 97 с.
10. Дослідження картографічних проекцій для геопросторових даних для об'єктів земельного кадастру / Ю.О. Карпінський, А.А. Ляшенко, Т.В. Щербина // Вісник геодезії та картографії. – 2003. – № 2. – С. 41–47.
11. Корн Г. Справочник по математике. Для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1973. – 832 с.

12. Маслов А.В. Геодезія. Часть III / А.В. Маслов, Г.И. Горохов. – М.: Госгортехиздат, 1959. – 172 с.
13. Основні положення створення державної геодезичної мережі України (Затверджено постановою Кабінету Міністрів України від 8.06.1998 р. № 844). – К., 1998. – 14 с.
14. Справочник геодезиста: В 2-х книгах. Кн. 1 / Под ред. В.Д. Большакова и Г.П. Левчука. – М.: Недра, 1985. – 455 с.

Визначення площ ділянок земного еліпсоїда за плоскими прямокутними координатами в проекції Гаусса
С. Радов, О. Косогова

Розглянуто питання урахування спотворень площ ділянок поверхні еліпсоїда за плоскими прямокутними координатами в проекції Гаусса.

Определение площадей участков земного эллипсоида по плоским прямоугольным координатам в проекции Гаусса
С. Радов, Е. Косогова

Рассмотрен вопрос учета искажений площадей участков поверхности эллипсоида по плоским прямоугольным координатам в проекции Гаусса.

Determination of areas of earthly ellipsoid on flat rectangular co-ordinates in the projection of Gauss
S. Radov, H. Kosogova

The question of account of distortions of areas of plots of surface of ellipsoids is considered on flat rectangular co-ordinates in the projection of Gauss.

Геодезія, картографія

Фахові видання з геодезії



vlp.com.ua



Військова топографія
За ред. П. П. Ткачука та І. С. Тревого
Підручник. 2011- 416 с.
ISBN 978-617-607-026-9
Затвердило МоН України



ГЕОДЕЗІЯ
Островський А. Л., Мороз О. І., Тарнавський В. Л.
Підручник. - 2008. - 564 с.
ISBN: 978-966-553-820-2
Затвердило МоН України



ОЦІНКА НЕРУХОМОСТІ
Перович Л. М., Губар Ю. П.
Навчальний посібник. - 2010. 296 с.
ISBN 978-966-553-983-4
Затвердило МоН України



АЕРОКОСМІЧНІ ЗНІМАЛЬНІ СИСТЕМИ
Бурштинська Х. В., Станкевич С. А.
Навчальний посібник. - 2010. 292 с.
ISBN 978-966-553-951-3
Затвердило МоН України



ФОТОГРАМЕТРІЯ
Дорожинський О. Л., Тукай Р.
Підручник. - 2008. 332 с.
ISBN 978-966-553-688-8
Затвердило МоН України



АНГЛІЙСЬКО-УКРАЇНСЬКИЙ ГЕОДЕЗИЧНИЙ СЛОВНИК
Заблюцький Ф. Д., Заблюцька О. Ф.
Словник. - 2010. 360 с.
ISBN 978-966-553-864-6
Затвердило МоН України



ГЕОДЕЗІЯ. ЧАСТИНА I. ТОПОГРАФІЯ
Островський А.Л., Мороз О.І., Тартачинська З.Р., Гарасимчук І.Ф.
Навчальний посібник. - 2011 - 440 с.
ISBN 978-617-607-081-8



ГЕОДЕЗИЧНІ ПРИЛАДИ. ПРАКТИКУМ
Тревого І. С., Шевченко Т. Г., Мороз О. І.
Навчальний посібник. - 2010. 236 с.
ISBN 978-966-553-906-3
Затвердило МоН України

КНИГИ МОЖНА ЗАМОВИТИ ЗА АДРЕСОЮ:
вул. Ф. Колесси, 2, корп. 23А, м. Львів, 79000, тел. (032) 258-21-46, факс (032) 258-21-36, ел. пошта: vmr@vlp.com.ua