

Висновки:

1. Розв'язано задачу теплопровідності для системи циліндрична оболонка-стрижні-пластинка, яка нагрівається середовищами, теплообмін з якими описується законом Ньютона; при цьому враховується реальна геометрія з'єднання елементів системи, а саме – несиметричність і неортогональність їх спряження. На основі отриманого розв'язку проведено параметричне дослідження температурного поля системи.

2. Отримані числові результати показують, що неврахування реально наявної неортогональності спряження оболонки зі стрижневими елементами може призвести до істотних похибок у визначенні інтегральних характеристик температурного поля (до 20 % у розглянутих випадках) у приконттактних зонах. За достатнього віддалення від приконттактної зони характер з'єднання елементів фактично не впливає на їхнє температурне поле.

3. Із отриманих числових результатів також випливає, що температурні аналоги згинальних моментів в елементах системи істотно залежать від ексцентриситетів спряження ξ_1^* і ξ_2^* . Так, значення величини Θ_x залежно від параметра ξ_2^* може відрізнитись на 40 % і більше, Θ_y може змінити знак.

1. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – К.: Наук. думка, 1972. – 308 с. 2. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М., Семерак М.М. Температурные поля и напряжения в элементах электровакуумных приборов. – К.: Наук. думка, 1981. – 342 с. 3. Чернуха Ю.А., Войтович Н.И. Термонапряженное состояние сопряженных через кольцо круговых пластин // Прикл. механика. – 1986. – №6. – С. 75–81. 4. Подстригач Я.С., Чернуха Ю.А., Войтович Н.И. Температурное поле системы сферическая оболочка-стержень-круговая пластинка // Проблемы прочности. – 1986. – №5. – С. 101–106. 5. Чернуха Ю.А. Задача теплопроводности для облучаемых многослойных оболочек // Мат. методы и физико-механические поля. – 1975. – Вып. 1. – С. 104–109. 6. Подстригач Я.С., Чернуха Ю.А., Войтович Н.И. К определению температурных полей и напряжений в оболочках, сопряженных через стержень // Математические методы в термомеханике. – К.: Наук. думка, 1978. – С. 3–11.

УДК 534.1+539.5

О.І. Хитряк, Б.І. Сокіл

Академія Сухопутних військ імені гетьмана П. Сагайдачного

ВПЛИВ ШВИДКОСТІ ПОЗДОВЖНЬОГО РУХУ НА НАПРУЖЕННЯ У ГНУЧКИХ ЕЛЕМЕНТАХ СИСТЕМ ПРИВОДІВ ЗА РЕЗОНАНСУ

© Хитряк О.І., Сокіл Б.І., 2011

Проведено дослідження впливу швидкості поздовжнього руху на резонансні коливання та напруження за резонансу у гнучких елементах систем приводів. Отримано співвідношення, які описують основні параметри резонансних коливань, а на їхній основі проаналізовано вплив швидкості на напруження гнучких елементів.

Researches of influence of a velocity of longitudinal movement on resonance oscillations and voltages are conducted at a resonance in flexible elements of systems of drives. The relations describing key parametres of resonance oscillations are received, and on their basis influence of a velocity on voltage of flexible elements is analysed.

Актуальність та огляд основних результатів досліджень. Приводи з гнучким робочим елементом широкого використовуються у різних галузях народного господарства. Вони дають змогу в автоматичному режимі здійснювати регулювання швидкості механізму, проводити

перерозподіл навантаження, а застосування автоматизації (навіть часткової) збільшує надійність і точність роботи машини загалом. Динамічні процеси у приводах та гнучких елементах зокрема визначаються зовнішніми (наприклад, моментом приводу, конструкцією, активними силами) та внутрішніми (натяг віток, їх фізико-механічними та геометричними характеристиками, швидкість передавання руху) чинниками. Тому важливою проблемою є аналіз впливу вказаних чинників на коливання та надійність функціонування гнучких елементів, а, значить, приводів загалом. Найнебезпечнішими під час експлуатації і одночасно найскладнішими для аналітичного дослідження є резонансні явища. Детальний їх аналіз можна зробити тільки на основі розв'язків адекватних математичних моделей процесу, якими є крайові задачі для нелінійного диференціального рівняння з частинними похідними [1–6]. Із нелінійністю математичних моделей пов'язані основні труднощі побудови їх розв'язків. Вважаємо, що максимальне значення нелінійних сил є малим порівняно із лінійною складовою відновлюючої сили, тобто розглядається випадок слабкої нелінійності. Для побудови розв'язків таких моделей зручно використовувати різні модифікації методів збурень [4, 6, 7]. Необхідно відзначити, що різні аспекти динаміки одновимірних гнучких елементів систем приводу розглядаються в [1–4]. Однак такі важливі питання під час експлуатації приводів, як вплив коливань, особливо резонансу, на міцнісні властивості гнучких елементів у цих роботах не розглядались. Саме такий комплекс важливих задач стосовно двовимірних моделей гнучких елементів систем приводу є предметом розгляду цієї роботи.

Постановка задачі. Відомо, що диференціальне рівняння поперечних коливань двовимірної моделі гнучких елементів систем приводу, згинною жорсткістю яких можна знехтувати, і які рухаються зі сталою швидкістю вздовж однієї із осей (вздовж осі OX), можна подати у вигляді

$$u_{tt} + 2Vu_{xt} - (a^2 - V^2)u_{xx} - g^2u_{yy} = ef(u, u_x, u_y, u_t, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) + eH \sin J, \quad J = \pi t. \quad (1)$$

де (1) $u(t, x, y)$ – функція, яка визначає відхилення від рівноважного положення гнучкого елемента з ейлеровими координатами x, y у довільний момент часу t [8]; a, g – сталі, які визначаються через фізико-механічні параметри рухомого об'єкта; V – швидкість його поздовжнього руху; $ef(u, u_x, u_y, u_t, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy})$ – відома аналітична функція, яка описує нелінійні сили, а малий параметр e вказує на малу величину останніх порівняно із лінійною складовою відновлювальної сили; π – частота періодичного збурення; eH – його найбільша величина.

Для рівняння (1) розглядатимемо крайові умови вигляду

$$u(t, x, y)|_{x=0} = u(t, x, y)|_{x=l} = 0, \quad (2)$$

які узгоджуються, наприклад, із умовами безвідривності вздовж ліній контакту стрічки гнучкого елемента від привідного і веденого барабанів. Отже, аналітичне вивчення динамічного процесу двовимірних середовищ, які рухаються вздовж осі OX з постійною складовою швидкості, пов'язано із побудовою та дослідженням розв'язку крайової задачі (1), (2), що і є предметом подальшого розгляду роботи.

Методика розв'язування задачі. З урахуванням того, що нелінійні сили є малими порівняно із лінійною складовою відновлювальної сили, для побудови розв'язку крайової задачі (1), (2) використаємо загальні ідеї методів збурень. Відповідно до цього розглянемо незбурене рівняння, яке відповідає (1), тобто

$$u_{tt} + 2Vu_{xt} - (a^2 - V^2)u_{xx} - g^2u_{yy} = 0. \quad (3)$$

Легко переконатись, що навіть спрощена лінійна математична модель динамічного процесу досліджуваних об'єктів для вивчення не дає змоги застосувати загальні положення таких класичних методів побудови розв'язків рівнянь із частинними похідними, як Фур'є та Д'Аламбера [8]. Незважаючи на сказане, розв'язок крайової задачі (3), (2) можна трактувати як накладання прямої та відбитої хвиль, довжини яких є різними. Використовуючи основну ідею теорії хвильового руху

для динамічних систем, які характеризуються сталою складовою швидкості позовжнього руху [1], розв'язок рівняння (3) за крайових умов (2) показано у вигляді

$$u(t, x, y) = a \cos(kx + dy + wt + j) + b \cos(cx - dy - wt + y). \quad (4)$$

У залежності (4) відповідно w – частота, a, b – амплітуди прямої і відбитої хвиль, k, c – їхні хвильові числа, а d – хвильове число поперечної складової хвилі, j, y – початкові фази хвиль. Таке представлення розв'язку не суперечить методу Д'Аламбера, адже, як буде показано нижче, за $V \rightarrow 0$ у граничному випадку із (4) отримуються результати, які узгоджуються із відомими класичними для коливань середовища із нерухомими кінцями. [9].

Хвильові числа k, c та частота коливань w визначаються [5, 6] такими співвідношеннями:

$$k = \frac{kp}{l} \left(1 + \frac{V}{a} \sqrt{1 + \frac{d^2 g^2 l^2}{(a^2 - V^2) k^2 p^2}} \right), \quad c = \frac{kp}{l} \left(1 - \frac{V}{a} \sqrt{1 + \frac{d^2 g^2 l^2}{(a^2 - V^2) k^2 p^2}} \right),$$

$$w = \frac{kp}{l} \left(\frac{a^2 - V^2}{a} \sqrt{1 + \frac{d^2 g^2 l^2}{(a^2 - V^2) k^2 p^2}} \right). \quad (5)$$

Крім того, із крайових умов (2) випливає, що $a = -b, j = -y$. Для визначення параметра d (хвильове число поперечної складової хвилі) використаємо умову: впоперек стрічки поміщається ціле число півхвиль. З урахуванням вказаного d приймає значення $d = \frac{mp}{b}$ (b – ширина стрічки, $m = 1, 2, \dots$).

Збурене рівняння. Відповідно до загальних принципів побудови розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь із малим параметром у правій частині [9] розв'язок збуреного рівняння (1) за однорідних крайових умов (2) шукатимемо у вигляді асимптотичного ряду:

$$u(x, t) = a(\cos(kx + dy + q) - \cos(cx - dy - q)) + e u_1(a, x, y, q, J) + e^2 u_2(a, x, y, q, J) + \dots, \quad (6)$$

в якому $q = wt + j$, а невідомі функції $u_1(a, x, y, q, J), u_2(a, x, y, q, J), \dots$ повинні: а) визначатися так, щоб асимптотичне подання розв'язку (6) задовольняло з необхідним ступенем точності вихідне рівняння (1); б) бути періодичними стосовно x, y, q, J ; в) задовольняти крайовим умовам, які впливають із (2), тобто

$$u_1(a, x, y, q, J)|_{x=0} = u_1(a, x, y, q, J)|_{x=l} = 0, \quad u_2(a, x, y, q, J)|_{x=0} = u_2(a, x, y, q, J)|_{x=l} = 0. \quad (7)$$

Крім того, нелінійні сили є причиною того, що параметри a і j є змінними величинами. На закони зміни цих характеристик хвильового процесу істотно впливають як нелінійні сили, так і співвідношення між частотами власних та змушуючих коливань. Існують різні підходи до впливу «малих сил» на динаміку процесу [9, 10]. Зокрема, для середовищ значних розмірів вважають, що параметри a і j залежать від часу та лінійних координат, тобто t, x, y . У той самий час для «коротких середовищ», середовищ порівняно незначних геометричних розмірів вказані параметри змінюються лише у часі. Саме такий підхід розвивається нижче. Для нього, як і для квазілінійних систем із зосередженими масами, розглядатимемо два випадки дії періодичного збурення: нерезонансний $w \neq \frac{p}{q} m$ та резонансний $w \approx \frac{p}{q} m$ (p, q – взаємно прості числа). Розглянемо спочатку простіший нерезонансний випадок. Беручи до уваги, що для двовимірних середовищ незначних розмірів параметри a і q не залежать від геометричних координат, а залежать тільки від часу. Закони їхніх змін шукатимемо у вигляді диференціальних співвідношень:

$$a_t = e A_1(a) + e^2 A_2(a) + \dots,$$

$$j_t = e B_1(a) + e^2 B_2(a) + \dots \quad (8)$$

Отже, задача полягає у визначенні таких невідомих функцій $A_1(a), A_2(a), \dots, B_1(a), B_2(a), \dots$ та $u_1(a, x, y, q, J), u_2(a, x, y, q, J), \dots$, за яких асимптотичне подання розв'язку (6), (8) із необхідним ступенем точності задовольняє вихідному рівнянню (1).

Примітка 1. Для середовищ значних геометричних розмірів параметри a і j залежать як від координат, так і від часу. Така постановка задачі є складнішою і може бути предметом окремих досліджень.

Шляхом диференціювання (6) по змінній t , із урахуванням (8) матимемо

$$\begin{aligned} u_t(x, t) = & -aw[\sin(kx + dy + q) + \sin] + e\{A_1(a)[\cos(kx + dy + q) - \cos(cx - dy - q)] - \\ & - aB_1(a)[\sin(kx + dy + q) + \sin(cx - dy - q)] + \frac{\partial u_1}{\partial q} w + \frac{\partial u_1}{\partial J} m\} + e^2 \dots, \\ u_{tt}(x, t) = & -aw^2[\cos(kx + dy + q) - \cos(cx - dy - q)] - we\{2A_1(a)[\sin(kx + dy + q) + \sin(cx - dy - q)] + \\ & + 2aB_1(a)[\cos(kx + dy + q) - \cos(cx - dy - q)] + \frac{\partial^2 u_1}{\partial q^2} w^2 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial J^2} m^2 + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial q \partial J} mw\} + e^2 \dots \quad (9) \end{aligned}$$

Аналогічно знаходимо: u_{xt}, u_{xx}, u_{yy} :

$$\begin{aligned} u_{xt}(x, t) = & -aw[k \cos(kx + dy + q) + c \cos(cx - dy - q)] - e\{A_1(a)[k \sin(kx + dy + q) - c \sin(cx - dy - q)] - \\ & - aB_1(a)[k \cos(kx + dy + q) + c \cos(cx - dy - q)] + \frac{\partial^2 u_1}{\partial q \partial x} w + \frac{\partial^2 u_1}{\partial J \partial x} m\} + e^2 \dots, \\ u_{xx}(x, t) = & -a[k^2 \cos(kx + dy + q) - c^2 \cos(cx - dy - q)] + e \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + e^2 \dots, \\ u_{yy}(x, t) = & -ad^2[\cos(kx + dy + q) - \cos(cx - dy - q)] + e \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + e^2 \dots \quad (10) \end{aligned}$$

Асимптотичне подання розв'язку (6) задовольнятиме вихідне рівняння (1), якщо підставити на місце $u(t, x, y)$ та її похідних співвідношення (6)–(10), коефіцієнти за однакових ступенів малого параметра e правої і лівої його частин будуть однаковими. Останнє і є умовою для знаходження диференціальних рівнянь, які пов'язують невідомі функції $U_1(a, x, y, q, J), U_2(a, x, y, q, J), \dots$, та $A_1(a), A_2(a), \dots, B_1(a), B_2(a), \dots$. Зокрема, для першого наближення отримаємо лінійне диференціальне рівняння:

$$\begin{aligned} w^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial q^2} + m^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial J^2} + 2mw \frac{\partial^2 u_1}{\partial q \partial J} + 2Vw \frac{\partial^2 u_1}{\partial q \partial x} + 2Vm \frac{\partial^2 u_1}{\partial J \partial x} - (a^2 - V^2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - g^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = F_1(a, x, y, q) + H \sin J + \\ + 2\{[A_1(a)(w + kV)(\sin(kx + dy + q) + (w - cV)\sin(cx - dy - q)) + \\ + aB_1(a)((w + kV)\cos(kx + dy + q) - (w - cV)\cos(cx - dy - q))]\}, \quad (11) \end{aligned}$$

де $F_1(a, x, y, q)$ відповідає значенню функції $f(u, u_x, u_y, u_t, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy})$ за умови, що $u(t, x, y)$, та її похідні приймають лише головні значення у формулах (6) – (10). Після нескладних перетворень коефіцієнти за $A_1(a)$ і $B_1(a)$ у правій частині співвідношення (11) подамо у такому вигляді:

$$\begin{aligned} [(w + kV)\sin(kx + dy + q) + (w - cV)\sin(cx - dy - q)]A_1(a) + \\ + a[(w + kV)\cos(kx + dy + q) - (w - cV)\cos(cx - dy - q)]B_1(a) = \\ = [(w + kV)\sin(kx + dy) + (w - cV)\sin(cx - dq)](A_1(a)\cos q - aB_1 \sin q) + \\ + [(w + kV)\cos(kx + dy) - (w - cV)\cos(cx - dy)](A_1(a)\sin q + aB_1 \cos q). \quad (12) \end{aligned}$$

Для однозначного визначення із диференціального рівняння (11) невідомих функцій $A_1(a)$ і $B_1(a)$ накладемо на функцію $U_1(a, x, y, q, J)$ додаткові умови, а саме: вона не повинна містити у розкладі доданків пропорційні $\sin q$ і $\cos q$. Це еквівалентно такому

$$\int_0^{2p} U_1(a, x, y, q, J) \begin{Bmatrix} \sin q \\ \cos q \end{Bmatrix} dq = 0. \quad (13)$$

Із $2p$ – періодичності по q функції $U_1(a, x, y, q, J)$ випливає, що такі самі властивості мають і її частинні похідні по q . Це дає змогу, із урахуванням (13), отримати систему алгебраїчних рівнянь, яка пов'язує шукані функції $A_1(a), B_1(a)$ у вигляді

$$\begin{aligned} & [(w + kV)\sin(kx + dy) + (w - cV)\sin(cx - dy)]A_1(a) + \\ & + a[(w + kV)\cos(kx + dy) - (w - cV)\cos(cx - dy)]B_1(a) = \frac{-e}{p} \int_0^{2p} F_1(a, x, y, q) \cos q dq, \\ & [(w + kV)\cos(kx + dy) - (w - cV)\cos(cx - dy)]A_1(a) - \\ & - a[(w + kV)\sin(kx + dy) + (w - cV)\sin(cx - dy)]B_1(a) = \frac{-e}{p} \int_0^{2p} F_1(a, x, y, q) \sin q dq. \end{aligned} \quad (14)$$

Примітка 2. Під час знаходження залежностей (14) використано таке: $H \int_0^{2p} \sin J \begin{Bmatrix} \sin q \\ \cos q \end{Bmatrix} dq = 0$.

Усредненням правих і лівих частин залежностей (14) по лінійних змінних x, y знаходимо

$$\begin{aligned} A_1(a) &= \frac{e}{plb[(w + kV)^2 + (w - cV)^2]} \int_0^l \int_0^b \int_0^{2p} f_1(a, x, y, q) \{r(x, y) \cos q + h(x, y) \sin q\} dq dy dx \\ B_1(a) &= \frac{e}{apl[(w + kV)^2 + (w - cV)^2]} \int_0^l \int_0^b \int_0^{2p} f_1(a, x, y, q) \{r(x, y) \sin q - h(x, y) \cos q\} dq dy dx, \end{aligned} \quad (15)$$

де $r(x, y) = (w + kV)\sin(kx + dy) + (w - cV)\sin(cx - dy)$;

$h(x, y) = (w + kV)\cos(kx + dy) - (w - cV)\cos(cx - dy)$.

Визначивши функції, які описують у першому наближенні закони зміни основних параметрів процесу, можна перейти до знаходження і самої функції $U_1(a, x, y, q, J)$. Для цього можна використати подання її системою ортонормованих функцій, які задовольняють крайові умови (2).

Набагато складнішим і одночасно важливішим, з огляду на практичний інтерес, є резонансний випадок. Резонансна амплітуда істотно залежить від різниці фаз власних та змушених коливань, тобто $f = q - J$. Тому закон зміни резонансної амплітуди шукатимемо у вигляді диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= eA_1(a, f) + e^2 A_2(a, f) + \dots, \\ \mathfrak{F} &= w - \frac{p}{q} m + eB_1(a, f) + e^2 B_2(a, f) + \dots, \end{aligned} \quad (16)$$

в яких праві частини, тобто функції $A_1(a, f), A_2(a, f), \dots, B_1(a, f), B_2(a, f), \dots$, знаходяться у такий спосіб, щоб подання розв'язку у формі (6), (16) з необхідним ступенем точності задовольняло вихідному рівнянню (1). Поступаючи в подібний спосіб як і для нерезонансного випадку, для знаходження невідомих функцій отримаємо залежності:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= \frac{e}{plb[(w + kV)^2 + (w - cV)^2]} \left\{ \int_0^l \int_0^b \int_0^{2p} f_1(a, x, y, q) [r(x, y) \cos q - h(x, y) \sin q] dx dy dq - \right. \\ & \left. - H \left[\sin f \int_0^l \int_0^b r(x, y) dx dy + \cos f \int_0^l \int_0^b h(x, y) dx dy \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{f} = w - \frac{p}{q} m + \frac{e}{palb[(w + kV)^2 + (w - cV)^2]} \left\{ \int_0^l \int_0^b \int_0^{2p} f_1(a, x, y, q) [r(x) \sin q + h(x) \cos q] dx dy dq + H \left[\cos f \int_0^l \int_0^b h(x, y) dx dy - \sin f \int_0^l \int_0^b r(x, y) dx dy \right] \right\}. \quad (17)$$

Залежності (17) визначають резонансну криву стаціонарного руху у такому вигляді:

$$\int_0^l \int_0^b \int_0^{2p} f_1(a, x, y, q) [r(x, y) \cos q - h(x, y) \sin q] dx dy dq = H \left[\sin f \int_0^l \int_0^b r(x, y) dx dy + \cos f \int_0^l \int_0^b h(x, y) dx dy \right],$$

$$\int_0^l \int_0^b \int_0^{2p} f_1(a, x, y, q) [r(x) \sin q + h(x) \cos q] dx dy dq + (w - \frac{p}{q} m) \frac{palb[(w + kV)^2 + (w - cV)^2]}{e} = H \left[\cos f \int_0^l \int_0^b h(x, y) dx dy - \sin f \int_0^l \int_0^b r(x, y) dx dy \right]. \quad (18)$$

Отже, у першому наближенні резонансний процес описується таким співвідношенням:

$$u(t, x, y) = a(\cos(kx + dy + f + J) + \cos(cx - dy - f - J)), \quad (19)$$

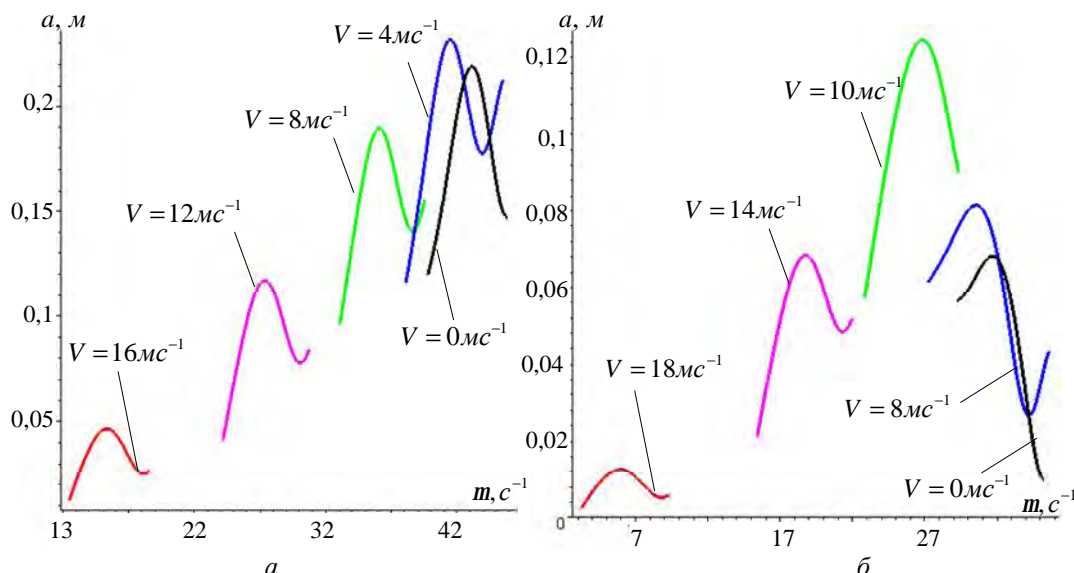
в якому параметри a та f визначаються залежностями (17).

На рисунку показано резонансні значення амплітуди за різних значень швидкості поздовжнього руху для випадків

$$f(u, u_x, u_y, u_t, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) = Bu_{xx}u_x^2 + du_t^s \quad (20)$$

за $b = l/5m$; $d = 1$; $h = 0,001$; $l = 1,5m$; $g = 5mc^{-1}$; $a = 20mc^{-1}$; $B = 100$, $s = 1$ — рис. а)

та за $b = l/10m$; $d = 1$; $h = 0,001$; $l = 2m$; $g = 5mc^{-1}$; $a = 25mc^{-1}$; $B = 25$, $s = 3$ — рис. б).



Залежності резонансних значень амплітуди за різних значень швидкості поздовжнього руху та ширини гнучкого елемента

Динамічні напруження. Представлені вище результати показують, що для нерезонансного випадку на динамічний процес рівною мірою впливають як сили системи, так і початкові параметри руху. У той самий час для резонансного випадку – домінуюче значення відіграє співвідношення між частотами вимушених m та власних w коливань. Власна частота гнучких елементів визначається як внутрішніми чинниками (силами, крайовими умовами), так і швидкістю поздовжнього

руху. Отже, для резонансного випадку швидкість поздовжнього руху впливатиме значною мірою і на динамічне напруження. Для визначення динамічної складової напруження необхідно визначити видовження гнучкого елемента, яке зумовлене його коливанням, тобто

$$\Delta l = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (21)$$

Беручи до уваги (17), отримаємо

$$\Delta l = \frac{a^2(t)}{2} \int_0^l \left(k^2 \sin^2(kx + dy + f + J) + c^2 \sin^2(cx - dy - f - J) - 2kc \sin(kx + dy + f + J) \sin(cx - dy - f - J) \right) dx. \quad (22)$$

Як наголошувалось вище, тут розглядаються “короткі системи”, для яких f і J є функціями часу. Це дає змогу останнє співвідношення записати у такому вигляді:

$$\Delta l = \frac{1}{4} a^2(t) \left[2k^2 l - k \sin 2(kl + dy + f + J) + 2c^2 l - c \sin 2(cl - dy - f - J) - 4kc \left(\frac{1}{k-c} \sin((k-c)l + 2(dy + f + J)) \right) \right]. \quad (23)$$

З урахуванням того, що матеріал гнучких елементів систем приводів задовольняє нелінійному закону пружності [11] $s = Ee^{n+1}$ (s – напруження, e – відносне видовження E, n – сталі), знаходимо додатковий натяг гнучкого елемента систем приводу, зумовленого його коливаннями, а значить, і динамічне напруження у нормальному перерізі:

$$s = \frac{E}{S} \left(\frac{a^2(t)}{4l} \right)^{n+1} \left[2k^2 l - k \sin 2(kl + dy + f + J) + 2c^2 l - c \sin 2(cl + dy + f + J) - 4kc \left(\frac{1}{k-c} \sin((k-c)l + 2(dy + f + J)) - l \right) \right]^{n+1}. \quad (24)$$

Динамічне напруження, як впливає із (24), не перевищує величини

$$\bar{s} = \frac{E}{S} \left(\frac{a_{\max}^2}{4l} \right)^{n+1} \left[2k^2 l + k + 2c^2 l + c + 4kc \left(\frac{1}{k-c} \right) \right]^{n+1}. \quad (25)$$

Таблиця 1

V	0	2	4	5	6	8	10	12	14	16
a	0.216	0.228	0.23	0.24	0.216	0.188	0.152	0.12	0.08	0.047
ω	42.15	41.73	40.48	39.53	38.38	35.45	31.68	27.07	21.62	15.34
κ	2.094	2.3052	2.516	2.6215	2.7271	2.9384	3.1504	3.363	3.578	3.7991
χ	2.094	1.8836	1.6728	1.5673	1.4617	1.2504	1.0384	0.825	0.610	0.3897
$h = \frac{a}{a_0}$	1	1.0555	1.0648	1.1111	1.	0.8703	0.7037	0.555	0.370	0.2175
$x = \frac{s_{\max}}{s_0}$	1	0.4716	0.9325	0.8181	0.3545	0.1509	0.0574	0.022	0.003	0.0002

Таблиця 2

V	0	2	4	5	6	7	9	11	17	19
a	0.065	0.066	0.067	0.07	0.074	0.08	0.095	0.142	0.08	0.05
ω	39.271	39.0218	38.2678	37.7023	37.0111	36.1943	34.1837	31.6704	21.1147	16.5908
κ	1.5708	1.69647	1.82214	1.88498	1.94782	2.01066	2.13634	2.26202	2.6391	2.76483
χ	1.5708	1.44512	1.31945	1.25661	1.19377	1.13093	1.00526	0.879576	0.502494	0.376762
$h = \frac{a}{a_0}$	1.	1.01538	1.03077	1.07692	1.13846	1.23077	1.46154	2.18462	1.23077	0.769231
$x = \frac{s_{\max}}{s_0}$	1	6.97853	1.26379	1.01074	1.01659	1.32168	3.2422	4.10844	3.95367	0.367508

У табл. 1 та 2 наведені резонансні значення амплітуд — a , частоти власних коливань — ω , хвильові числа — k, c , відношення резонансної амплітуди за руху стрічки із швидкістю V до резонансної амплітуди за $V=0$ — h та відношення максимальних нормальних напружень у стрічці за вказаних вище параметрів.

Висновки. Наведена методика може бути базовою для розрахунку динамічних процесів у двовимірних гнучких елементах систем приводів та транспортування. Отримані на її основі розрахункові формули показують, що:

- частота власних коливань гнучких елементів систем транспортування залежить від фізико-механічних, геометричних характеристик, а також від швидкості позовжнього руху. За величини швидкості позовжнього руху $V^* = a$, як і для одновимірних гнучких елементів, відбувається зрив коливань;
- явище резонансу для більших швидкостей позовжнього руху існує за менших частот зовнішньої періодичної сили;
- за лінійного закону сил опору для м'яких систем порогового значення швидкості не існує, у той самий час для жорстких — існує. Для нелінійної моделі сили опору (наприклад, du_i^3) — порогове значення швидкості існує як для м'яких, так і жорстких систем;
- резонансне значення амплітуди залежить від величини нелінійних сил. Для більших значень швидкості (але менших за порогове значення) резонансне значення амплітуди є більшим, ніж для випадку системи «із закріпленими кінцями»;
- для швидкостей, більших за порогове значення, із ростом швидкості резонансна амплітуда зменшується;
- напруження у гнучкому елементі за резонансу за порогового значення швидкості позовжнього руху може перевищувати навіть у 3 рази напруження за резонансу у разі коливань гнучкого елемента із закріпленими кінцями;

1. Мартинців М. П., Сокіл Б. І., Сокіл М. Б. Хвильові процеси в однорідних нелінійно-пружних системах і методи їх дослідження // Лісове господарство, лісова, паперова і деревообробна промисловість. – Львів: УДЛТУ. – 2003. – Вип. 28. – С.81–89. 2. Сокіл Б.І., Сенік А.П., Назар І.І. Асимптотичні наближення для хвильових процесів, які описуються нелінійним рівнянням Клейна – Гордона // Вісник НУ “ЛП” “Динаміка, міцність та проектування машин і приладів”. – 2005. – №689. – С.84–88. 3. Сокіл Б.І., Ліщинська Х.І. Вплив позовжньої швидкості руху на поперечні коливання в двовимірних сильно нелінійних системах // Вісник Нац. ун-ту «Львівська політехніка» «Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні». – 2008. – Вип. 42. – С. 96–10. 4. Харченко Є.В., Сокіл М.Б. Нелінійні процеси у середовищах, які характеризуються позовжнім рухом, і вплив способу закріплення на їх коливання // Вісник Нац. ун-ту «Львівська політехніка» «Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні». – 2007. – № 41. – С.156–159. 5. Хитряк О.І. Хвильова теорія у дослідженні процесів у двовимірних системах зі сталою складовою швидкості позовжнього руху // Науковий вісник: Збірник науково-технічних праць. – Львів: УДЛТУ, 2010. – Вип. 20.14. – С.340–344. 6. Хитряк О.І. Узагальнення методу Ван-дер-Поля на крайові задачі для двовимірного рівняння типу Клейна-Гордона / О. І. Хитряк // Науковий вісник: Збірник науково-технічних праць. – Львів: УДЛТУ, 2011. – Вип. 21.4. – С.340–344. 7. Найфе А.Х. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 456 С. 8. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. – М.: Мир, – 1972. – 272 с. 8. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы математической физики. – М.: Наука, 1973. – 352 с. 9. Митропольский Ю.А., Мосеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К: Вища шк. – 1976. – 592 с. 10. Рабинович М.И. Об асимптотическом методе в теории нелинейных колебаний распределенных систем // ДАН СССР. – 1971. – 191. – №6. – С.1253–1256. 11. Сокіл Б.І., Сенік А.П., Ліщинська Х.І. Нелінійнопружні характеристики гнучких елементів систем привода та їх вплив на частоту власних коливань // Збірник наукових праць (галузеве машинобудування, будівництво) /Полтавський національний технічний ун-т ім. Ю. Кондратюка. – 2009. – Вип.3 (25). – С.206–209.