УДК 330.43+336.764.2

Н.Л. Іващук
Національний університет “Львівська політехніка”

МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ЦІН ОПЦІОНІВ ЗА ВИПАДКОВОЇ СТРИБКОПОДІБНОЇ ВІДСОТКОВОЇ СТАВКИ БЕЗ РИЗИКУ

Розроблено метод визначення цін стандартних і нестандартних опціонів для випадку, коли зміни відсоткової ставки без ризику мають випадковий стрибкоподібний характер. На основі цього методу розроблено моделі оцінювання бінарних опціонів типу “готівка або нічого” з правом купівлі та продажу базового активу. У роботі розраховано ціни таких опціонів з використанням розроблених моделей, а також здійснено порівняння цін опціонів з фіксованою та стохастичною відсотковою ставкою без ризику. Окрім того, досліджується вплив суми виплати для власника опціону та терміну його дії на опціонну премію.

In article the method of definition of the prices standard and non-standard options for a case when changes risk-free interest rate have stochastic jump character is developed. On the basis of this method pricing models of binary options "cash-or-nothing" with the right of purchase and sale of a base active are developed. In work the prices such options, with use of the developed models are calculated, and also comparison of the prices options with fixed and stochastic risk-free rate is made. Except for it influence of the sum of payment and the period of its action on the option premium is investigated.

Постановка проблеми та її зв’язок з важливими науковими та практичними завданнями. Опціони є предметами обігу на ринках деривативів, зокрема на багатьох біржах, і становлять для інвесторів привабливий вид інвестицій, як для тих, котрі намагаються зредукувати ризик, так і для тих, котрі шукають можливості отримати надзвичайні прибутки. Ці похідні інструменти дають змогу не тільки хеджувати фінансові вкладення, але й ефективно управляти ними, вміло використовуючи сучасні моделі та механізми фінансового ринку.

Головною проблемою при здійсненні операцій з опціонами є правильне встанов-лення їхньої ціни (опціонної премії). Для визначення цін опціонів використовується низка моделей, які ґрунтуються на двох базових моделях – дискретній моделі біноміального дерева та неперервній моделі Блека–Шоулса. При цьому кожна з моделей містить певні припущення, які не завжди збігаються з тенденціями на реальному фондовому і строковому ринках. Зокрема, припускається, що певні параметри опціонів мають постійний характер, тобто не змінюються у часі. У зв’язку з цим необхідне розроблення нового інструментарію, що наближав би наші моделі до реальних процесів, які відбуваються на ринку опціонів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв’язання цієї проблеми. З метою визначення цін опціонів вчені віддавна застосовували різноманітні математичні методи, серед яких можна виділити кілька груп: стохастичні, наближені числові, регресійні, стимуляційні та оптимізаційні методи.

Серед стохастичних методів найпопулярнішими є стохастичні процеси Леві, Гаусса–Вінера, Маркова, Бесселя, метод мартингалів та інші. Зокрема стохастичні процеси Леві використовувалися у дослідженнях таких вчених: Г. Альбрехер і М. Предота [1], які дослідили границі цін та здійснили апроксимацію цін дискретних азіатських опціонів за допомогою Gamma дисперсійних моделей; П. Карр і Л.Ву [2], які застосували нестаціонарні процеси Леві для визначення цін опціонів; Дж. Дуан та Дж. Сімонато [3] адаптували метод апроксимації ланцюгами Маркова до моделі GARCH з метою визначення цін американських опціонів; Дж. Ціцікліс і Б. Ванрой [4] розробили метод оптимальної зупинки для марківських моделей фінансових деривативів із великою кількістю змінних; Дж. Нунс [5] описав моделювання цін бар'єрних опціонів, виставлених на ставку LIBOR, за допомогою гауссівської багатофакторної моделі типу Heath-Jarrow-Morton; Г. Ґеман та В. Йор [6] розробили метод оцінювання азіатських опціонів, який ґрунтується на стохастичних процесах Бесселя, тощо.

Цілі статті. Метою дослідження є розроблення нового методу визначення цін опціонів, зокрема нестандартних, для випадку стохастичних стрибкоподібних змін відсоткової ставки без ризику. На основі цього методу розробимо моделі оцінювання бінарних опціонів типу "готівка або нічого".

Основний матеріал дослідження. Відомо, що зміни більшості параметрів опціо-нів мають випадковий характер. До того ж такі зміни можуть наставати раптово. З метою врахування цих особливостей розробимо моделі оцінювання нестандартних опціонів з використанням теорії стохастичних процесів зі стрибками для моделювання поведінки відсоткової ставки без ризику.

Нагадаємо, що модифікована Р.Мертоном модель Блека–Шоулса передбачає такі формули для обчислення цін європейських опціонів купівлі C_{bs} та продажу P_{bs}, в основу яких покладено акції, за якими неперервно виплачуються дивіденди [7, с. 178]:

$$C_{bs}\left(S,K,\sigma,\mathrm{g},\tau,r\right)=Se^{-g\tau}N(d_{1bs})-Ke^{-r\tau}N(d_{2bs})\,, \tag{1}$$

$$P_{bs}\left(S,K,\sigma,\mathrm{g},\tau,r\right)=Ke^{-r\tau}N(-d_{2bs})-Se^{-g\tau}N(-d_{1bs})\,, \tag{2}$$

$$d_{1bs}=\frac{\ln\frac{S}{K}+\left(r-g+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}=d_{2bs}+\sigma\sqrt{\tau}\,,\quad d_{2bs}=\frac{\ln\frac{S}{K}+\left(r-g-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}=d_{1bs}-\sigma\sqrt{\tau}\,,$$

де S – ціна базового активу, K – ціна виконання опціону, σ – імплікована змінність ціни базового активу, g – річна дивідендна ставка, τ – час до погашення опціону, r – відсоткова ставка без ризику.

При оцінюванні опціонів зі стохастичною стрибкоподібною відсотковою ставкою без ризику за базову приймемо описану вище модель. Нехай далі задовольняються всі припущення цієї моделі за винятком одного: що відсоткова ставка без ризику r є фіксованою величиною. Дослідимо, як формується у такому разі ціна європейського опціону, інвестиційний портфель якого містить два активи:

а) перший, у якому ціна виконання $\left(K_t\right)_{t\in[0,T]}$ залежить від змінної відсоткової ставки без ризику вигляду $r=\lambda\varepsilon$, де $\varepsilon=EU$ – математичне сподівання випадкової змінної U, а $\left(U_j\right)_{j\in\mathbb{N}}\subset(-1,+\infty)$ є послідовністю стрибків, незалежно і випадково розподілених за законом Пуассона $\left(N_t\right)_{t\in[0,T]}$ з інтенсивністю $\lambda>0$, причому вважаємо, що $\ln\left(1+U\right)\sim\mathbb{N}\left(m,\delta^2\right)$;

б) другий, у якому ціна базового активу $\left(S_t\right)_{t\in[0,T]}$ зростає у часі за нульовою відсотковою ставкою без ризику $r=0$, а математичне сподівання ціни базового активу μ дорівнює дивідендній ставці g, тобто $\mu=g$.

Далі процеси цін розглядаємо на проміжку часу $t\in[0,T]$ і термін до погашення опціону позначаємо $\tau=T-t$. Для опису процесу S_τ скористаємося модифікацією Р. Мертона моделі Блека–Шоулса, в якій відсоткова ставка без ризику r є фіксованою величиною (яку далі приймемо $r=0$, оскільки в нашій версії моделі вона не має впливу на S_τ і врахована у змінах K_τ), натомість враховується виплата дивідендів на базовий актив за ставкою g, на яку необхідно зменшити дохідність акції, тобто ціна акції зростає у часі за ставкою $r-g$. Отже, у випадку довільного r:

спотова ціна другого базового активу змінюється згідно зі стохастичним диференціальним рівнянням із заданою початковою умовою:

$$dS_\tau = (r-g)\, S_\tau d\tau + \sigma dW_\tau, \qquad S_\tau |_{\tau=0} = S_T .$$

Тоді його єдиний розв'язок має вигляд:

$$S_\tau = S_T \exp\left(\left(r-g-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma W_\tau\right),$$

де σ – імплікована змінність ціни базового активу.

Наступна особливість нашої моделі є наслідком припущення *а)*:

перший актив інвестиційного портфеля дисконтується згідно із стохастичним диференціальним рівнянням із заданою початковою умовою:

$$dK_\tau = -\lambda\varepsilon K_\tau d\tau + K_\tau d\left(\sum_{j=1}^{N_\tau} U_j\right), \qquad K_\tau |_{\tau=0} = K_T .$$

Тоді єдиний розв'язок цієї задачі має вигляд:

$$K_\tau = K_T \exp(-\lambda\varepsilon\tau)\left(\prod_{j=1}^{N_\tau}(1+U_j)\right) = K_T \exp\left(-\lambda\varepsilon\tau + \sum_{j=1}^{N_\tau}\ln(1+U_j)\right).$$

Вище в обох випадках ми використали відому теорему Itô [8] про існування і єдиність розв'язку початкової задачі для стохастичних диференціальних рівнянь. З припущення, що на ринку відсутній арбітраж, випливає існування імовірнісної міри $\mathbb{P}$, відносно якої процеси спотових цін S_τ та дисконтування другого активу K_τ будуть F_t –мартингалами відносно мінімальної фільтрації, породженої заданими процесами W_t та N_t. Перевіримо це безпосередніми обчисленнями. З цією метою здійснимо заміни: $dW_\tau^* = dW + \gamma\sigma dt$ – міри стохастичної похідної по процесу Гаусса–Вінера та параметра інтенсивності в процесі Пуассона, а саме, нехай N_τ^* є новим процесом Пуассона з інтенсивністю $\lambda^* = \lambda(1-\gamma\varepsilon)$, де γ – деякий невідомий числовий параметр. Далі припустимо, що вектор (S_τ^*, K_τ^*) є розв'язком початкової задачі для системи стохастичних рівнянь із доходом базового активу $\mu^* = r - \gamma\sigma^2$ вигляду:

$$dS_\tau^* = \mu^* S_\tau^* d\tau + \sigma S_\tau^* dW_\tau^*, \qquad S_\tau^* |_{\tau=0} = S_T ;$$

$$dK_\tau^* = -\lambda^*\varepsilon K_\tau^* d\tau + K_\tau^* d\left(\sum_{j=1}^{N_\tau^*} U_j\right), \qquad K_\tau^* |_{\tau=0} = K_T .$$

Тоді із вже згадуваної теореми Itô випливає, що єдиний розв'язок має вигляд:

$$S_\tau^* = S_T \exp\left[\left(\mu^* - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma W_\tau^*\right], \qquad K_\tau^* = K_T \exp(-\lambda^*\varepsilon\tau)\left(\prod_{j=1}^{N_\tau^*}(1+U_j)\right),$$

При цьому, виконуються такі співвідношення:

$$E\left(S_\tau^* \mid \mathsf{F}_s\right) = S_s^* E\left(\exp\left[\left(\mu^* - \frac{\sigma^2}{2}\right)(\tau - s) + \sigma\left(W_\tau^* - W_s^*\right)\right] \mid \mathsf{F}_s\right)$$

$$= S_s^* E\left(\exp\left[\left(\mu^* - \frac{\sigma^2}{2}\right)(\tau - s) + \sigma\left(W_\tau^* - W_s^*\right)\right]\right) = S_s^* \exp\left[\mu^*(\tau - s)\right],$$

$$E\left(K_\tau^* \mid \mathrm{F_s}\right)=K_s^* E\left(\exp\left[\left(-\lambda^*\varepsilon\right)(\tau-s)\right]\prod_{j=N_s^*+1}^{N_\tau^*}\left(1+U_j\right) \mid \mathrm{F_s}\right)$$

$$=K_s^* E\left(\exp\left[\left(-\lambda^*\varepsilon\right)(\tau-s)\right]\prod_{j=N_s^*+1}^{N_\tau^*-N_s^*}\left(1+U_{N_s+j}\right)\right)$$

$$=K_s^*\exp\left[\left(-\lambda^*\varepsilon\right)(\tau-s)\right]E\left(\prod_{j=N_s^*+1}^{N_\tau^*}\left(1+U_j\right)\right)=K_s^*\exp\left[\left(-\lambda^*\varepsilon\right)(\tau-s)\right]\exp\left[\lambda^*\varepsilon(\tau-s)\right]=K_s^*.$$

Отже, вектор $\left(S_\tau^*, K_\tau^*\right)$ $\mathrm{F_t}$ -мартингалом тоді і тільки тоді, коли $\mu^*=0$ або $\gamma=\dfrac{r}{\sigma^2}$. Параметр γ характеризує ризик нашого інвестиційного портфеля. Отже, вибравши параметр γ, ми завжди можемо прийти до модифікованої системи рівнянь нашої задачі, для якої розв'язок початкової задачі є $\mathrm{F_t}$ -мартингалом. Більше того, з умови $\ln(1+U)\sim\mathbb{N}\left(m,\delta^2\right)$ випливає, що значення параметра ризику виражається явно через імовірнісну характеристику стрибкоподібної функції, а саме:

$$\gamma=\ln E(1+U)=\frac{\delta^2}{2}+m.$$

Наведене зауваження є дуже важливим, оскільки з того, що вектор $\left(S_\tau^*, K_\tau^*\right)$ є $\mathrm{F_t}$ -мартингалом випливає, що ціну довільного європейського опціону можна обчислити згідно з формулою, яка у розглядуваному випадку має вигляд умовного математичного сподівання:

$$V_\tau=V\left(S_T,K_T,\tau,g,\sigma,0\right)=E\left[H\left(S_T,K_T\right) \mid \mathrm{F}_t\right],\qquad \tau=T-t,$$

де $H\left(S_T,K_T\right)$ є функцією виплати опціону, а $\mathrm{F_t}$ – фільтрація, породжена процесами спотових цін S_t та цін виконання K_t. Далі з того, що $K_T=K_\tau\exp\left(\lambda\varepsilon\tau-\sum_{j=1}^{N_\tau}\ln\left(1+U_j\right)\right)$ є процесом Пуассона по змінній U, випливає, що V_τ є складеним процесом Пуассона відносно випадкової змінної U. Отже, для обчислення його математичного сподівання $\chi_{\lambda,Z}\left(V_\tau\right)$ можна застосувати формулу:

$$\begin{aligned}\chi_{\lambda,Z}\left(V_\tau\right)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!}E\{V_\tau \mid N_\tau=n\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!}E\left\{E\left\{H\left(S_T,K_T\right) \mid \mathrm{F}_t\right\} \mid N_\tau=n\right\}=\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!}E_n\left\{E\left[H\left(S_T,K_T\exp\left(-\lambda\varepsilon\tau+\sum_{j=1}^{n}\ln\left(1+U_j\right)\right)\right) \mid \mathrm{F}_t\right]\right\}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!}V\left(S_T,K_T\exp(-\lambda\varepsilon\tau)Z_n,\tau,g,\sigma,0\right),\end{aligned}\qquad(3)$$

де позначено

$$Z_n=\prod_{j=1}^{n}\left(1+U_j\right)=\exp\left(\sum_{j=1}^{n}\ln\left(1+U_j\right)\right),$$

$$V\left(S_T,K_T\exp(-\lambda\varepsilon\tau)Z_n,\tau,g,\sigma,0\right)=E_n\left\{E\left[H\left(S_T,K_T\exp(-\lambda\varepsilon\tau)Z_n\right) \mid \mathrm{F}_t\right]\right\}$$

і оператор математичного сподівання E_n береться по змінній Z_n, яка має такий самий розподіл, як добуток n незалежних та ідентично розподілених випадкових змінних $Z=U+1$, $Z_0=1$, для кожної з яких $\varepsilon = E(Z-1)$. Вище ми також скористалися тим, що оператори математичного сподівання по незалежних випадкових змінних за відомою теоремою Фубіні можна переставляти місцями.

З іншого боку, користуючись припущенням, що $\ln(1+U) \sim \mathbb{N}(m, \delta^2)$, формулу (3) можна також подати у вигляді:

$$\chi_{\lambda,Z}(V_\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!} E_n \left\{ E\left[H\left(S_T, K_T \exp\left(-\lambda\varepsilon\tau + \overbrace{\sum_{j=1}^{n} \ln(1+U_j)}^{\mathbb{N}(nm, n\delta^2)} \right)\right) | \mathrm{F}_t \right]_t \right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!} E\left[H\left(S_T, K_T \exp\left(n\left(m + \frac{\delta^2}{2}\right) - \lambda\tau\left(\exp\left(m + \frac{\delta^2}{2}\right) + 1\right)\right)\right) | \mathrm{F}_t \right].$$

Далі позначаємо

$$K_n(\lambda, m, \delta, \tau) = K_T \exp\left(n\left(m + \frac{\delta^2}{2}\right) - \lambda\tau\left(\exp\left(m + \frac{\delta^2}{2}\right) + 1\right)\right). \tag{4}$$

З умови відсутності на ринку арбітражу випливає, що $V_\tau = E\left[H(S_T, K_T) | \mathrm{F}_t\right]$ є також мартингалом по змінній S_τ, а отже,

$$V(S_T, K_n, \tau, g, \sigma, 0) = E_W\left[H(S_T, K_n) | \{S_\tau = S_T\}\right]$$
$$= E_W\left[H\left(S_T \exp\left[-\left(g + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma W_\tau \right], K_n(\lambda, m, \delta, \tau)\right)\right],$$

де оператор математичного сподівання E_W береться тільки по процесу W_τ. Підставляючи цей вираз в формулу для $\chi_{\lambda,Z}(V_\tau)$, отримуємо явну формулу для оцінювання європейських опціонів із стрибкоподібною відсотковою ставкою без ризику $\lambda\varepsilon$ у вигляді:

$$\chi_{\lambda,Z}(V_\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!} V(S_T, K_n(\lambda, m, \delta, \tau), \tau, g, \sigma, 0) =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!} E_W\left[H\left(S_T \exp\left[-\left(g + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma W_\tau \right], K_n(\lambda, m, \delta, \tau)\right)\right]. \tag{5}$$

Формула (5) еквівалентна (3), однак зручніша для обчислень, оскільки не містить оператора математичного сподівання E_n по змінній Z_n, а у явній формі виражається через відомі параметри, за умови, що обчислено вигляд ціни опціону із нульовою відсотковою ставкою без ризику.

Як перше застосування такого підходу розглянемо стандартний європейський опціон купівлі. Ціна такого деривативу зі спотовою ціною базового активу S_T, ціною виконання K_T, часом до погашення $\tau = T - t$, фіксованою ставкою доходу базового активу g та змінністю σ для випадку, коли відсоткова ставка без ризику дорівнює $r = 0$, визначається за формулою:

$$V_\tau = C_{bs}(S_T, K_T, \tau, g, \sigma, r)|_{r=0} = S_T e^{-g\tau} N(d_1) - K_T N(d_2),$$

де $d_{ibs}\left(S_T,K_n,\tau,g,\sigma,0\right),(i=1,2)$ залежать, зокрема, від τ і K_T. Підставляючи таке V_τ у (3)–(5), отримуємо явний вираз для оцінювання стандартного європейського опціону купівлі за стрибкоподібної відсоткової ставки без ризику:

$$\chi_{\lambda,Z}\left(C_{bs}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda\tau}\left(\lambda\tau\right)^n}{n!}E_n\left[C_{bs}\left(S_T,K_TZ_ne^{-\lambda\varepsilon\tau},\tau,g,\sigma,0\right)\right]$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda\tau}\left(\lambda\tau\right)^n}{n!}\left[S_Te^{-g\tau}N\left(d_{1bs}\left(S_T,K_n,\tau,g,\sigma,0\right)\right)-K_nN\left(d_{2bs}\left(S_T,K_n,\tau,g,\sigma,0\right)\right)\right],$$

Тепер позначимо через $\chi_{\lambda,Z}\left(P_{bs}\right)$ ціну європейського опціону продажу за стрибкоподібної відсоткової ставки без ризику $\lambda\varepsilon$. Згідно з (2) одержуємо, що ціна стандартного європейського опціону продажу акцій зі спотовою ціною базового активу S_T, ціною виконання K_T, часом до погашення τ, фіксованими дохідністю базового активу g та його змінністю σ при $r=0$, має вигляд:

$$V_\tau=P_{bs}\left(S_T,K_T,\tau,g,\sigma,r\right)|_{r=0}=K_TN(-d_{2bs})-S_Te^{-gT}N(-d_{1bs}).$$

Тоді аналогічно отримуємо формулу для оцінювання стандартного європейського опціону продажу за стрибкоподібної відсоткової ставки без ризику:

$$\chi_{\lambda,Z}\left(P_{bs}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda\tau}\left(\lambda\tau\right)^n}{n!}E_n\left[P_{bs}\left(S_T,K_TZ_ne^{-\lambda\varepsilon\tau},\tau,g,\sigma,0\right)\right]$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda\tau}\left(\lambda\tau\right)^n}{n!}\left[K_nN\left(-d_{2bs}\left(S_T,K_n,\tau,g,\sigma,0\right)\right)-S_Te^{-g\tau}N\left(-d_{1bs}\left(S_T,K_n,\tau,g,\sigma,0\right)\right)\right].$$

Застосуємо запропонований вище методологічний підхід до оцінювання бінарних опціонів, враховуючи стрибкоподібну відсоткову ставку без ризику. Далі приймаємо спрощені позначення $K=K_T$ та $S=S_T$.

Найпростішим представником бінарних опціонів є опціон типу “готівка або нічого”, який нагадує парі. Якщо базовий актив перевищить (не перевищить) визначений рівень, то певна сума готівки виплачується покупцю опціону купівлі (продажу). У протилежному випадку опціон втрачає свою вартість. Величина потенційної виплати для майбутнього утримувача опціону визначається у момент укладання опціонного контракту. Виплата може мати грошову або безгрошову форму. Якщо бінарний опціон типу ***“готівка або нічого”***, то його емітент зобов’язаний виплатити обумовлену в опціонному контракті грошову суму утримувачу опціону, за умови, що опціон погашається “у грошах”. Отже, виплата утримувача за описаним вище опціоном у момент його виконання записується у вигляді:

– для опціону з правом купівлі: $$payoff_{call}=\begin{cases}w, & S_T>K,\\ 0, & S_T\le K,\end{cases}$$

– для опціону з правом продажу: $$payoff_{call}=\begin{cases}w, & S_T>K,\\ 0, & S_T\le K,\end{cases}$$

де S_T – ринкова ціна спот базового активу на момент виконання опціону; w – наперед визначена сума готівки.

За припущень моделі Блека–Шоулса, тобто за фіксованої відсоткової ставки без ризику r, ціна опціону “готівка або нічого” обчислюється за формулою [9, с. 241]:

– для опціону з правом купівлі

$$CON_{call}\left(S,K,\tau,g,\sigma,r\right)=we^{-r\tau}N\left\{\left[\ln\left(\frac{S}{K}\right)+\left(r-g-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right]\Big/\sigma\sqrt{\tau}\right\}, \qquad (6)$$

– для опціону з правом продажу

$$CON_{put}\left(S,K,\tau,g,\sigma,r\right)=we^{-r\tau}N\left\{-\left[\ln\left(\frac{S}{K}\right)+\left(r-g-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right]\Big/\sigma\sqrt{\tau}\right\}, \tag{7}$$

де $N(.)$ – функція стандартизованого нормального розподілу випадкової змінної;

S – ціна спот (значення) базового активу на момент погашення опціону.

Для обчислення явного виразу ціни опціону "готівка або нічого" за стохастичної стрибкоподібної відсоткової ставки без ризику $\lambda\varepsilon$, де $\varepsilon=EU$, а U_j є послідовністю стрибків, незалежно і випадково розподілених за законом Пуассона N_t з інтенсивністю $\lambda>0$, застосуємо аналогічний підхід, як для стандартних опціонів. А саме, оскільки ціну V_τ довільного європейського опціону можна обчислити за формулою умовного математичного сподівання, а ціна виконання $K=\tilde{K}_\tau\exp\left(\lambda\varepsilon\tau-\sum_{j=1}^{N_\tau}\ln\left(1+U_j\right)\right)$ є процесом Пуассона, то V_τ є складеним процесом Пуассона відносно випадкової змінної U і для обчислення його математичного сподівання $\chi_{\lambda,Z}\left(CON\right)$ по U можна застосувати формули (3)–(5). Звідси отримуємо, що у цьому випадку $\chi_{\lambda,Z}\left(CON\right)$ належить оцінювати за такими формулами:

– для опціону з правом купівлі

$$\begin{aligned}\chi_{\lambda,Z}\left(CON_{call}\right)&=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda\tau}\left(\lambda\tau\right)^l}{l!}E_l\left[CON_{call}\left(S,KZ_le^{-\lambda\varepsilon\tau},\tau,g,\sigma,0\right)\right]\\&=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda\tau}\left(\lambda\tau\right)^l}{l!}wN\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\ln\left(\frac{S}{K_l\left(\lambda,m,\delta,\tau\right)}\right)+\left(-g-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right]\right\};\end{aligned} \tag{8}$$

– для опціону з правом продажу

$$\begin{aligned}\chi_{\lambda,Z}\left(CON_{0,put}\right)&=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda\tau}\left(\lambda\tau\right)^l}{l!}E_l\left[CON_{put}\left(S,KZ_le^{-\lambda\varepsilon\tau},\tau,g,\sigma,0\right)\right]\\&=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda\tau}\left(\lambda\tau\right)^l}{l!}wN\left\{\frac{-1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\ln\left(\frac{S}{K_l\left(\lambda,m,\delta,\tau\right)}\right)-\left(g+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right]\right\},\end{aligned} \tag{9}$$

де $Z_l=\prod_{j=1}^{l}\left(1+U_j\right)$ – має розподіл добутку l незалежних та ідентично розподілених випадкових змінних $Z=U+1$, $Z_0=1$, для яких $\varepsilon=E\left(Z-1\right)$ та $\ln\left(1+U\right)\sim\mathbb{N}\left(m,\delta^2\right)$; E_l – оператор математичного сподівання від розподілу Z_l. Формулу (8) отримуємо підставлянням (6) в (5), а (9) – підставлянням (7) в (5) за умови, що: $r=0$ та $K_l\left(\lambda,m,\delta,\tau\right)$ обчислено за формулою (4).

Бінарні опціони за фіксованої відсоткової ставки без ризику досліджувалися також в роботах [10; 11]. Такі опціони найчастіше використовуються фінансовими інституціями з метою отримання інвестиційного доходу. Розглянемо випадок стохастичної стрибкоподібної відсоткової ставки без ризику. Нехай ціна базового активу становить 95 грн., ціна виконання 100 грн., змінність базового активу 20 %, відсоткова ставка без ризику – 6 % зі стрибками, інтенсивність стрибків $\lambda=1$, середньоквадратичне відхилення змінної U дорівнює $\delta=0.7071$, а її математичне сподівання $\zeta=0.025$, дохідність базового активу 8 %. Використовуючи формули (8)–(9), запрограмовані за допомогою пакета Mathematica, обчислимо ціну опціону з правом купівлі купівлі, а також дослідимо її залежність від суми виплати та терміну дії опціону. Отримані результати (табл. 1, рис. 1) показують, що у міру зростання суми виплати за опціоном його ціна швидко зростає, що пов'язано зі зростанням евентуальних втрат для емітента опціону. Внаслідок збільшення терміну дії опціону його ціна теж зростає, хоч не так швидко. Зростання ціни опціону внаслідок зростання терміну його дії можна пояснити зростанням непевності щодо майбутньої ситуації на ринку базового активу. Для інвестора, який хоче зайняти коротку позицію у такому опціоні, вигіднішими будуть інструменти з довшим терміном дії. Вища сума виплати також підвищує ціну опціону, оскільки зростає ризик можливих втрат, пов'язаних з необхідністю розрахунку з утримувачем опціону.

Таблиця 1

Залежність ціни опціону купівлі від суми виплати та терміну дії

Виплата/ термін дії	1 місяць	2 місяці	3 місяці	4 місяці	5 місяців	6 місяців
20 грн.	5.92452	6.63842	6.87496	6.96197	6.98264	6.96850
40 грн.	11.8490	13.2768	13.7499	13.9239	13.9653	13.9370
60 грн.	17.7736	19.9153	20.6249	20.8859	20.9479	20.9055
80 грн.	23.6981	26.5537	27.4999	27.8479	27.9305	27.8740
100 грн.	29.6226	33.1921	34.3748	34.8099	34.9132	34.8425

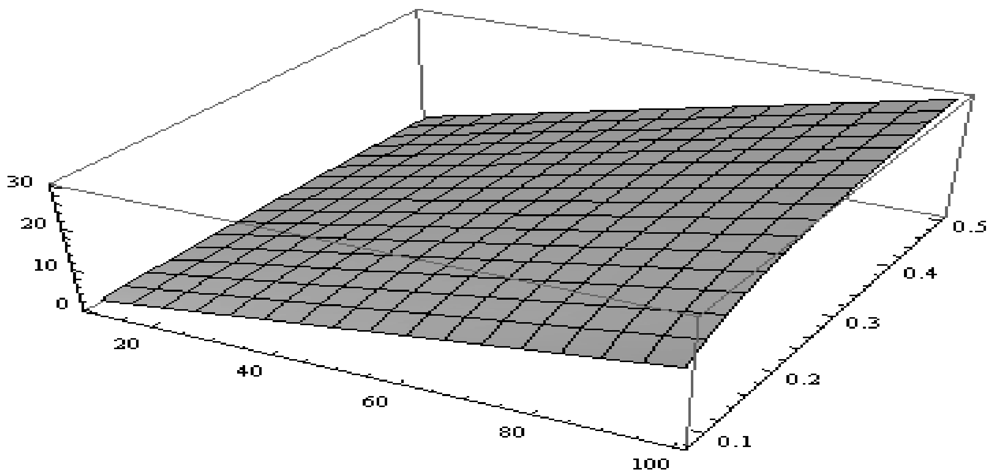

Рис. 1. Залежність ціни опціону купівлі від суми виплати та терміну дії

Зазначимо, що на рисунку по вертикалі показано ціну опціону. Якщо порівняємо ціни аналогічних опціонів з фіксованою та стрибкоподібною відсотковими ставками, то побачимо, що останні є дорожчими (табл. 2). Однак наша модель враховує реальні процеси, які відбуваються на ринку, що цікавить обидві сторони контракту.

Таблиця 2

Порівняння цін опціонів купівлі для фіксованої та стохастичної відсоткової ставки без ризику

Виплата/ термін дії	2 місяці		Різниця	4 місяці		Різниця	6 місяців		Різниця
	Фікс. ставка	Стох. ставка		Фікс. ставка	Стох. ставка		Фікс. ставка	Стох. ставка	
20 грн.	4.73	6.64	-1.91	5.64	6.96	-1.32	5.96	6.96	-1.00
40 грн.	9.46	13.28	-3.82	11.28	13.92	-2.64	11.92	13.93	-2.01
60 грн.	14.19	19.92	-5.73	16.92	20.88	-3.96	17.88	20.90	-3.02
80 грн.	18.92	26.65	-7.73	22.57	27.84	-5.27	23.84	27.87	-4.03
100 грн.	23.65	33.19	-9.54	28.21	34.80	-6.59	29.80	34.84	-5.04

Потім ми дослідили аналогічний опціон, за стохастичної відсоткової ставки без ризику, але з правом продажу. Залежність ціни такого опціону від суми виплати та від терміну дії опціону показано у табл. 3 та на рис. 2. Результати досліджень свідчать про позитивний вплив суми виплати на ціну опціону (вона зростає) та негативний вплив терміну дії опціону (ціна опціону знижується). Отже, для інвестора вигідніше купувати опціон з невисокою виплатою, виставлений на довший термін дії.

Таблиця 3

Залежність ціни опціону продажу від суми виплати та терміну дії

Виплата/ термін дії	1 місяць	2 місяці	3 місяці	4 місяці	5 місяців	6 місяців
20 грн.	13.9757	13.1626	12.8273	12.642	12.5236	12.4404
40 грн.	27.9515	26.3252	25.6546	25.284	25.0471	24.8808
60 грн.	41.9272	39.4877	38.4818	37.926	37.5707	37.3212
80 грн.	55.9029	52.6503	51.3091	50.568	50.0942	49.7616
100 грн.	69.8786	65.8129	64.1364	63.210	62.6178	62.2020

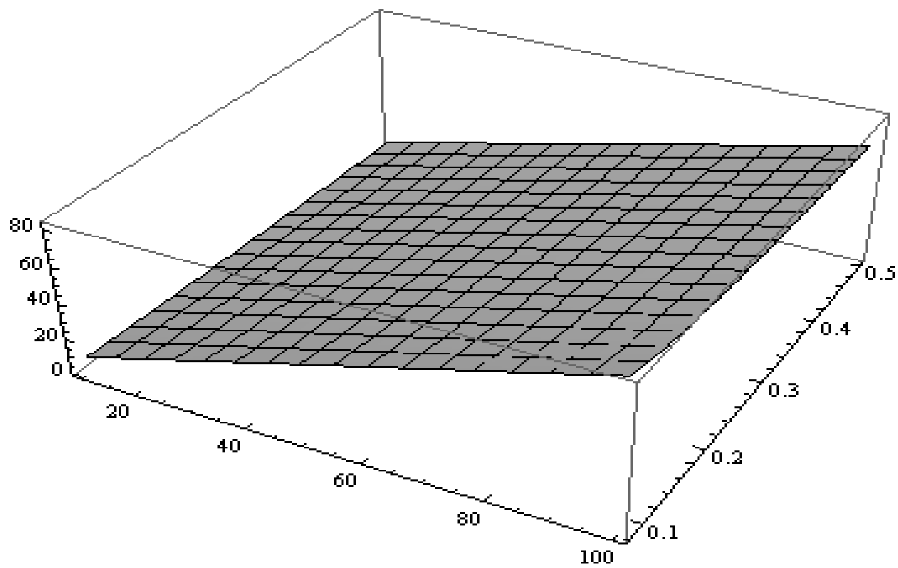

Рис. 2. Залежність ціни опціону продажу від суми виплати та терміну дії

Порівнюючи отримані результати для фіксованої та стрибкоподібної відсоткових ставок без ризику (табл. 4), бачимо зворотну ситуацію, тобто ціни опціонів з фіксованою ставкою є вищими від цін опціонів зі стрибкоподібною відсотковою ставкою без ризику.

Таблиця 4

Порівняння цін опціонів продажу для фіксованої та стохастичної відсоткових ставок без ризику

Виплата/ термін дії	2 місяці		Різниця	4 місяці		Різниця	6 місяців		Різниця
	Фікс. ставка	Стох. ставка		Фікс. ставка	Стох. ставка		Фікс. ставка	Стох. ставка	
20 грн.	15.07	13.16	1.91	13.96	12.64	1.32	13.44	12.44	1.00
40 грн.	30.14	26.32	3.82	27.92	25.28	2.64	26.89	24.88	2.01
60 грн.	45.21	39.48	5.73	41.88	37.92	3.96	40.34	37.32	3.02
80 грн.	60.28	52.65	7.63	55.84	50.56	5.28	53.79	49.76	4.03
100 грн.	75.35	65.81	9.54	69.80	63.21	6.59	67.24	62.20	5.04

У зв’язку з тим, що функція доходу є порівняно простою, бінарні опціони стали дуже популярними на позабіржовому ринку. Ці деривативи можна оцінювати за допомогою моделі Блека–Шоулса. Однак стрибки у функції виплати створюють певні труднощі у хеджуванні позицій емітента цих деривативів, оскільки зміни ціни опціону можуть бути доволі стрімкими та значними.

Висновки та перспективи подальших досліджень. У статті запропоновано новий метод оцінювання опціонів, який дає змогу використовувати реальні статистичні дані при розрахунку цін як стандартних, так і нестандартних опціонів. На основі цього методу було розроблено модель оцінювання одного із різновидів бінарних опціонів. Виконані дослідження дають змогу враховувати випадкові зміни відсоткової ставки без ризику під час прогнозування цін опціонів, що наблизить наші моделі до реальних ринкових умов. Це, своєю чергою, підвищить ліквідність таких деривативів, оскільки обидві сторони опціонного контракту зацікавлені у тому, щоб модель якомога реальніше описувала фактичні умови строкового та базового ринків.

Подальші дослідження у цій сфері повинні стосуватися розвитку наявних та створення нових моделей оцінювання опціонів, які б послаблювали доволі ригористичні припущення сучасних економіко-математичних моделей.

1. Albrecher H., Predota M. Bounds and Approximations for Discrete Asian Options in a Variance-Gamma Model // Grazer Math. Ber. . – 2002. – Vol. 345. – P. 35–57. 2. Carr P., Wu L. Time-Changed Levy Processes and Option Pricing // Journal of Financial Economics. – 2004. – Vol. 71. – P. 113–141. 3. Duan J.C., Simonato J.G. American Option Pricing under GARCH by a Markov Chain Approximation // Working paper, Rothman School of Management, University of Toronto. – 1998. – P. 12–19. 4. Tsitsiklis J., Van Roy B. Optimal Stopping of Markov Processes: Hilbert Space Theory, Approximation Algorithm, and an Application to Pricing High-Dimensional Financial Derivatives // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1999. – Vol. 44. – P. 1840–1851. 5. Nunes J.P. Barrier Options on Spot LIBOR Rates under Multi-Factor Gaussian HJM Models// Journal of Derivatives. – 2006. – Vol. 14, № 1. – P. 61–81. 6. Geman H., Yor V. Bessel Process, Asian Options and Perpetuities // Mathematical Finance. – 1993. – Vol. 3, № 4. – P. 349–375. 7. Ong M. Exotic Options: The Market and Their Taxonomy / I.Nelken. The Handbook of Exotic Options. Instruments, Analysis and Applications, IRWIN Professional Publishing, Chicago, 1996. – 576 p. 8. Cont R., Tankov P. Financial Modeling with Jump Processes. Chapman & Hall / CRC, 2004. – 527 p. 9. Hull J.C. Options, Futures and Other Derivatives. Fourth edition, Prentice-Hall International Inc., Upper Saddle River 2000. – 698 p. 10. Kolb R.W. Futures, Options and Swaps. Blackwell Publishing, Padstow, 2003. – 877 p. 11. Ravindran K. Customized Derivatives: A Step-by-Step Guide to Using Exotic Options, Swaps and Other Customized Derivatives. McGraw-Hill, New York, 1998. – 680 p.