УДК 621.313

В.М. Гладкий
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра ЕМА

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ АСИНХРОННОГО ДВИГУНА З УРАХУВАННЯМ ДИНАМІЧНОГО ЕКСЦЕНТРИСИТЕТУ

Опрацьовано математичну модель асинхронного двигуна з урахуванням динамічного ексцентриситету. Модель ґрунтується на розрахунку одновимірного магнітного поля з урахуванням вищих просторових гармонік магніторушійних сил та насичення основного магнітного кола, алгебризації диференційних рівнянь методом ФДН g-го порядку та розв’язуванні нелінійної системи алгебричних рівнянь методом Ньютона.

Ключові слова: **асинхронний двигун, математична модель, динамічний есцентриситет, насичення основного магнітного кола, вищі гармоніки МРС.**

A mathematical model for asynchronous motor taking into account dynamic rotor eccentricity has been developed. The model is based on magnetic field computation allowing for core saturation and magnetomotive forces spatial harmonics, differential equations algebrization with the g-th order backward differentiation formula and nonlinear algebraic equations system solving with Newton’s method.

Key words: **asynchronous motor, mathematical model, dynamical eccentricity, core saturation, MMF spatial harmonics.**

Постановка проблеми

Асинхронні двигуни є основними споживачами електричної енергії у промисловості та сільському господарстві і їх широко застосовують для приводу більшості механізмів промислового обладнання, тому якість і надійність роботи асинхронного двигуна визначає ефективність, економічність, продуктивність та інші техніко-економічні показники технологічних процесів.

На надійність роботи асинхронних двигунів впливають різні фактори конструкторського та експлуатаційного характеру, одним з яких є ексцентриситет ротора.

Експлуатація двигуна з таким дефектом не спричиняє миттєвої поломки двигуна, але знижує надійність і довговічність його роботи, спотворюється магнітне поле у повітряному проміжку, створюється одностороннє магнітне притягання, знижується коефіцієнт корисної дії, з’являються додаткові вищі гармоніки поля, знижується пусковий момент, зростають місцеві нагрівання, вібрації і шуми [1].

Виявлення ексцентриситету під робочою напругою, без відриву від виробничого процесу і транспортування на спеціалізовані стенди є актуальною проблемою і складним інженерним завданням, від ефективності виконання якого залежить довговічність і безпечність експлуатації асинхронних двигунів.

Нині для діагностування ексцентриситету ротора використовують різноманітні пристрої на основі вібраційних, теплових та інших методів. Недоліки цих методів полягають у складності їх реалізації, пов’язаних із застосуванням давачів температури і вібрації, які мають доволі жорсткі вимоги до місця їх кріплення і вимагають прокладання додаткових кабельних ліній для зв’язку з пристроєм опрацювання інформації. Менш поширеним є метод діагностування ексцентриситету на основі аналізу амплітудно-частотної характеристики споживаного струму.

Отже, виявлення ексцентриситету і дослідження його впливу на параметри споживаного струму становить науковий і практичний інтерес.

Аналіз останніх досліджень

З аналізу літератури зрозуміло, що хоча й існує велика кількість моделей асинхронних двигунів з урахуванням ексцентриситету ротора [6–8], проте ґрунтуються вони на доволі грубих допущеннях. Такі важливі чинники, як вищі просторові гармоніки МРС та насичення основного магнітного кола, які істотно впливають на перебіг перехідного процесу, у цих моделях або не враховуються, або враховуються доволі наближено [9].

Задачі досліджень

Задачею дослідження є розроблення математичної моделі асинхронного двигуна з урахуванням динамічного ексцентриситету ротора з урахуванням насичення основного магнітного кола та вищих просторових гармонік магніторушійних сил у їхньому взаємозв'язку.

Виклад основного матеріалу

Розглянемо асинхронний двигун з кліткових ротором, на статорі якого розміщено s обмоток, розподілених по пазах довільно, а ротор має r стрижнів.

Створення математичної моделі асинхронного двигуна з урахуванням ексцентриситету ротора ґрунтуватиметься на таких допущеннях:

1) гістерезис і вихрові струми відсутні;

2) магнітне поле плоскопаралельне;

3) магнітне поле машини розділене на робоче поле й поля розсіяння, причому останні вважаються лінійними однорідними функціями струмів обмоток;

4) магнітні поля в ярмах статора й ротора мають лише тангенціальну складову;

5) зубцеві шари статора і ротора замінені еквівалентними шарами, які у радіальному напрямі мають характеристику намагнічування, еквівалентну до реального зубцевого шару, а в тангенціальному напрямі – нескінченний магнітний опір;

6) обмотки статора й ротора замінені винесеними до повітряного проміжку нескінченно тонкими шарами й представлені кутовими розподілами густин провідників відповідних фаз.

Згідно з прийнятими допущеннями рівняння, які описують розподіл магнітного поля за заданих струмів статора й ротора та куті повороту ротора, мають вигляд [3]:

$$\frac{dF_z}{d\alpha_м}+\frac{dF_\delta}{d\alpha_м}-\frac{r_c}{p_м}H_c+\frac{r_p}{p_м}H_p+\vec{n}_{cт}(\alpha_м)\vec{i}_c/a_c+\vec{n}_{pт}(\beta_м)\vec{i}_p/a_p=0;$$

$$\frac{r_c}{p_м}\int_0^{2\pi}H_c d\alpha_м-\int_0^{2\pi}\vec{n}_{cт}(\alpha_м)\vec{i}_c d\alpha_м/a_c-\int_0^{2\pi}\vec{n}_{pт}(\beta_м)\vec{i}_p d\alpha_м/a_p=0;$$

$$B_\delta=\frac{1}{c_c}\frac{dB_c}{d\alpha_м};\quad B_p=B_п-cB_c; \tag{1}$$

$$\beta_м=\alpha_м-p_м\gamma=e^{-p_м\gamma\frac{d}{d\alpha_м}}\alpha_м;$$

$$F_\delta=\frac{B_\delta}{\mu_0}\delta k_\delta;\quad F_z=F_z(B_\delta);\quad H_c=H_c(B_c);\quad H_p=H_p(B_p),$$

де $\vec{i}_c=[i_{c1}\ \ldots\ i_{cs}]_т$; $\vec{i}_p=[i_{p1}\ \ldots\ i_{pr}]_т$ – вектор струмів фаз статора й ротора відповідно; $\vec{n}_c(\alpha_м)=[n_{c1}(\alpha_м)\ \ldots\ n_{cs}(\alpha_м)]_т$; $\vec{n}_p(\beta_м)=[n_{p1}(\beta_м)\ \ldots\ n_{pr}(\beta_м)]_т$ – вектор кутових густин провідників фаз статора й ротора відповідно; a_c, a_p – відповідно кількості паралельних гілок фаз статора й ротора; $\alpha_м$ – магнітний кут нахилу променя, який проходить через вісь обертання машини й довільну точку A на розточці статора, до прийнятого нерухомого відносно статора променя OX_c; $\beta_м$ – магнітний кут нахилу променя, який проходить через вісь обертання машини й точку A, до прийнятого нерухомого відносно ротора променя OX_p; $p_м\gamma$ – магнітний кут нахилу променя $OX_р$ до променя $OX_с$, який ототожнюємо з магнітним кутом повороту машини; $p_м$ – кількість періодів магнітного поля вздовж розточки статора машини; $B_с$, $B_р$, $H_с$, $H_р$ – магнітні індукції та напруженості магнітного поля в ярмах статора й ротора відповідно; B_δ – магнітна індукція в повітряному проміжку; F_δ – магнітна напруга повітряного проміжку; F_z – магнітна напруга зубцевого шару статора й ротора; $B_п$ – деяка магнітна індукція, що не залежить від координати $\alpha_м$; $e^{-p_м\gamma\frac{d}{d\alpha_м}}$ – оператор зсуву на кут $-p_м\gamma$ [4]; k_δ – коефіцієнт Картера; $r_с$ – радіус кола, що проходить через середину ярма статора; $r_р$ – радіус кола, що проходить через середину ярма ротора; с, $c_с$ – постійні коефіцієнти, які обчислюють за формулами $c = h_с l_с k_с / (h_р l_р k_р)$, $c_с = \frac{l_\delta r_\delta}{p_м h_с l_с k_с}$, у яких $h_с$ – висота ярма статора; $h_р$ – висота ярма ротора; $l_с$ – довжина осердя статора; $l_р$ – довжина осердя ротора; $k_с$ – коефіцієнт заповнення сталі статора; $k_р$ – коефіцієнт заповнення сталі ротора, r_δ – радіус кола, яке проходить через середину повітряного проміжку, l_δ – розрахункова довжина машини.

Нижній індекс „т” тут і надалі означає транспонування.

Величина повітряного проміжку при динамічному ексцентриситеті описується виразом [5]

$$\delta = \delta_0(1 - \varepsilon^* \cos(\alpha_м / p_м) - \omega t - \varphi_\varepsilon), \tag{2}$$

де δ_0 – величина повітряного проміжку за відсутності ексцентриситету; $\varepsilon^* = \varepsilon / \delta_0$ – відносне зміщення ротора, φ_ε – фазовий кут між точкою ексцентриситету і обертовим магнітним полем в $t = 0$.

Доповнимо (1), (2) формулами для обчислення потокозчеплень та електромагнітного моменту двигуна [3]

$$\vec{\psi}_с = L_{\sigma с}\vec{i}_с + q_с\int_0^{2\pi}\vec{n}_с(\alpha_м)B_с d\alpha_м\,; \quad \vec{\psi}_р = L_{\sigma р}\vec{i}_р + q_р\int_0^{2\pi}\vec{n}_р(\beta_м)B_с d\alpha_м\,; \tag{3}$$

$$M = -c_м\int_0^{2\pi}\vec{i}_{ст}\vec{n}_с(\alpha_м)B_\delta d\alpha_м\,, \tag{4}$$

рівняннями електричного стану

$$d\vec{\psi}_с / dt + R_с\vec{i}_с - \vec{u}_с = 0\,; \quad d\vec{\psi}_р / dt + R_р\vec{i}_р = 0 \tag{5}$$

та рівняннями механічного стану

$$M + M_в - J \cdot d\omega / dt = 0\,; \quad \omega = d\gamma / dt\,, \tag{6}$$

де

$$L_{\sigma с} = \begin{bmatrix} L_{\sigma с1с1} & \cdots & L_{\sigma с1сs} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{\sigma сsс1} & \cdots & L_{\sigma сsсs} \end{bmatrix}; \quad L_{\sigma р} = \begin{bmatrix} L_{\sigma р1р1} & \cdots & L_{\sigma р1рr} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{\sigma рrр1} & \cdots & L_{\sigma рrрr} \end{bmatrix}$$

– стала матриця індуктивностей розсіяння фаз статора й ротора відповідно; $R_с = \mathrm{diag}(R_{с1}, \ldots, R_{сs})$; $R_р = \mathrm{diag}(R_{р1}, \ldots, R_{рr})$ – матриця опорів фаз статора й ротора відповідно; $\vec{\psi}_с = [\psi_{с1} \;\ldots\; \psi_{сs}]_т$; $\vec{\psi}_р = [\psi_{р1} \;\ldots\; \psi_{рr}]_т$ – вектори потокозчеплень фаз статора й ротора відповідно; $\vec{u}_с = [u_{с1} \;\ldots\; u_{сs}]_т$ – вектор напруг фаз статора як відомих функцій часу; J – момент інерції обертових мас; $M_в$ – момент на валі як відома функція часу; ω – кутова швидкість ротора.

Система рівнянь (1) являє собою двоточкову диференційну крайову задачу розрахунку магнітного поля в асинхронному двигуні, у якій невідомі B_c, H_c, B_p, H_p, B_δ, F_δ, F_z задовольняють крайову умову

$$B_c(\alpha_{\text{м}}) = B_c(\alpha_{\text{м}} + 2\pi);\ H_c(\alpha_{\text{м}}) = H_c(\alpha_{\text{м}} + 2\pi);\ B_p(\alpha_{\text{м}}) = B_p(\alpha_{\text{м}} + 2\pi);\ H_p(\alpha_{\text{м}}) = H_p(\alpha_{\text{м}} + 2\pi);$$

$$B_\delta(\alpha_{\text{м}}) = B_\delta(\alpha_{\text{м}} + 2\pi);\quad F_\delta(\alpha_{\text{м}}) = F_\delta(\alpha_{\text{м}} + 2\pi);\quad F_z(\alpha_{\text{м}}) = F_z(\alpha_{\text{м}} + 2\pi)$$

й разом з формулами (2) – (4) і рівняннями (5), (6) та за початкової умови

$$t = t_0;\quad \vec i_c = \vec i_{c0};\quad \vec i_p = \vec i_{p0};\quad \gamma = \gamma_0;\quad \omega = \omega_0$$

зображає задачу Коші, розв’язком якої є сукупність залежностей $\vec i_c$, $\vec i_p$, γ, $\beta_{\text{м}}$, $B_{\text{п}}$, B_c, H_c, B_p, H_p, B_δ, F_δ, F_z, δ, $\vec\psi_c$, $\vec\psi_p$, M, ω від часу, які відображатимуть обчислюваний електромеханічний перехідний процес.

Розв’язуватимемо систему рівнянь (1) – (4) методом тригонометричної колокації [2], у якому алгебризація рівнянь зводиться до формальної заміни усіх функцій аргументу $\alpha_{\text{м}}$ векторами їх дискрет (тобто значеннями функції у вузлах накладеної вздовж періоду магнітного поля сітки з $N = 1 + 2n$ вузлами, де n – ціле число), диференційного оператора $\dfrac{d}{d\alpha_{\text{м}}}$ – його дискретним аналогом

$$\text{Д} = \frac{2}{N}\begin{bmatrix} \sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu \sin(\nu(\alpha_{\text{м}1} - \alpha_{\text{м}1})) & \dots & \sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu \sin(\nu(\alpha_{\text{м}1} - \alpha_{\text{м}N})) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu \sin(\nu(\alpha_{\text{м}N} - \alpha_{\text{м}1})) & \dots & \sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu \sin(\nu(\alpha_{\text{м}N} - \alpha_{\text{м}N})) \end{bmatrix},$$

оператора $e^{-p_{\text{м}}\gamma\frac{d}{d\alpha_{\text{м}}}}$ зсуву на кут $-p_{\text{м}}\gamma$ – його дискретним аналогом

$$e^{-p_{\text{м}}\gamma \text{Д}} = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} 1 + \sum\limits_{\nu=1}^{n} 2\cos(\nu(\alpha_{\text{м}1} - \alpha_{\text{м}1} - p_{\text{м}}\gamma)) & \dots & 1 + \sum\limits_{\nu=1}^{n} 2\cos(\nu(\alpha_{\text{м}1} - \alpha_{\text{м}N} - p_{\text{м}}\gamma)) \\ \vdots & & \vdots \\ 1 + \sum\limits_{\nu=1}^{n} 2\cos(\nu(\alpha_{\text{м}N} - \alpha_{\text{м}1} - p_{\text{м}}\gamma)) & \dots & 1 + \sum\limits_{\nu=1}^{n} 2\cos(\nu(\alpha_{\text{м}N} - \alpha_{\text{м}N} - p_{\text{м}}\gamma)) \end{bmatrix},$$

а інтегрального оператора $\int\limits_0^{2\pi} \cdot\, d\alpha_{\text{м}}$ – його алгебричним аналогом $\vec I_G = \dfrac{2\pi}{N}\begin{bmatrix} \underbrace{1 \ \dots \ 1}_{N} \end{bmatrix}$.

Застосувавши ці правила до системи рівнянь (1) – (4), отримуємо її дискретний аналог у вигляді нелінійної системи алгебричних рівнянь

$$\begin{gathered} \text{Д}\vec F_{\delta\text{д}} + \text{Д}\vec F_{z\text{д}} - \frac{r_c}{p_{\text{м}}}\vec H_{\text{сд}} + \frac{r_p}{p_{\text{м}}}\vec H_{\text{рд}} + n_{\text{сдт}}\vec i_c / a_c + e^{-p_{\text{м}}\gamma\text{Д}} n_{\text{рдт}}\vec i_p / a_p = 0; \\ \vec I_G\left(\frac{r_c}{p_{\text{м}}}\vec H_{\text{сд}} - n_{\text{сдт}}\vec i_c / a_c - n_{\text{рдт}}\vec i_p / a_p\right) = 0; \\ \vec B_{\delta\text{д}} = \frac{1}{c_c}\text{Д}\vec B_{\text{сд}};\qquad \vec B_{\text{рд}} = \vec c_1 B_{\text{п}} - c\vec B_{\text{сд}}; \\ \vec F_{\delta\text{д}} = \frac{1}{\mu_0}\delta_{\text{д}} k_{\delta\text{д}}\vec B_{\delta\text{д}};\quad \vec F_{z\text{д}} = \vec F_{z\text{д}}(\vec B_{\delta\text{д}});\quad \vec H_{\text{сд}} = \vec H_{\text{сд}}(\vec B_{\text{сд}});\quad \vec H_{\text{рд}} = \vec H_{\text{рд}}(\vec B_{\text{рд}}), \\ \delta_{\text{д}} = \delta_0(1_N - \varepsilon^* \cos(1_N \vec\alpha_{\text{мд}} / p_{\text{м}}) - 1_N\omega t - 1_N\varphi_\varepsilon) \\ \vec\psi_c = L_{\sigma c}\vec i_c + q_{\text{сд}} n_{\text{сд}}\vec B_{\text{сд}};\quad \vec\psi_p = L_{\sigma p}\vec i_p + q_{\text{рд}} n_{\text{рд}} e^{-p_{\text{м}}\gamma\text{Д}_{\text{т}}}\vec B_{\text{сд}};\quad M = -c_{\text{мд}}\vec i_{\text{ст}} n_{\text{сд}}\vec B_{\delta\text{д}} \end{gathered} \tag{7}$$

де

$$n_{сд}=\begin{bmatrix} n_{c1,д1} & \ldots & n_{c1,дN} \\ \vdots & & \vdots \\ n_{cs,д1} & \ldots & n_{cs,дN} \end{bmatrix};\quad n_{рд}=\begin{bmatrix} n_{p1,д1} & \ldots & n_{p1,дN} \\ \vdots & & \vdots \\ n_{pr,д1} & \ldots & n_{pr,дN} \end{bmatrix}$$

– матриця дискрет кутових густин провідників фаз статора й ротора відповідно; $\delta_д = \mathrm{diag}(\delta_1,...,\delta_N)$, $k_{\delta д} = \mathrm{diag}(k_{\delta 1},...,k_{\delta N})$ – діагональні матриці дискрет величини повітряного проміжку та коефіцієнта Картера відповідно; $\vec{F}_{\delta д} = [F_{\delta 1} \;\; ... \;\; F_{\delta N}]_т$, $\vec{F}_{zд} = [F_{z1} \;\; ... \;\; F_{zN}]_т$ – вектор дискрет відповідно магнітної напруги повітряного проміжку та магнітної напруги зубцевого шару статора й ротора; $\vec{B}_{\delta д} = [B_{\delta 1} \;\; ... \;\; B_{\delta N}]_т$ – вектор дискрет магнітної індукції в повітряному проміжку; $\vec{B}_{сд} = [B_{c1} \;\; ... \;\; B_{cN}]_т$, $\vec{B}_{рд} = [B_{p1} \;\; ... \;\; B_{pN}]_т$ – вектор дискрет відповідно магнітної індукції ярма статора та магнітної індукції ярма ротора; $\vec{H}_{сд} = [H_{c1} \;\; ... \;\; H_{cN}]_т$, $\vec{H}_{рд} = [H_{p1} \;\; ... \;\; H_{pN}]_т$ – вектор дискрет відповідно напруженості магнітного поля в ярмі статора та напруженості магнітного поля в ярмі ротора; $\vec{c}_1 = [1 \;\; \ldots \;\; 1]_т$ – матриця-стовпець розміру N; 1_N – одинична матриця розміру N; $\vec{\alpha}_{мд} = [\alpha_{м1} \;\; \ldots \;\; \alpha_{мN}]_т$ – стовпець дискрет кутової координати $\alpha_м$ накладеної вздовж періоду магнітного поля сітки; $q_{сд} = 2\pi q_c/N$; $q_{рд} = 2\pi q_p/N$; $c_{мд} = 2\pi c_м/N$.

До інтегрування нелінійної САР (5) – (7), яка описує електромеханічні перехідні процеси в асинхронному двигуні з урахуванням ексцентриситету ротора під час розрахунку його магнітного поля методом тригонометричної колокації, застосуємо метод ФДН.

Алгебризувавши похідні в диференційних рівняннях (5), (6) за формулою диференціювання назад g-го порядку, отримуємо алгебричні рівняння

$$b\vec{\psi}_c + \sum_{j=1}^{g} b_j \vec{\psi}_{cj} + R_c \vec{i}_c - \vec{u}_c = 0; \qquad b\vec{\psi}_p + \sum_{j=1}^{g} b_j \vec{\psi}_{pj} + R_p \vec{i}_p = 0; \tag{8}$$

$$M + M_в - J(b\omega + \sum_{j=1}^{g} b_j \omega_j) = 0; \qquad \omega = b\gamma + \sum_{j=1}^{g} b_j \gamma_j, \tag{9}$$

де $\vec{i}_c$, $\vec{i}_p$, γ, $\vec{\psi}_c$, $\vec{\psi}_p$, M, ω – невідомі значення змінних стану в моменті t; $\vec{u}_c$, $\vec{u}_p$, $M_в$ – відомі значення вимушувальних сил у моменті t; γ_j, $\vec{\psi}_{cj}$, $\vec{\psi}_{pj}$, ω_j – обчислені на попередніх g кроках інтегрування значення змінних γ, $\vec{\psi}_c$, $\vec{\psi}_p$, ω в моментах $t_g < t_{g-1} < \ldots < t_1$; b, b_j (j=1,...,g) – коефіцієнти, що визначаються сукупністю значень t, $t_1,..., t_g$.

Система алгебричних рівнянь (7) – (9) складається з 16 рівнянь і містить значення невідомих $\vec{i}_c$, $\vec{i}_p$, γ, $B_п$, $\vec{B}_{сд}$, $\vec{H}_{сд}$, $\vec{B}_{рд}$, $\vec{H}_{рд}$, $\vec{B}_{\delta д}$, $\vec{F}_{\delta д}$, $\vec{F}_{zд}$, $\delta_д$, $\vec{\psi}_c$, $\vec{\psi}_p$, M, ω у моменті t. До її розв'язування застосуємо метод Ньютона.

Лінеаризована система рівнянь на *i*-й ітерації методу Ньютона має вигляд

$$\begin{gathered} Д\Delta\vec{F}_{\delta д}^{\langle i\rangle} + Д\Delta\vec{F}_{zд}^{\langle i\rangle} - \frac{r_c}{p_м}\Delta\vec{H}_{сд}^{\langle i\rangle} + \frac{r_p}{p_м}\Delta\vec{H}_{рд}^{\langle i\rangle} + \\ + n_{сдт}\Delta\vec{i}_c^{\langle i\rangle}/a_c + e^{-p_м\gamma Д} n_{рдт}\Delta\vec{i}_p^{\langle i\rangle}/a_p - p_м e^{-p_м\gamma Д} Д n_{рдт}\vec{i}_p \Delta\gamma^{\langle i\rangle}/a_p = -\vec{f}_{m1}^{\langle i-1\rangle}; \\ \vec{I}_G\left(\frac{r_c}{p_м}\Delta\vec{H}_{сд}^{\langle i\rangle} - n_{сдт}\Delta\vec{i}_c/a_c - n_{рдт}\Delta\vec{i}_p/a_p\right) = -f_{m2}^{\langle i-1\rangle}; \end{gathered} \tag{10}$$

$$\Delta\vec{B}_{\delta д}^{\langle i\rangle} = \frac{1}{c_c} Д\Delta\vec{B}_{сд}^{\langle i\rangle}; \quad \Delta\vec{B}_{рд}^{\langle i\rangle} = \vec{c}_1\Delta B_п^{\langle i\rangle} - c\Delta\vec{B}_{сд}^{\langle i\rangle}; \quad \Delta\vec{F}_{\delta д}^{\langle i\rangle} = \frac{1}{\mu_0}\delta_д^{\langle i-1\rangle} k_{\delta д}\Delta\vec{B}_{\delta д}^{\langle i\rangle} + \frac{1}{\mu_0}\Delta\delta_д^{\langle i\rangle} k_{\delta д}\vec{B}_{\delta д};$$

$$\Delta\vec{F}_{zд}^{\langle i\rangle} = \rho_{zд}^{\langle i-1\rangle}\Delta\vec{B}_{\delta д}^{\langle i\rangle}; \quad \Delta\vec{H}_{сд}^{\langle i\rangle} = \nu_{сд}^{\langle i-1\rangle}\Delta\vec{B}_{сд}^{\langle i\rangle}; \quad \Delta\vec{H}_{рд}^{\langle i\rangle} = \nu_{рд}^{\langle i-1\rangle}\Delta\vec{B}_{рд}^{\langle i\rangle}; \; \Delta\delta_д^{\langle i\rangle} = -\delta_0 1_N \Delta\omega^{\langle i\rangle} t$$

$$\Delta\vec{\psi}_{с}^{\langle i\rangle}=L_{\sigma с}\Delta\vec{i}_{с}^{\langle i\rangle}+q_{сд}n_{сд}\Delta\vec{B}_{сд}^{\langle i\rangle};$$

$$\Delta\vec{\psi}_{р}^{\langle i\rangle}=L_{\sigma р}\Delta\vec{i}_{р}^{\langle i\rangle}+q_{рд}n_{рд}e^{-p_{м}\gamma^{\langle i-1\rangle}Д_{т}}\Delta\vec{B}_{сд}^{\langle i\rangle}-p_{м}q_{рд}n_{рд}e^{-p_{м}\gamma^{\langle i-1\rangle}Д_{т}}Д_{т}\vec{B}_{сд}^{\langle i-1\rangle}\Delta\gamma^{\langle i\rangle};$$

$$\Delta M^{\langle i\rangle}=-c_{мд}\vec{i}_{ст}^{\langle i-1\rangle}n_{сд}\Delta\vec{B}_{\delta д}^{\langle i\rangle}-c_{мд}\vec{B}_{\delta дт}^{\langle i-1\rangle}n_{сдт}\Delta\vec{i}_{с}^{\langle i\rangle}$$

$$b\Delta\vec{\psi}_{с}^{\langle i\rangle}+R_{с}\Delta\vec{i}_{с}^{\langle i\rangle}=-\vec{f}_{с}^{\langle i-1\rangle};\qquad b\Delta\vec{\psi}_{р}^{\langle i\rangle}+R_{р}\Delta\vec{i}_{р}^{\langle i\rangle}=-\vec{f}_{р}^{\langle i-1\rangle};$$

$$\Delta M^{\langle i\rangle}-Jb\Delta\omega^{\langle i\rangle}=-f_{м}^{\langle i-1\rangle};\qquad \Delta\omega^{\langle i\rangle}=b\Delta\gamma^{\langle i\rangle},$$

де $\Delta\vec{i}_{с}^{\langle i\rangle}$, $\Delta\vec{i}_{р}^{\langle i\rangle}$, $\Delta\gamma^{\langle i\rangle}$, $\Delta B_{п}^{\langle i\rangle}$, $\Delta\vec{B}_{сд}^{\langle i\rangle}$, $\Delta\vec{H}_{сд}^{\langle i\rangle}$, $\Delta\vec{B}_{рд}^{\langle i\rangle}$, $\Delta\vec{H}_{рд}^{\langle i\rangle}$, $\Delta\vec{B}_{\delta д}^{\langle i\rangle}$, $\Delta\vec{F}_{\delta д}^{\langle i\rangle}$, $\Delta\vec{F}_{zд}^{\langle i\rangle}$, $\Delta\delta_{д}^{\langle i\rangle}$, $\Delta\vec{\psi}_{с}^{\langle i\rangle}$, $\Delta\vec{\psi}_{р}^{\langle i\rangle}$, $\Delta M^{\langle i\rangle}$, $\Delta\omega^{\langle i\rangle}$ – поправки невідомих на *i*-й ітерації; $\vec{f}_{m1}^{\langle i-1\rangle}$, $f_{m2}^{\langle i-1\rangle}$, $\vec{f}_{с}^{\langle i-1\rangle}$, $\vec{f}_{р}^{\langle i-1\rangle}$, $f_{м}^{\langle i-1\rangle}$ – значення нев'язок

$$\vec{f}_{m1}=Д\vec{F}_{\delta д}+Д\vec{F}_{zд}-\frac{r_{с}}{p_{м}}\vec{H}_{сд}+\frac{r_{р}}{p_{м}}\vec{H}_{рд}+n_{сдт}\vec{i}_{с}/a_{с}+e^{-p_{м}\gamma Д}n_{рдт}\vec{i}_{р}/a_{р};$$

$$f_{m2}=\vec{I}_{G}\left(\frac{r_{с}}{p_{м}}\vec{H}_{сд}-n_{сдт}\vec{i}_{с}/a_{с}-n_{рдт}\vec{i}_{р}/a_{р}\right);$$

$$\vec{f}_{с}=b\vec{\psi}_{с}+\sum_{j=1}^{g}b_{j}\vec{\psi}_{cj}+R_{с}\vec{i}_{с}-\vec{u}_{с};\qquad \vec{f}_{р}=b\vec{\psi}_{р}+\sum_{j=1}^{g}b_{j}\vec{\psi}_{pj}+R_{р}\vec{i}_{р};$$

$$f_{м}=M+M_{в}-J\Big(b\omega+\sum_{j=1}^{g}b_{j}\omega_{j}\Big),$$

обчислені за (i–1)-м наближенням невідомих; $\nu_{сд}^{\langle i-1\rangle}$, $\nu_{рд}^{\langle i-1\rangle}$, $\rho_{zд}^{\langle i-1\rangle}$ – значення матриць

$$\nu_{сд}=\frac{d\vec{H}_{сд}}{d\vec{B}_{сд}}=\mathrm{diag}\left(\frac{dH_{c1}}{dB_{c1}},\ldots,\frac{dH_{cN}}{dB_{cN}}\right)=\mathrm{diag}\left(\nu_{c1},\ldots,\nu_{cN}\right);$$

$$\nu_{рд}=\frac{d\vec{H}_{рд}}{d\vec{B}_{рд}}=\mathrm{diag}\left(\frac{dH_{p1}}{dB_{p1}},\ldots,\frac{dH_{pN}}{dB_{pN}}\right)=\mathrm{diag}\left(\nu_{p1},\ldots,\nu_{pN}\right);$$

$$\rho_{zд}=\frac{d\vec{F}_{zд}}{d\vec{B}_{\delta д}}=\mathrm{diag}\left(\frac{dF_{z1}}{dB_{\delta 1}},\ldots,\frac{dF_{zN}}{dB_{\delta N}}\right)=\mathrm{diag}\left(\rho_{z1},\ldots,\rho_{zN}\right),$$

обчислені за (i–1)-м наближенням невідомих $\vec{B}_{сд}$, $\vec{B}_{рд}$, $\vec{B}_{\delta д}$.

Лінійну систему рівнянь (10) зводимо до вигляду

$$A^{\langle i-1\rangle}\Delta\vec{X}_{п}^{\langle i\rangle}=-\vec{f}^{\langle i-1\rangle},\tag{11}$$

де $\vec{f}^{\langle i-1\rangle}$, $A^{\langle i-1\rangle}$ – значення вектора нев'язок $\vec{f}=\lfloor\vec{f}_{м1}\quad f_{м2}\quad\vec{f}_{с}\quad\vec{f}_{р}\quad f_{м}\rfloor_{т}$ і матриці

$$A=\begin{bmatrix}
\dfrac{n_{сдт}}{a_{с}} & \dfrac{e^{-p_{м}\gamma Д}n_{рдт}}{a_{р}} & \begin{matrix}-\dfrac{\delta_0}{\mu_0}Д1_{N}k_{\delta д}B_{\delta д}-\\ -\dfrac{p_{м}e^{-p_{м}\gamma Д}Дn_{рдт}\vec{i}_{р}}{a_{р}}\end{matrix} & \dfrac{r_{р}}{p_{м}}\nu_{рд}\vec{c}_{1} & Д\left(\dfrac{\delta_{д}k_{\delta д}}{\mu_0 c_{с}}+\dfrac{\rho_{zд}}{c_{с}}\right)Д-\dfrac{r_{с}}{p_{м}}\nu_{сд}-\dfrac{r_{р}}{p_{м}}\nu_{рд}\\
-\dfrac{\vec{I}_{G}n_{сдт}}{a_{с}} & -\dfrac{\vec{I}_{G}n_{рдт}}{a_{р}} & 0 & 0 & \dfrac{r_{с}}{p_{м}}\vec{I}_{G}\nu_{сд}\\
bL_{\sigma с}+R_{с} & 0 & 0 & 0 & bq_{сд}n_{сд}\\
0 & bL_{\sigma р}+R_{р} & -bp_{м}q_{рд}n_{рд}e^{-p\gamma Д_{т}}Д_{т}\vec{B}_{сд} & 0 & bq_{рд}n_{рд}e^{-p_{м}\gamma Д_{т}}\\
-c_{мд}\vec{B}_{\delta дт}n_{сдт} & 0 & -Jb^{2} & 0 & -\dfrac{c_{мд}}{c_{с}}\vec{i}_{ст}n_{сд}Д
\end{bmatrix},$$

обчислені за (і–1)-м наближенням невідомих;

$$\Delta\vec{X}_{п}^{\langle i\rangle}=\left[\Delta\vec{i}_{с}^{\langle i\rangle}\quad \Delta\vec{i}_{р}^{\langle i\rangle}\quad \Delta\gamma^{\langle i\rangle}\quad \Delta B_{п}^{\langle i\rangle}\quad \Delta\vec{B}_{сд}^{\langle i\rangle}\right]_{т}$$

– вектор поправок первинних невідомих на *і*-й ітерації.

Утворимо вектор $\vec{X}_{в}=\left[\vec{H}_{сд}\quad \vec{B}_{рд}\quad \vec{H}_{рд}\quad \vec{B}_{\delta д}\quad \vec{F}_{\delta д}\quad \vec{F}_{zд}\quad \vec{\psi}_{с}\quad \vec{\psi}_{р}\quad M\quad \omega\quad \delta_{д}\right]_{т}$, який назвемо вектором вторинних невідомих.

На *і*-й ітерації розв'язування нелінійної системи алгебричних рівнянь (10) необхідно виконати такі операції:

- за (і–1)-м наближенням невідомих обчислити значення $A^{\langle i-1\rangle}$ матриці А і значення $\vec{f}^{\langle i-1\rangle}$ вектора $\vec{f}$ нев'язок;
- розв'язати числовим методом лінійну систему алгебричних рівнянь (11);
- обчислити і-те наближення первинних невідомих за формулою
$$\vec{X}_{п}^{\langle i\rangle}=\vec{X}_{п}^{\langle i-1\rangle}+\Delta\vec{X}_{п}^{\langle i\rangle};$$
- обчислити і-те наближення вторинних невідомих безпосередньо за тими рівняннями системи (7), (9), які розв'язані відносно цих невідомих.

Висновки

Опрацьована математична модель асинхронного двигуна з динамічним ексцентриситетом з урахуванням насичення основного магнітного кола та вищих просторових гармонік МРС дає змогу досліджувати поведінку двигуна в перехідних процесах, усталених режимах, оцінити вплив ексцентриситету на статичні характеристики. Модель можна використовувати для діагностування ступеня ексцентриситету ротора.

1. Иванов-Смоленский А.В., Абрамкин Ю.В., Власов А.И., Кузнецов В.А. Универсальный метод расчета электромагнитных процессов в электрических машинах / под ред. А.И. Иванова – Смоленского. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 216 с. 2. Фильц Р. В. Дискретные аналоги дифференциальных операторов и их применение в задачах электромеханики // Изв. вузов. Электромеханика. – 1990. – № 3. – С. 5–11. 3. Фильц Р.В. Математические основы теории электромеханических преобразователей. – К.: Наук. думка, 1979. – 208 с. 4. Фильц Р.В. Оператор сдвига и его применение в задачах электромеханики // Изв. вузов. Электромеханика. – 1991. – № 4. – С. 5–12. 5. Шуйский В. Расчет электрических машин. – Л.: Энергия, 1968. – 731 с. 6. Arash Kiyoumarsi, Mohammad Reza Hassan Zadeh A new analytical technique for analysis of the rotor eccentricity in rotating electrical machines. – International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics. – 2009. – Vol. 30, № 1–2. – P. 83–93. 7. Dorrell D.G. Calculation of unbalanced magnetic pull in small cage induction motors with skewed rotors and dynamic rotor eccentricity // IEEE Trans. on Energy Conversion. – 1996. – Vol. 11, № 3. – P. 483–488. 8. Toliyat H.A., Arefeen M.S., Parlos A.G. A method for dynamic simulation of air-gap eccentricity in induction machines // IEEE Trans. on Industry Application. – 1996. – Vol. 32, № 4. – P. 910–918. 9. Wazecha A., Weinreb K., Wegiel T. Modyfikacja funkcji permeancji szczeliny powietrznej uwzgledniajaca efekty nasyceniowe w silniku asynchronicznym z ekscentrycznoscia wirnika. – Zeszyty naukowe Politechniki Slaskiej, Seria Elektryka, 2001. – Nr. 177. – S. 113–120.