УДК 528.1+550.3

МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНОСТІ МАГНІТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛІ

Б. Джуман, І. Бойко А. Согор, Р. Фоца
Національний університет “Львівська політехніка”

Ключові слова: апроксимація, ортогональність, поліном.

Постановка проблеми

Велике значення для розроблення теорії земного магнетизму, вивчення геодинамічних явищ у земній корі й верхній мантії, розв’язання задач прикладної геофізики має дослідження змін геомагнітного поля у широкому діапазоні періодів – від вікових варіацій (роки) до короткоперіодичних локальних ефектів (дні, місяці).

Вікові варіації відображають складну картину гідромагнітних течій і коливань в ядрі Землі, де розташовані джерела власне геомагнітного поля. Варіації можуть також виникнути як результат електромагнітної взаємодії на межі ядро-мантія. Джерела добових і коротших варіацій геомагнітного поля містяться в атмосфері і магнітосфері. Ці варіації індукують телуричні струми у верхніх шарах Землі.

Отже, результати спостережень напруженості геомагнітного поля (z) можна подати у вигляді суми двох компонент, одна з яких (W) – це систематична складова (невипадкова функція від часу), а інша (w) – випадкова складова – флуктуація навколо систематичної складової

$$z(t) = W(t) + w(t). \tag{1}$$

Під час вимірювання напруженості магнітного поля Землі одержують таблично задану функцію, яку важко дослідити, а також інтерпретувати отримані результати. Оскільки аналітичний вираз цієї функції $z(t)$ невідомий, то постає практично важливе завдання: знайти емпіричну формулу $\tilde{z}(t)$, значення якої у кожній точці t_i неістотно відрізнялися б від вихідної функції [3].

Зв’язок між важливими науковими і практичними завданнями

Задача апроксимації функцій є важливою для дослідження динаміки магнітного поля Землі.

Вікові зміни магнітного поля Землі добре вивчені і описуються моделями, що ґрунтуються на апроксимації поля набором сферичних гармонічних функцій (моделі СГА).

Моделі, побудовані за СГА, дають змогу подати в аналітичному вигляді вікові варіації магнітного поля. Міжнародне аналітичне поле, синтезоване на основі коефіцієнтів СГА, доволі детально описує магнітне поле Землі.

На відміну від вікових, короткочасні зміни магнітного поля вивчені недостатньо і потребують подальшого дослідження. Для цих процесів необхідно підібрати поліном, який був би зручним для їх дослідження.

Аналіз останніх досліджень та публікацій, які стосуються вирішення цієї проблеми

Незважаючи на великий досвід, накопичений у вивченні апроксимації напруженості магнітного поля Землі, питання про знаходження найкращого апроксимаційного полінома та його найоптимальнішого порядку залишається відкритим.

У [3] здійснено апроксимацію напруженості магнітного поля Землі способом найменших квадратів. Проте цей спосіб призводить до порушення ортогональності апроксимуючих поліномів, через що втрачається точність апроксимації.

Постановка завдання проблеми

Виконати апроксимацію функції напруженості магнітного поля Землі. Для цього знайти її аналітичний вираз як лінійну комбінацію деяких поліномів, ортонормованих на відрізку, на якому визначається функція. Також знайти відхилення цих поліномів від вихідної функції, тобто оцінити точність наближення функції.

Виклад основного матеріалу проблеми

У роботі здійснено апроксимацію щоденних вимірів напруженості магнітного поля Землі на пункті Брід у районі Вигорлат-Гутинського вулканічного пасма.

За вихідні дані прийнято систему із k (k=365) рівновіддалених точок $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$, в кожній із яких відоме значення напруженості магнітного поля $H_{out}=\{h_1,h_2,\ldots,h_k\}$.

Виконаємо апроксимацію поліномами Лежандра 10-го порядку. Їх можна задати формулою Родріга [1]:

$$P_n(\xi) = \frac{1}{2^n \cdot n!}\frac{d^n}{d\xi^n}(\xi^2-1)^n, \tag{2}$$

де n – порядок полінома.

Із формули Родріга можна одержати вираз для поліномів Лежандра в рекурентному вигляді:

$$(n+1)P_{n+1}(\xi) - (2n+1)\cdot\xi\cdot P_n(\xi) + nP_{n-1}(\xi) = 0, \tag{3}$$

де $P_0 = 1$, $P_1 = \xi$.

Як відомо, многочлени Лежандра утворюють ортогональну систему на інтервалі (-1,+1) [1], тобто

$$\int_{-1}^{+1}\frac{P_r(\xi)}{\|P_r(\xi)\|}\cdot\frac{P_l(\xi)}{\|P_l(\xi)\|}d\xi = \delta_{rl}, \tag{4}$$

де $\|P_r(\xi)\|$ – норма r-го полінома Лежандра, δ_{rl} – символ Кронекера, тобто

$$\delta_{rl} = \begin{cases}1, r = l\\ 0, r \neq l\end{cases}. \tag{5}$$

Перейдемо від змінної ξ, визначеної на відрізку [-1,+1], до змінної x, що визначена на відрізку [+1,+k]. Функціональний зв’язок між цими змінними такий:

$$\begin{gathered} x = \frac{k-1}{2}(\xi+1)+1 \\ \xi = \frac{2}{k-1}(x-1)-1. \end{gathered} \tag{6}$$

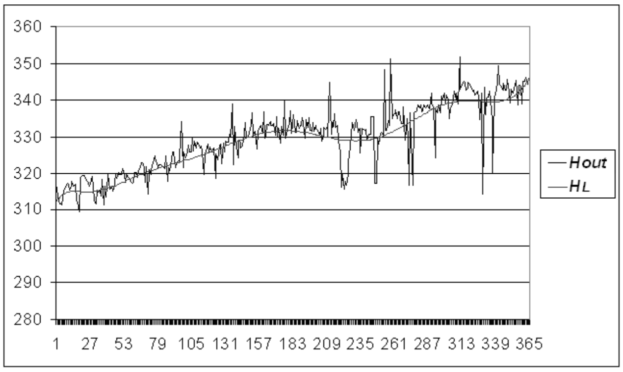

Рис. 1. Функція, апроксимована многочленами Лежандра

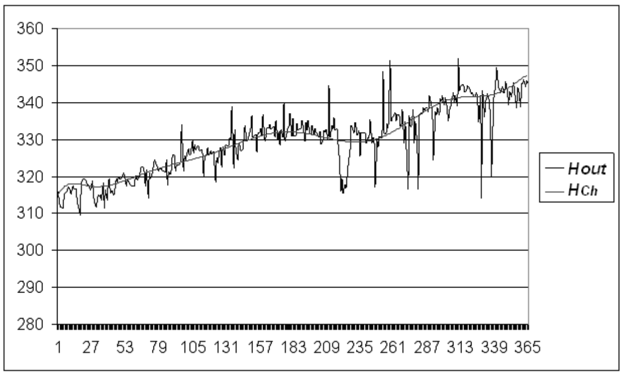

Рис. 2. Функція, апроксимована многочленами Чебишова

Позначивши праву частину другого рівняння (6) як *f(x)*, можна знайти ортономований поліном Лежандра $\tilde{P}_i(x)$ на відрізку [1,*k*] у такому вигляді:

$$\tilde{P}_i(x) = \frac{P_i[f(x)]}{\sqrt{\int_1^k P_i^2[f(x)]dx}}. \tag{7}$$

Шукатимемо апроксимовану функцію *H* як лінійну комбінацію ортонормованих поліномів Лежандра (7), обмежившись 10-м порядком:

$$H_L = \sum_{i=0}^{10} C_i \cdot \tilde{P}_i(x). \tag{8}$$

Внаслідок ортонормованості $\tilde{P}_i(x)$ коефіцієнти C_i в (8) можна знайти за такою формулою:

$$C_i = \int_1^k H_{out} \cdot \tilde{P}_i(x)dx. \tag{9}$$

Очевидно, коефіцієнти C_i із (9) визначаються за допомогою числового інтегрування з кроком $h = 1$. У роботі використано метод Сімпсона числового інтегрування.

Отже, із (8) ми одержали систему точок H_L. Результат показано на рис. 1.

Використаємо для апроксимації поліноми Чебишова, обмежившись десятим порядком. Для цього за допомогою лінійного перетворення приведемо систему точок *X* до такого вигляду [1]:

$$t = \frac{x - x_1}{h}. \tag{10}$$

Тоді поліноми Чебишова можна задати формулою (1):

$$T_{n,k-1}(t) = \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s C_n^s C_{n+s}^s \frac{t^{[s]}}{(k-1)^{[s]}}, \tag{11}$$

де $t^{[s]} = t(t-1)...(t-s+1)$; $C_n^s = \dfrac{n!}{s!(n-s)!}$.

$T_{n,k-1}(t)$ перший індекс *n* – степінь полінома, *k* – к-ть точок.

Норму поліномів $T_{n,k-1}(t)$ можна знайти за формулою:

$$\left\| T_{n,k-1}(t) \right\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{k-1} T_{n,k-1}^2(i)}. \tag{12}$$

Очевидно, ортонормована система поліномів Чебишова на відрізку (1,*k*) матиме вигляд:

$$\tilde{T}_{n,k-1}(t) = \frac{T_{n,k-1}(t)}{\left\| T_{n,k-1}(t) \right\|}. \tag{13}$$

Коефіцієнти апроксимації знаходимо за формулою:

$$\tilde{C}_i = \sum_{m=0}^{k-1} H_{out\ m} \tilde{T}_{i,k-1}(m). \tag{14}$$

Апроксимуючий многочлен матиме вигляд:

$$H_{Ch} = \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{C}_i \tilde{T}_{n,k-1}(t). \tag{15}$$

Отже, із (15) ми одержали систему точок H_{Ch}. Результат показано на рис. 2.

Середню квадратичну похибку відхилення полінома від функції можна визначити за формулою :

$$m = \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{k-(n+1)}}, \tag{16}$$

де δ_i – різниця між вихідними даними і апроксимованим поліномом; *k* – кількість вихідних даних; *n* – порядок полінома.

Отже, для поліномів Лежандра m_L = 4,47 нТл, а для поліномів Чебишова m_{Ch} = 4,38 нТл.

Висновки

Для виділення тренду функції напруженості магнітного поля Землі найкраще використовувати поліноми, ортогональні на певному скінченному відрізку. В цій роботі для знаходження аналітичного виразу наближеної функції використано ортогональність поліномів Лежандра і Чебишова, середня квадратична похибка з відхилень яких від виміряних значень є практично однаковою.

У перспективі подальшого розвитку цього напряму особливу увагу потрібно приділити не тільки знаходженню найефективнішого апроксимаційного полінома, але й найоптимальнішого його порядку, що є вкрай важливо.

Література

1. Демидович Б.П. Численные методы анализа / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
2. Йосипчук М. Середньоквадратична апроксимація вимірів напруженості магнітного поля Землі сте-

пеневими поліномами / М. Йосипчук, А. Согор, О. Заяць [та ін.] // Геодезія, картографія і аерофотознімання. – 2002. – С. 25–27.
3. Согор А. Апроксимація напруженості магнітного поля Землі многочленами Лежандра, Чебишова та рядами Фур'є і порівняння їх точності / А. Согор, Р. Фоца, Б. Джуман [та ін.] // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. – 2010. – № 19. – С. 62–66.
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том второй / В.И. Смирнов. – М.: Наука, 1974. – 656 с.
5. Максимчук В.Ю. Динаміка аномального магнітного поля Землі / В.Ю. Максимчук, Ю.М. Городинський, В.Г. Кузнєцова. – Львів: Інститут геофізики ім. Субботіна НАН України, 2001. – 308 с.
6. Калинин Ю.Д. Вековые геомагнитные вариации. – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение. – 1984. – 160 с.
7. Коромильцев В.В., Шепелева И.М. Магнитное поле при течении флюидов. – Свердловск, 1986. – С. 3–21.
8. Кузнецова В.Г., Максимчук В.Е. Тектономагнитные исследования для изучения особенностей структуры и геодинамики литосферы: Препринт Ин-т прикл. пробл. мех. и матем. – Львов, 1989. – 44 с.
9. Магниторазведка. Справочник геофизика / под ред. В.Е. Никитского, Ю.С. Глебовского. – М.: Недра, 1987. – 470 с.
10. Langel R.A., Ester R.H., Mead G.D. Some new methods in geomagnetic field modeling applied to the 1960–1980 epoch // J.G.G. 1982. – P. 327–349.

Моделювання напруженості
магнітного поля Землі

Б. Джуман, І. Бойко, А. Согор, Р. Фоца

Розглянуто питання, пов'язані з апроксимацією напруженості магнітного поля Землі. Описано алгоритм наближення функції за допомогою ортонормованих поліномів. Для перевірки алгоритму виконано експериментальні обчислення.

Моделирование напряженности
магнитного поля Земли

Б. Джуман, И. Бойко, А. Согор, Р. Фоца

Рассмотрены вопросы, связанные с апроксимацией напряженности магнитного поля Земли. Описан алгоритм приближения функции с помощью ортонормированных полиномов. Для проверки алгоритма выполнены экспериментальные вычисления.

Modeling of tension
of the Earth's magnetic field

B. Dzhuman, I. Boyko, A. Sogor, R. Fotsa

Questions, related to approximation of tension of the geomagnetical field of Earth, are considered. In this article the algorithm of approaching of function is described using orthogonal polynomials. The verification of this algorithm was done with use experimentall calculation.